Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 42 (1942)

Artikel: Leben und Sterben in mathematischer Darstellung : über Sinn und Herkommen der "Sterblichkeitsgesetze"

Autor: Zwinggi, Ernst

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966911

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Leben und Sterben in mathematischer Darstellung [1]).

Über Sinn und Herkommen der „Sterblichkeitsgesetze".

Von *Ernst Zwinggi*, Basel.

Kein bliben ist in diser zit,
Wir farend all dahin ferr und wit;
Silber und gold hilft uns nit hie,
Es weiss ouch niemand wann und wie.

Berner Totentanz des *Niklaus Manuel*,
entstanden zwischen 1514 und 1522.

I.

Vierzig Jahre waren verflossen, seit *Johannes Kepler* [2]) die drei Gesetze über die Bewegung der Planeten um die Sonne ausgesprochen und damit erstmals ein Naturgesetz in *mathematische Form* gebracht hatte, fünfundzwanzig Jahre sollten noch vergehen, bis *Isaac Newton* [3]) das die Mechanik beherrschende Gravitationsgesetz fand, als zum ersten Male in London die Sterblichkeit *statistisch* erfasst wurde.

John Graunt [4]) wagte 1661 den Versuch, unter der Zufallserscheinung des Sterbens eine Regelmässigkeit zu finden. In einer der Royal Society vorgelegten Abhandlung mit dem Titel «Natural and Political Observations mentioned in a following Index, and made upon the

---

[1]) Die vorliegende Arbeit stellt eine etwas erweiterte Fassung der am 22. Januar 1942 in Basel gehaltenen öffentlichen Habilitationsvorlesung dar und bildet zugleich auch eine vermehrte Belegung der Gedankengänge, wie sie im ersten Teil der Abhandlung «Die Sterblichkeit im schweizerischen Volksversicherungsbestand der Basler Lebens-Versicherungs-Gesellschaft in den Jahren 1912—1937» (in «Fünfundsiebenzig Jahre Basler Lebens-Versicherungs-Gesellschaft 1864—1939») vom Verfasser dargelegt worden sind.

[2]) *Johannes Kepler*, 1571—1630. Das letzte der drei nach ihm genannten Gesetze wurde 1619 veröffentlicht.

[3]) *Isaac Newton*, 1643—1727. Das Gravitationsgesetz wurde 1687 bekanntgegeben.

[4]) *John Graunt*, 1620—1674, war von Beruf zuerst Tuchhändler, später Kommissär zur Versorgung Londons mit Wasser.

Bills of Mortality, with reference to the Government, Religion, Trade, Growth, Ayre, Diseases, and the several Changes of the said City», setzte er sich eingehend mit der Sterblichkeit der Londoner Bevölkerung auseinander. Die Unterlagen dazu boten ihm die Sterberegister der Stadt. Allerdings war in diesen «Bills» das Alter beim Tode nicht verzeichnet, und so war Graunt genötigt, eine willkürliche Verteilung der Gestorbenen auf die verschiedenen Sterbealter vorzunehmen. Das Ergebnis der Sterblichkeitsmessung darf dadurch als die Wirklichkeit nur in ganz groben Zügen wiedergebend angesehen werden. Der Abhandlung war eine Tabelle beigegeben, aus welcher die Zahl der Überlebenden aus 100 Neugeborenen von zehn zu zehn Jahren abgelesen werden konnte.

Graunt überlegte bei der Ableitung dieser Tabelle wie folgt [1]: «Sintemal wir gefunden haben, dass von 100 Neugeborenen ungefähr 36 sterben, bevor sie 6 Jahre alt sind, und dass vielleicht eine das Alter 76 überlebt und wir 7 Dekaden zwischen 6 und 76 haben, so suchen wir 6 mittlere Verhältniszahlen zwischen dem Rest von 64, der beim Alter 6 lebt und dem einen, der 76 überlebt. Wir finden, dass die folgenden Zahlen der Wahrheit praktisch nahekommen, denn die Menschen sterben nicht in einem genauen Verhältnis ab, noch in Bruchteilen, woraus diese folgende Tafel hervorgeht. Nämlich:

von 100 sterben innerhalb der ersten 6 Jahre	36
der nächsten 10 Jahre oder Dekade	24
der zweiten Dekade	15
der dritten Dekade	9
der vierten	6
der nächsten	4
der nächsten	3
der nächsten	2
der nächsten	1

Daraus folgt, dass von den besagten 100 Neugeborenen blieben am Leben

[1]) Wir entnehmen diese deutsche Fassung der sehr verdienstlichen Zusammenstellung von *Heinrich Braun:* Urkunden und Materialien zur Geschichte der Lebensversicherung und der Lebensversicherungstechnik (Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft, Heft 58, Berlin 1937), S. 19.

im Alter von	6	Jahren	64
	16	»	40
	26	»	25
	36	»	16
	46	»	10
	56	»	6
	66	»	3
	76	»	1
	86	»	0»

Dreissig Jahre vergingen, bis ein neuer, entscheidender Schritt in der Messung der Sterblichkeit getan wurde. In den «Londoner Philosophical Transactions» für das Jahr 1693 erschien unter dem Titel «An estimate of the degress of the Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of the Birth and Funerals of the City of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of Annuities upon Lives» eine Abhandlung, für die *Edmund Halley* [1]), der berühmte Astronom, als Verfasser zeichnete. Auf Grund von Zusammenstellungen, welche der Breslauer Theologieprofessor und Pastor *Caspar Neumann* [2]) zur Widerlegung abergläubischer Ansichten über Geburt und Tod der Menschen anfertigte, suchte Halley im Auftrage der Royal Society die Sterblichkeit ziffernmässig für jedes einzelne Altersjahr zu ergründen. Das Vorgehen war allerdings fehlerhaft, indem vorausgesetzt wurde, die Bevölkerung Breslaus befinde sich im Beharrungszustand. Dessenungeachtet hat Halley erstmals bewusst den Begriff der Absterbeordnung verwendet, einen Begriff, ohne den die Versicherungsmathematik heute undenkbar wäre.

Das beginnende 18. Jahrhundert trug zur Messung der Sterblichkeit kaum Wesentliches bei. Wohl waren einige neue Erkenntnisse hinzugetreten, wie z. B. der unterschiedliche Verlauf der Sterblichkeit der Männer und der Frauen [3]). Aber man konnte sich bei der Berechnung der Absterbeordnung mehrheitlich nicht von dem Wege lösen, den Halley gewiesen.

Abraham de Moivre [4]) schrieb im Jahre 1724 das erste Lehrbuch über Rentenrechnung. Zur Vereinfachung der Rechnung suchte er

---

[1]) *Edmund Halley*, 1656—1742.
[2]) *Caspar Neumann*, 1648—1715.
[3]) Erstmals 1740 durch den Holländer *Nicolas Struyck*, 1687—1769, erwiesen.
[4]) *Abraham de Moivre*, 1667—1754.

nach einer mathematischen Formel, welche die aus den beobachteten Zahlen der Gestorbenen bestimmte Absterbeordnung mit ausreichender Genauigkeit annähern sollte. Die von Halley erstellte Tafel liess nach der Meinung Moivres zu, den beobachteten Verlauf durch eine Gerade zu ersetzen [1]: «Ich habe einleitend bemerkt, dass die aus der Annahme, der Abfall der Lebenden erfolge in arithmetischer Progression, abgeleiteten Folgerungen nur sehr wenig von dem abweichen, was aus der in Breslau erstellten, auf die menschliche Sterblichkeit bezüglichen Beobachtungstafel gefolgert werden kann; welche Tafel Dr. Halley vor etwa 50 Jahren in den Philosophical Transactions in Verbindung mit einigen die Leibrentenwerte zu gegebenen Altern betreffenden Rechnungen veröffentlicht hat.

Auf Grund des vorerwähnten Prinzips habe ich angenommen, dass, sofern n die Lebensergänzung — gemeint ist der Unterschied zwischen dem höchst erreichbaren Alter w und dem erreichten Alter x — vorstellt, die Wahrscheinlichkeiten, 1, 2, 3, 4, 5 usw. Jahre zu leben, ausgedrückt sind durch die folgende Reihe: $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, $\frac{n-3}{n}$ usw.» In der heutigen Schreibweise lautet die Formel von Moivre

$$l_x = \frac{l_0}{w}(w-x) \quad \text{mit} \quad {}_tp_x = \frac{w-x-t}{w-x.}.$$

Moivre wollte einzig — dies geht aus seinen Worten deutlich hervor — die aus den Beobachtungswerten berechnete Sterbetafel durch eine andere ersetzen, damit sich die mathematische Durchführung seiner Aufgabe vereinfache. Die Methode der diskontierten Zahlen wurde erst 1785 durch *Tetens* [2]) erfunden, und so bedeutete die Ermittlung eines Rentenbarwertes vorher stets eine umständliche Rechnung. Durch die Einführung der besonderen Absterbeordnung hingegen lief die Aufgabe auf die Summation einer gesetzmässig sich bildenden Reihe hinaus.

Im Jahre 1741 erschien die erste Ausgabe eines Werkes, das mit einem Schlage eine völlig neue Tendenz in die Sterblichkeitsmessung hineintragen sollte. *Johann Peter Süssmilch* [3]), Probst in Cölln (an

[1]) *Zitiert aus Heinrich Braun:* Urkunden und Materialien, S. 36.

[2]) Nach *Heinrich Braun:* Urkunden und Materialien, S. 44 f. Vor Tetens, 1772, hat in England *William Dale* die Werte $l_x v^{x-50}$ tabelliert; S. 107.

[3]) *Johann Peter Süssmilch,* 1707—1767.

der Spree) und Mitglied der Königlichen Academie der Wissenschaften, sammelte eifrig alle ihm zugänglichen statistischen Angaben, um aus ihnen eine «Ordnung der göttlichen Weisheit und Güte, welche sich in der Geburt, Fortpflanzung und Tode der Menschen klärlich zeiget», zu erweisen. Vier Auflagen erlebte «Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen». Die letzte, vierte Ausgabe, 1788, nach dem Tode Süssmilchs erschienen, umfasst mit den Anmerkungen mehr als zweitausend Druckseiten.

Das Bestreben Süssmilchs war, in der Sterblichkeit der Menschen eine «göttliche Ordnung», also ein «von Gott eingerichtetes Naturgesetz» zu entdecken. Dieser Wunsch mag auf den ersten Blick verwundern oder gar befremden. Denn man sollte doch eher annehmen, dass ein Theologe die Meinung vertrete, Gott gebiete gewissermassen «von Fall zu Fall» über Leben und Tod und stelle nicht einfach eine «pauschale Ordnung» auf, der die Menschen unterworfen sein sollen. Derartigen Bedenken scheint Süssmilch nicht zugänglich gewesen zu sein. Im Gegenteil sieht er gerade in dem planmässigen, für alle Orte der Erde und vielleicht sogar für alle Zeiten festgelegten Verlauf der Sterblichkeit den Willen Gottes, nichts dem «Zufall» zu überlassen. Wohl bleibt es für den einzelnen Menschen ungewiss, wann er sterben muss, aber von der Gesamtheit aller Menschen wird stets eine gleiche, wohl abgewogene, von Gott vorbestimmte Anzahl weggenommen.

Süssmilch beschreibt die Gewissheit, dass eine feste göttliche Ordnung im Sterben der Menschen bestehe, mit den folgenden Worten [1]: «Hier zeigt sich eine Ordnung, die man mit Recht die größte, die schönste und vollkommenste nennen kann und muß. Hier finden wir allgemeine Regeln, nach welchen die Dauer des Lebens aller Menschen auf dem Erdboden auf das genauste bestimmt ist. Wenn tausend sterben, so ist darunter überall eine meist gleiche Anzahl von 20, 50, 60, 80jährigen. Die Climaten und die Verschiedenheit der Nahrungsmittel scheinen fast gar keinen Einfluß zu haben, daß sie eine Veränderung in dem Verhältniß der Sterbenden in jedem Alter zu der Summe der Gestorbenen hervorbringen können. Blos die Lebensart, die moralischen Umstände des Lebens, das Laster und die Tugend, die Weichlichkeit und die Arbeitsamkeit, verursachen einen kleinen Unterschied zwischen den Sterbenden auf dem Lande und in

[1]) «Die göttliche Ordnung», 2. Teil, vierte Ausgabe, S. 286 f.

großen Städten. Wer sollte es aber sich wohl als möglich vorgestellet haben, daß die Benedictiner-Mönche, die Nonnen und die Tontiniten in Paris nebst den Bauern in der Mark Brandenburg und denen in Schweden, meistens einerley Regeln der Sterblichkeit sollten unterworfen seyn, und daß sich fast einerley Dauer des Lebens unter diesen so unterschiedenen und entfernten Menschen finden könnte, wie gleichwol nachher unleugbar wird erwiesen werden.»

Später [1]) sagt Süssmilch: «Diese Ordnung in der Sterblichkeit wird deshalb ein jeder ohnstreitig für die größte und vollkommenste halten müßen, der auf die große Verschiedenheit der Ursachen des Todes und auf die Menge der Krankheiten Acht hat, die allesamt sich zu dem Ziel vereinigen, daß sie in einem jeden Perioden des Alters die von der Hand des weisesten Regierers der Welt bestimmte und abgezählte Anzahl der Menschen dem Tode überliefern. So sehr die Krankheiten auch unter sich verschieden sind; so ist doch unter ihnen eine Übereinstimmung zur Erreichung eines vestgesetzten Zwecks. Wäre dieses nicht, würde wol diese so grosse Accuratesse in der Proportion möglich seyn können? Kann man so thöricht seyn, selbige von einem ohngefähren Zufall herzuleiten, oder sich selbigen nur in den Sinn kommen zu lassen? Hier sind alle Zahlen gegen einander proportioniret; die Proportionen sind beständig, sie sind in allen Ländern einerley, und welches ein höchstwichtiger Umstand ist, es werden alle diese proportionirte Zahlen durch eine grosse Menge Ursachen bewirket, welche sämtlich von einander abgesondert und in sich veränderlich sind. Nach solchen Verhältnissen muß die eine Hälfte aller Menschen bis zum zwanzigsten Jahre von diesem Schauplatz wieder abtreten, die andre Hälfte braucht drey- bis viermal so viel Zeit.»

Süssmilchs mathematische Kenntnisse waren nicht hoch einzuschätzen. *Johann Heinrich Lambert* [2]), der geniale, aus Mülhausen stammende und ebenfalls an der Königlichen Akademie wirkende Mathematiker äussert sich in seinen 1765 in Berlin erschienenen «Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung» ziemlich zurückhaltend über die Ergebnisse Süssmilchs. Er schreibt [3]): «Indessen betrachtete er — nämlich Süssmilch — die Sache für-

---

[1]) «Die göttliche Ordnung», 2. Teil, S. 287 f.

[2]) *Johann Heinrich Lambert*, 1728—1777.

[3]) «Beyträge», 3. Teil, S. 476.

nehmlich nur nach dem Maaße seiner Kenntnisse, und daher meistens nur theologisch, moralisch und politisch, letzteres auch nur so weit seine Kenntniß im Rechnen es ihm zuließ.»

Lambert trat unter völlig anderen Voraussetzungen an die Sterblichkeitsmessung heran als Süssmilch. Er wollte — wenn wir von der Beschreibung einer richtigen Berücksichtigung der Alterszusammensetzung bei der Erstellung der Absterbeordnung absehen — aus den nur für grössere Abstände gegebenen Werten in der Sterbetafel auf die Werte für jedes einzelne Alter schliessen. Die Aufgabe, die er sich zu behandeln vornahm, war also eine reine *Interpolationsaufgabe*. Sie wurde gelöst am Material einer in London für die Jahre 1728—1757 durchgeführten Sterblichkeitsmessung [1]). Vom Alter von 10 Jahren an waren nämlich die Zahlen der Überlebenden nur noch in Stufen von 10 zu 10 Altersjahren aufgeführt, und für die dazwischenliegenden Alter berechnete Lambert den Verlauf der Absterbeordnung angenähert.

Lambert gibt für sein Vorgehen die folgende Erklärung [2]): «Man sieht übrigens, daß dieses Gesetz — gemeint ist die Verteilung der Gestorbenen auf die verschiedenen Alter — in der Tabelle nur von 10 zu 10 Jahren angegeben ist. Wenn man es also Jahr für Jahr haben will; so müßen die zwischenfallende Zahlen durch Interpolation gefunden werden. Man kann auch, wie ich es bereits im ersten Theile der Beyträge zur Mathematik in Form eines Beyspiels gezeigt, die Zahlen der vierten Columne — gemeint ist die Zahl der Ueberlebenden aus 100 000 Neugeborenen nach 10, 20, 30 ... Jahren — als Ordinaten einer krummen Linie ansehen, und diese, so gut es vermittelst einer so geringen Anzahl von Ordinaten angeht, construiren, und so kann die Figur dienen, sich überhaupt von dem Gesetze der Sterblichkeit zu London, und gleichsam mit einem Anblicke, einen Begrif zu machen. Ich werde auch das daselbst darüber, wiewohl nur summarisch, angemerkte hier nicht wiederholen.»

Sodann geht Lambert zur eigentlichen mathematischen Darstellung des Sterblichkeitsverlaufes über. Er sagt [3]): «Seitdem habe ich nachgeforscht, ob sich nicht für diese krumme Linie eine Glei-

---

[1]) Siehe Anhang zu *Süssmilchs* «Göttliche Ordnung», 2. Teil, S. 31, oder in *Lamberts* «Beyträgen», 3. Teil, S. 481.

[2]) «Beyträge», 3. Teil, S. 482 f.

[3]) «Beyträge», 3. Teil, S. 483.

chung a posteriori würde finden lassen, welche dieselbe wo nicht genau, doch ohne merkliche Abweichung vom wahren, vorstellen würde. Ich fand auch wirklich, daß folgende — in der heutigen Schreibweise wiedergegebene Formel —

$$l_x = 10\,000 \left(\frac{96 - x}{96}\right)^2 - 6176 \left(e^{-\frac{x}{13{,}682}} - e^{-\frac{x}{2{,}43114}}\right)$$

der Sache ziemlich Genüge that.»

Lambert lässt anschliessend eine Deutung der Formel folgen, aber man darf in ihr keinerlei Versuch sehen, eine «Gesetzmässigkeit» aussprechen zu wollen. Er schreibt [1]: «Die Gleichung ist aus einer Parabel und zwoen logistischen Linien zusammengesetzt und überhaupt sehr einfach. Das erste Glied, welches parabolisch ist, würde angeben, daß das menschliche Geschlecht eben so wegstirbt, wie ein cylindrisches Gefäß voll Wasser sich ausleert.» Wie nahe wäre, im Sinne der Süssmilchschen Erfassung der Aufgabe, der Vergleich gelegen, das menschliche Leben mit einem allmählich sich leerenden Gefäss zu vergleichen! Lambert fährt dann fort: «Die zwey andern Glieder haben mit dem Erwärmen und Erkälten der Körper viel ähnliches, weil dabey in der That die logistische Linie zum Grunde liegt, wie ich es im zweyten Bande von den Actis helveticis längst schon gezeigt habe. Dessen unerachtet werde ich die hier gegebene Formel nur als etwas mit der Beobachtung noch erträglich gut übereinstimmendes, und statt des Interpolirens brauchbares ansehen. Und in so fern kann sie, wenn man über die Sterblichkeit zu London Betrachtungen anstellen will, bey den Rechnungen gut gebraucht werden. Die Frage, der wie vielte sowohl überhaupt als in jedem Alter stirbt, läßt sich vermittelst der Gleichung überhaupt auflösen. Inzwischen muß dennoch angemerkt werden, daß man die Formel bis über das 95ste Jahr hinaus nicht ausdehnen muß, weil das erste Glied mit dem 96sten Jahre = 0 wird.»

Der reziproke Wert der Intensität der Sterblichkeit wird gewöhnlich als *Lebenskraft* bezeichnet; denn dieser Wert gibt die Zahl der Jahre an, die bei unverändert bleibender Sterblichkeit im Mittel vom Leben noch erwartet werden darf. Lambert hat als erster [2]) — ohne

[1]) «Beyträge», 3. Teil, S. 484 f.

[2]) Nach *Alfred Loewy:* Johann Heinrich Lamberts Bedeutung für die Grundlagen des Versicherungswesens (Festgabe für Alfred Manes, Berlin 1927).

allerdings den Ausdruck Intensität zu verwenden — den Verlauf der Lebenskraft in Abhängigkeit vom Alter verfolgt und daraus auf die Wirkung der Ursachen zu schliessen versucht. Zwei Stellen sind ihm dabei besonders aufgefallen: die rasch zunehmende Sterblichkeit vom 50. Altersjahr an und der zeitweise Rückgang in den jugendlichen Altern. Ohne sich auf eine genaue Todesursachenstatistik stützen zu können, war es Lambert freilich nicht möglich, die Ursachen dieser Erscheinung richtig zu erkennen; erst die Beobachtung der Sterblichkeit nach Ursachen in den letzten Jahrzehnten hat uns der Abklärung näher gebracht. Lambert äussert sich wie folgt [1]: «Mit der gegen das 50ste oder bereits gegen das 48ste Jahr wiederum stärker abnehmenden Lebenskraft mag es wohl auch eine besondere Bewandniß haben. Man könnte denken, das 49ste als das climacterische Jahr müsse etwas auf sich haben. Wenn es aber auch etwas auf sich hat, so ist es nur weil in diesem Alter oder einige Jahre vor oder nachher in dem Menschen gewisse Aenderungen vorgehen, die seine Lebenskraft anders bestimmen. Uebrigens ist diese Aenderung gegen derjenigen sehr geringe, die sich vom 16ten bis ins 25ste Jahr des Lebens äussert. Bis zum 15ten Jahr nimmt die Lebenskraft beynahe in arithmetischer Progreßion, ja anfangs noch etwas mehr zu. Im 16ten und 17ten Jahre stehet sie gleichsam mit einemmal beynahe ganz still, und nimmt von da an so ab, daß sie im 22sten Jahre wieder eben so geringe, als im zehnten Jahre ist. Dies sind nun freylich die Jahre, wo junge Leute in die Welt treten, Geschäfte und Reisen vornehmen, sich mehreren Gefahren aussetzen, Personen weiblichen Geschlechtes durch Heyrathen sich neuen Gefahren blos geben ec. Es scheinen aber alle diese Umstände zu einem so plötzlichen Stillstand der Lebenskraft und schnellen Abnahme nicht hinreichend zu seyn.

Wenn die Lebenskraft bis gegen das 15te Jahr ganz genau in arithmetischer Progreßion zunehmen würde, so könnte man schließen, daß sie bis dahin eine ganz einfache und gleichförmig wirkende Ursache haben müßte. Denn mehrere Ursachen wirken gewöhnlich, jede nach ihrer Art, so daß die daher entstehende Wirkung ungleichförmig zunimmt. Nun fehlt an bemeldter arithmetischer Progreßion nicht viel, und so scheint es, daß wenigstens die Hauptursache von der zunehmenden Lebenskraft einfach seyn müsse. Diese wirkt aber nur bis gegen das 15te Jahr ohne merklichen Abbruch. Von da an scheint

[1]) «Beyträge», 3. Teil, S. 511 ff.

sich eine sehr kräftig entgegenwirkende Ursache zu äußern, welche die Wirkung der ersteren nicht nur sehr hemmt, sondern schon im 17ten Jahre so überwiegend ist, daß die Lebenskraft, anstatt noch ferner zuzunehmen, wieder sehr schnell bis zum 25ten Jahr abnimmt. Die Sache gleicht so ziemlich einem Cylinder, darin ein Heber ist, welcher nicht eher anfängt den Cylinder auszuleeren, als bis der Cylinder höher, als der Heber geht, angefüllt wird. Da indessen beym 25sten, 50sten und in den achziger Jahren sich in der Abnahme der Lebenskraft neue Ungleichheiten äußern, so müssen auch in diesen Jahren durch neu hinzukommende Umstände entweder neue Ursachen sich äußern, oder die anfänglich wirkenden geändert werden. Wenn es also climacterische Jahre geben sollte, so würden diesen Betrachtungen zufolge das 16, 25, 50 und 84 als solche anzusehen seyn.»

II.

Das ausgehende 18. und das beginnende 19. Jahrhundert hatten der Naturerkenntnis neue wichtige und mathematisch formulierte Gesetze gebracht. Mehr und mehr wollte es scheinen, als ob sich das gesamte Naturgeschehen in feste, durch mathematische Ausdrücke wiederzugebende Beziehungen fassen lasse. So musste es *Ludwig Moser*[1]) fast als selbstverständlich vorkommen, ein absolutes Gesetz regle auch das Sterben der Menschen und harre nur noch der Entdeckung. Beinahe empfindet er es als eine Schande, dass den bisher unternommenen Versuchen ein brauchbares Ergebnis versagt war, und er will dieses Versäumnis durch Aufstellung des «allein richtigen Sterbegesetzes» nachholen. Moser schreibt in der Einleitung zu seinem 1839 erschienenen Werke «Die Gesetze der Lebensdauer nebst Untersuchungen über Dauer, Fruchtbarkeit der Ehen, über Tödtlichkeit der Krankheiten, Verhältniß der Geschlechter bei der Geburt, über Einfluß der Witterung usw.» über Ziel und Ergebnis seiner Untersuchung wie folgt[2]): «Von seinen Relationen nach Außen abgeschnitten, legt der Gegenstand (die Sterblichkeitsmessung) selbst zwei Aufgaben vor, die man als seine fundamentalen ansehen kann. Die eine davon ist: von einer bestimmten Anzahl Geborener angeben zu können, wie viele die höheren Alter erreichen werden — eine Auf-

[1]) *Ludwig Moser* war Doktor der Philosophie und der Medizin sowie ordentlicher Professor der Physik an der Königsberger Universität.

[2]) «Die Gesetze», S. X f.

gabe, die trotz aller Untersuchungen, nunmehr seit fast 150 Jahren, nichts weniger als gelöst ist. In dem vorliegenden Werke habe ich die Data angegeben, welche die Beobachtungen zu liefern haben, und die Methode, nach welcher sie benutzt werden müssen, um eine definitive Lösung der Aufgabe herbeizuführen. Es dürfte unserer Zeit wohl anstehen, wenn es ihr mit einer so wichtigen Frage, wie die Sterblichkeit, gleichfalls gelänge. Ein bedeutender Schritt hierfür ist, wie ich hoffe, durch das mathematische Gesetz gegeben, welches, in dem successiven Absterben der Menschen zu finden, mir geglückt ist.»

Der Weg, den Moser zum Auffinden seines Sterbegesetzes beschritt, lässt sich durch seine eigenen Worte wie folgt umschreiben[1]: «Faßt man das Phänomen der Schwere allgemeiner, will man die Gesetze darüber auf alle Orte der Erde ausdehnen, für jeden numerisch bestimmen, so bedarf es mehrerer Beobachtungen ähnlicher Art, um, wie es mathematisch ausgedrückt wird, die Constanten der Formel zu bestimmen. Auf gleiche Weise verhält es sich mit der Sterblichkeit. Die Zahl der Sterbefälle bis zu einem gewissen Alter, wenn dasselbe die ersten 30 Jahre nach der Geburt nicht überschreitet, findet sich proportional der vierten Wurzel aus diesem Alter. Dieß ist das Gesetz, dem zu seiner vollen Bestimmtheit eine einzige Beobachtung fehlt, etwa die, wie viele von einer gegebenen Zahl 20jähriger Personen im Laufe eines Jahres sterben.»

Für die ersten 30 Lebensjahre und in der heutigen Schreibweise würde das Sterbegesetz lauten

$$l_x = l_0 - a\sqrt[4]{x} = l_0 - ax^{\frac{1}{4}}.$$

Für die Alter von mehr als 30 Jahren ging Moser[2]) «von der Meinung aus, daß die Glieder, welche vorzugsweise die Sterblichkeit der spätern Jahre reguliren, in gar keiner Beziehung zu dem Gliede $\sqrt[4]{x}$ stehen könnten, und der Gesammtausdruck für die Zahl der Lebenden daher aus zwei heterogenen Theilen zusammengesetzt sein würde. Allein nach vielen Versuchen fand sich die naturgemäße Form der fraglichen Glieder, welche, merkwürdig genug, keine andere ist als $bx^{\frac{9}{4}} + cx^{\frac{17}{4}}$, so daß die Zahl der Lebenden in dem Alter x (in

[1]) «Die Gesetze», S. XII.
[2]) «Die Gesetze», S. 309 f.

der heutigen Schreibweise) die eigenthümliche und regelmäßige Form annimmt

$$l_x = l_0 - ax^{\frac{1}{4}} - bx^{\frac{9}{4}} - cx^{\frac{17}{4}}.$$

Das Gesetz in den Exponenten von x ist klar und einfach, und durch die neuen Glieder wird die Richtigkeit des ersten aufs beste unterstützt.»

Die Tatsache, dass sich der Zähler im Exponent von Glied zu Glied um 8 ändert, ist für Moser kein Zufall, sondern der Ausdruck einer allerdings noch nicht ganz erfassten Gesetzmässigkeit. Denn [1]) «das eigentliche, vollständige mathematische Gesetz der Sterblichkeit möchte eine unendliche Reihe sein, deren erstes Glied die erwähnte vierte Wurzel aus dem Lebensalter, deren weitere Glieder in der Art fortschreiten, wie sie sich aus den Erfahrungen der Berliner Wittwenanstalt herausgestellt hat. In diesem Falle steht zu hoffen, daß zwischen den auf einander folgenden Zahlencoeffizienten irgend eine Beziehung stattfände, welche es möglich mache, den einen aus dem andern zu berechnen, und dadurch die Beobachtungen später mehr und mehr entbehren zu können.» Ferner schreibt Moser, indem er den Wegfall der Altersklassen von mehr als 80 Jahren aus der Untersuchung begründet [2]): «Die höchste Altersklasse muß man wohl für jetzt auf sich beruhen lassen; dem theoretischen Interesse zu genügen, sind die Beobachtungen unvermögend. Es giebt in diesem Betracht nur eine Aussicht zur Kenntniß der vollständigen Formel zu gelangen, und diese besteht darin, daß man in den numerischen Coeffizienten der ersten Glieder irgend ein Gesetz entdeckte, woraus die folgenden a priori abzuleiten sein würden.»

Fünfzehn Jahre bevor Moser sein Werk über die Gesetze der Sterblichkeit erscheinen liess, im Jahre 1824 also, unterbreitete *Benjamin Gompertz* [3]) der Royal Society eine Abhandlung über eine Darstellung der Absterbeordnung, wenn für den Verlauf der Sterbeintensität bestimmte, vorläufig bloss theoretische Annahmen getroffen werden. Diese Abhandlung sollte den Ausgangspunkt bilden für eine die Versicherungsmathematik fast ein Jahrhundert weitgehend bestimmende Auffassung.

---

[1]) «Die Gesetze», S. XIV f.
[2]) «Die Gesetze», S. 320.
[3]) *Benjamin Gompertz*, 1779—1865.

Gompertz überlegte wie folgt [1]: «Es ist möglich, dass der Tod die Folge von zwei zusammenwirkenden Ursachen ist. Die eine der beiden ist der Zufall, ohne Veranlagung zum voraus für einen baldigen und bestimmten Tod; die andere, eine mit dem Alter mehr und mehr zunehmende Unmöglichkeit, der Zerstörung des Körpers zu widerstehen. Würden beispielsweise gewisse Krankheiten bestehen, denen Alte und Junge in gleicher Weise ausgesetzt sind und die Alte und Junge in gleicher Weise erfassen, so ist ersichtlich, dass die Zahl der Toten als Folge dieser Krankheiten in den beiden Gruppen im gleichen Verhältnis zueinander stehen müssten wie die Anzahl der Jungen zu denjenigen der Alten, vorausgesetzt, dass die Zahlen gross genug sind, um die Gesetze des Zufalls sich erfüllen zu lassen. Die Intensität der Sterblichkeit dürfte demnach als unveränderlich angesehen werden. Gäbe es keine andern Krankheiten als die der genannten Art, so wäre die Lebenskraft in jedem Alter die gleiche; die Zahl der Lebenden in einem bestimmten Alter, bezogen auf eine bestimmte Anfangszahl Lebender, müsste in geometrischer Progression abnehmen. Weil aber beim menschlichen Geschlecht täglich neue Gründe zur Abnahme des Widerstandes hinzukommen und die Kräfte anderer Ursachen mehr und mehr zunehmen und zum Tode führen — diese Annahme scheint nicht unwahrscheinlich für einen grossen Teil des Lebens, obgleich für gewisse Abschnitte das Gegenteil der Fall zu sein scheint —, folgt, dass die Zahl der Überlebenden, hervorgegangen aus einer festen Zahl Personen eines bestimmten Alters, in gleichen Zeitabständen stärker abnimmt als nach der geometrischen Progression zu erwarten wäre und dass sich so die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mensch ein bestimmtes Alter erlebe, in immer stärkerer Progression verkleinert, obwohl es kein höchstes Alter gibt, welches ein Mensch erleben kann.»

Auch Gompertz sucht Verbindung mit den physikalischen Gesetzen, aber nicht, um daraus eine «Gesetzmässigkeit» zu begründen. Die gefundene Beziehung scheint ihm bemerkenswert, «nicht so sehr wegen der Art der hypothetischen Herleitung, die in Wirklichkeit mit vielen Naturerscheinungen übereinstimmt, wie z. B. mit dem Auspumpen des Rezipient durch wiederholte, in gleichen Intervallen

[1]) Wir geben hier eine freie Fassung wieder auf Grund einer in der französischen Ausgabe des Text-Book des Institute of Actuaries (1894) enthaltenen französischen Übersetzung; S. 70 f.

stattfindende Pumpenstösse, als vor allem deshalb, weil man sie bestätigt findet durch die Erfahrung über einen langen Lebensabschnitt».

Gompertz folgert, dass die Intensität der Sterblichkeit konstant sein müsste, wäre der Tod nur eine Folge des Zufalls ohne Bestehen einer Veranlagung zur langsamen oder raschen Auflösung der Kräfte. Verliert aber der Mensch in unendlich kleinen Intervallen proportionelle Teile seiner Lebenskraft, so muss die Intensität der Sterblichkeit nach einer geometrischen Progression verlaufen. Formelmässig ausgedrückt, heisst dies

$$d \frac{1}{\mu_x} = -h \frac{1}{\mu_x} dx,$$

woraus folgt

$$d \ln \frac{1}{\mu_x} = -h\, dx$$

$$\ln \frac{1}{\mu_x} = -hx - \ln b$$

$$\frac{1}{\mu_x} = \frac{e^{-hx}}{b} = \frac{c^{-x}}{b}$$

$$\mu_x = b\, c^x.$$

Die Formel von Gompertz erlangte ihre grosse Bedeutung aber erst, als *Makeham* im Jahre 1860 ein weiteres Glied hinzufügte und durch den neuen Ansatz

$$\mu_x = a + b c^x$$

eine enge Anpassung der Berechnung an die Beobachtung erlangen konnte. Die als *Gompertz-Makehamsches Gesetz* bezeichnete Formel, gewöhnlich in der Gestalt geschrieben

$$l_x = k s^x g^{c^x}$$

$$\text{mit } \mu_x = -\ln s - c^x \ln g \ln c,$$

hat bis in die letzten Jahre gestattet, den Sterbeverlauf erwachsener Personen mit guter Treue wiederzugeben [1]). Ursprünglich sah man in der Gompertz-Makehamschen Formel kaum ein Gesetz im Sinne Mosers. Gompertz hat trotz seiner philosophischen Begründung nicht mehr gewollt als einen Ausdruck, welcher den beobachteten Verlauf mit möglichster Genauigkeit wiedergibt. Erst in späteren Jahren — vor allem in Verbindung mit dem von Makeham hinzugefügten Glied — suchte man teilweise wieder mehr in der Formel, als sie zu geben vermag. Denn der Gedanke, dass es wohl ein Sterbe*gesetz* geben könne, ohne zu einer einzigen Sterbe*tafel* führen zu müssen, also eine Art «Rahmengesetz mit individueller Anpassung an Geschlecht, Land, Rasse, usw.», liess sich gerade bei der Gompertz-Makehamschen Formel durch die Dreizahl der Konstanten schön darlegen, wenn auch nicht begründen.

Die von Ludwig Moser vertretene Ansicht, der Verlauf der Sterblichkeit müsse sich durch ein mathematisch fassbares Naturgesetz wiedergeben lassen, verlor sich nicht so bald. Noch 1882 schrieb *Theodor Wittstein* — unter den zahlreichen Versuchen des ausgehenden 19. Jahrhunderts sei dieser einzige herausgegriffen — im Vorwort zu seiner Abhandlung über «Das mathematische Gesetz der menschlichen Sterblichkeit» den Satz [2]): «Das ideale Ziel aber, nach welchem Untersuchungen dieser Art hinstreben, ist das, gleichwie der Astronom jetzt aus wenigen Beobachtungen eines Gestirns dessen ganze Bahn berechnet, so auch dereinst aus der Beobachtung weniger Altersklassen mit Sicherheit eine ganze Sterblichkeitstafel aufbauen zu können.»

Wittstein wollte eine mathematische Formel ableiten, die erlaubt, den Verlauf der Sterblichkeit über *alle* Altersstufen darzustellen. Er glaubte, den gültigen Ansatz im Ausdruck

$$q_x = a^{-(M-x)^n} + \frac{1}{m} a^{-(mx)^n}$$

---

[1]) Das Auftreten einer Schwingung im Verlaufe der einjährigen Sterbewahrscheinlichkeit in den Altersstufen zwischen 20 und 30 Jahren, wie neueste Untersuchungen erkennen lassen, gestattet die Anwendung der Gompertz-Makehamschen Formel nur noch für die Alter von mehr als 30 Jahren.

[2]) «Das mathematische Gesetz», S. 6.

gefunden zu haben. Da mit $x_0 = \frac{M}{m+1}$ ein Minimum eintritt und der Abfall der Sterbewahrscheinlichkeiten q_x in den Altern $x < x_0$ viel rascher vor sich geht als die spätere Zunahme, war Wittstein der Meinung, die Aufgabe gelöst zu haben, zumal die Anpassung an die Beobachtungswerte befriedigend schien.

Der Umstand dagegen, dass das mathematische Gesetz der Sterblichkeit aus zwei Teilen additiv zusammengesetzt war, bedurfte einer Rechtfertigung [1]: «Man kann gegen die von uns aufgestellte Function den Einwand erheben, daß dieselbe aus zwei Theilen besteht, während man von vorn herein nur einen eintheiligen Ausdruck glaubt erwarten zu müssen. Aber wir meinen in dem vorliegenden Falle, daß die Zweitheiligkeit unserer Function auch einen in der Natur der Sache liegenden Grund habe, und suchen dies nachzuweisen wie folgt.

Wenn man sich auf den Standpunkt der natürlichen Erwägung versetzt, so wird man a priori geneigt sein anzunehmen, daß die Sterbenswahrscheinlichkeit des Menschen eine von der Geburt bis zur höchsten Lebensgrenze continuirlich wachsende Größe sein müsse. Der Mensch ist von dem Augenblicke der Geburt an den schädlichen und von Tage zu Tage sich wiederholenden Einwirkungen der Aussenwelt ausgesetzt, er sucht denselben aus innerer Kraft zu widerstreben, nichts desto weniger werden deren Residuen von Tage zu Tage sich zu einer fortwährend wachsenden Summe anhäufen, und je nachdem seine Widerstandsfähigkeit eine größere oder kleinere ist, erliegt er ihnen später oder früher. Dies ist ungefähr derjenige Stand der Sache, welchen der erste Theil unserer Formel anzeigt. Aber damit dieser Stand factisch eintreten kann, muß noch eine andere sehr dringende Erwägung hinzukommen. Das Kind ist aus eigenen Mitteln noch gar nicht im Stande der Natur den nöthigen Widerstand zu leisten; es muß behütet werden und diese Behütung muß selbst noch über die Pubertätsjahre hinaus sich erstrecken, bis dahin, wo im Alter der vollendeten Mündigkeit die eigenen Mittel ausreichen. Wäre die Kinderbehütung überall eine ideale, so würde davon hier nicht weiter zu reden sein. Es ist aber bekannt genug, wie viel die Wirklichkeit hierin zu wünschen übrig läßt. Es muß deshalb als ganz sachgemäß bezeichnet werden, daß unsere Formel noch einen zweiten Theil enthält,

[1]) «Das mathematische Gesetz», S. 27 f.

welcher mit der Höhe der Kinderverwahrlosung steigt und fällt. Insbesondere kann unsere Constante m wie ein Modulus angesehen werden, an welchem der Grad der Behütung der Kinder gemessen werden kann. Für Fürstenkinder wird dieser Modulus einen sehr großen Werth haben und mithin der zweite Theil unserer Formel dem Verschwinden nahe kommen; dagegen je tiefer man in die Schichten der menschlichen Gesellschaft hinabsteigt, desto kleiner wird in Folge unserer Civilisationszustände der gedachte Modulus werden und einen desto größeren Beitrag zur Sterbenswahrscheinlichkeit wird also der zweite Theil unserer Formel liefern.»

Die Berechnung der Konstanten aus den Beobachtungswerten zeigte, daß sich a und n von Tafel zu Tafel nur wenig ändern, während beim höchsten Alter M die grössten Unterschiede auftreten. Daraus kam Wittstein [1]) «auf die Vermuthung, daß vielleicht allgemein die Größen a und n Constanten im absoluten Sinne dieses Wortes, wie z. B. die Beschleunigung der Schwere, das mechanische Wärme-Aequivalent u. a. seien, von denen nur angenäherte Werthe vorliegen. Die Folge hiervon würde sein, daß alle Sterblichkeitstafeln vollkommen identische Sterbenswahrscheinlichkeiten enthalten müssen und nur in der Altersgrenze sich unterscheiden, in der Weise, daß allgemein zu einerlei Altersergänzung einerlei Sterbenswahrscheinlichkeit gehört. Oder mit anderen Worten, es müßte die eine dieser Sterblichkeitstafeln unmittelbar dadurch in die andere übergehen, daß man die Columnen um so viel Jahre und in demjenigen Sinne verschiebt, wie die Altersgrenzen beider Tafeln verschieden sind.»

III.

Ist der Versicherungsmathematik Wesentliches verloren gegangen aus der Erkenntnis, dass es Sterbegesetze im üblichen Sinne nicht gibt?

Es ist nicht zu verkennen, dass der methodische Aufbau — aber nur dieser — stellenweise an Geschlossenheit verloren und verschiedentlich der Eleganz entbehrt, die man an der mathematischen Schlussfolgerung sonst so bewundert. Gerade die *Gompertz-Makehamsche Formel* besitzt Eigenschaften — wie z. B. durch die Möglichkeit, eine versicherte Gesamtheit ungleichaltriger Leben durch eine

[1]) «Das mathematische Gesetz», S. 52.

Gesamtheit gleichaltriger zu ersetzen und durch den Zusammenhang mit den unvollständigen Gammafunktionen —, die erlauben, Vorgänge in allgemeinster Form zu erkennen und die zugleich für die praktische Rechnung bedeutende Vereinfachungen ergeben. Nur so ist zu verstehen, dass auch heute noch das begründete Bestreben anzutreffen ist, den Verlauf der Sterblichkeit durch mathematische Formeln wiederzugeben. Dabei ist man sich aber bewusst: es handelt sich nicht darum, den beobachteten wahren Ablauf eines Naturereignisses in der Form eines «Gesetzes» darzustellen, sondern bloss durch einen einfachen mathematischen Ausdruck zu approximieren. Damit sind Anschauungen wieder zur Geltung gelangt, wie sie *Moivre*, *Lambert* u. a. zum Teil schon vor mehr als 200 Jahren vertraten und die eigentlich nur unter dem Eindruck der überwältigenden mathematisch-physikalischen Forschungsergebnisse des 19. Jahrhunderts zeitweise an Bedeutung verloren.

Literaturnachweis.

Alphabetische Reihenfolge.

1. *Braun, H.:* Geschichte der Lebensversicherung und Lebensversicherungstechnik. Nürnberg 1925 bei Carl Koch.
— Urkunden und Materialien zur Geschichte der Lebensversicherung und der Lebensversicherungstechnik. Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungs-Wissenschaft, Heft 58, Berlin 1937.
— Die Ansichten vom Leben und Sterben im Wandel der Zeiten. Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungs-Wissenschaft, Heft 60, Berlin 1937.
— Von der makrophysikalischen Auffassung des Sterbegeschehens zur quantentheoretischen Auffassung. Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft, Band 38, Berlin 1938.
2. *King, G., & Bégault, A.:* Text-Book de l'Institut des Actuaires de Londres. Brüssel und Paris 1894.
3. *Knapp, G. F.:* Theorie des Bevölkerungswechsels. Braunschweig 1874.
4. *Linder, A.:* Methoden zur Berechnung von Volkssterbetafeln. Bern 1934.
— Daniel Bernoulli and J. H. Lambert on mortality statistics. Journal of the Royal Statistical Society, Vol. XCIX, Part 1, 1936.
5. *Loewy, A.:* Johann Heinrich Lamberts Bedeutung für die Grundlagen des Versicherungswesens. Festgabe für Alfred Manes, Berlin 1927.
6. *Lorey, W.:* Über die Lambertsche Sterbeformel. Blätter für Versicherungsmathematik, 3. Band, 11. Heft, Berlin 1936.
— Johann Heinrich Lambert, 26. August 1728 bis 25. September 1777. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, XXVIII. Jahrgang, Berlin 1929.
7. *Rosin, A.:* Lebensversicherung und ihre geistesgeschichtlichen Grundlagen. Eine kultursoziologische Studie zum englischen 18. Jahrhundert. Kölner anglistische Arbeiten, 16. Band, Leipzig 1932 bei Bernhard Tauchnitz.
8. *Spiess, O.:* Leonhard Euler. Ein Beitrag zur Geistesgeschichte des XVIII. Jahrhunderts. In der Sammlung «Die Schweiz im deutschen Geistesleben». Frauenfeld und Leipzig 1929 bei Huber & Co.
9. *Westergaard, H.:* Die Lehre von der Mortalität und Morbidität. Jena 1901 bei Gustav Fischer.
— Contributions to the History of Statistics. London 1932.
10. *Wittstein, Th.:* Das mathematische Gesetz der menschlichen Sterblichkeit. 2. Auflage, Hannover 1883.
11. *Zwinggi, E.:* Die Sterblichkeit im schweizerischen Volksversicherungsbestand der Basler Lebens-Versicherungs-Gesellschaft in den Jahren 1912—1937. Fünfundsiebenzig Jahre Basler Lebens-Versicherungs-Gesellschaft, 1864 bis 1939.