Das Zufallsrisiko bei kleinen Versicherungsbeständen

Autor(en): **Ammeter, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **42 (1942)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966915

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Das Zufallsrisiko bei kleinen Versicherungsbeständen.

Von *H. Ammeter*, Zürich.

Bei der Berechnung von Sicherheitsreserven und -zuschlägen zur Deckung des Zufallsrisikos benützt man mit Vorteil die von der Risikotheorie entwickelten Methoden. Die Anwendung dieser Methoden auf praktische Probleme setzt voraus, dass die zufälligen Schwankungen im Ablauf des Risikos dem Gaußschen Gesetz folgen. Dieser Grenzfall kann aber nur bei grossen Versicherungsbeständen mit genügender Annäherung erreicht werden; bei kleinen Versicherungsbeständen ist dagegen die Voraussetzung einer Gaußschen Verteilung nicht erfüllt. Mit Rücksicht darauf, dass dem Zufallsrisiko eine um so grössere Bedeutung zukommt, je kleiner der Versicherungsbestand ist, besteht aber gerade bei kleinen Versicherungseinrichtungen, wie z. B. bei Pensions- und Sterbekassen, das grösste Bedürfnis, dem Zufallsrisiko durch Sicherheitsreserven und -zuschläge Rechnung zu tragen. Im folgenden wird versucht, eine Methode auszubilden, die nicht eine Gaußsche Verteilung der zufälligen Schwankungen im Ablauf des Risikos annimmt und daher den bei einem kleinen Versicherungsbestand von Fall zu Fall vorliegenden Verhältnissen Rechnung zu tragen vermag.

Bei der Berechnung der Sicherheitsreserve stellen sich dem Übergang von der einzelnen Versicherung zu einem beliebig zusammengesetzten Versicherungsbestand verschiedene Schwierigkeiten entgegen. Diese lassen sich umgehen, wenn von vornherein die Verteilung der im Gesamtbestand möglichen Zufallsschwankungen als Ausgangspunkt der Untersuchung gewählt wird.

Die praktische Anwendung der vorgeschlagenen Methode wird an einigen Beispielen erprobt, die gleichzeitig Anhaltspunkte über die Grössenordnung der für kleine Versicherungsbestände erforderlichen Sicherheitsreserven und -zuschläge vermitteln.

Die folgenden Betrachtungen beschränken sich auf zufällige Schwankungen und erfassen die sogenannte wesentliche Schwankungskomponente nicht.

I. Grundbegriffe der Risikotheorie.

A. Die Verlustfunktion [2]) *).

Wir betrachten einen Versicherungsbestand, in dem gleichzeitig verschiedene Versicherungsformen, beispielsweise Todesfall-, Erlebensfall-, Invaliditätsversicherungen usw., vertreten sein können. Mit Hilfe von Rechnungsgrundlagen, die dem Risikoverlauf während der in Untersuchung gezogenen Zeitspanne entsprechen, sind die Prämien und Einlagen der Versicherten eines bestimmten Versicherungsbestandes nach dem Äquivalenzprinzip festgesetzt worden. Wird von Zins-, Unkosten- und Stornogewinnen abgesehen, so hat die Versicherungseinrichtung aus dem Risikoablauf der übernommenen Versicherungen während der betrachteten Zeitspanne (beispielsweise während der ganzen Laufzeit der Versicherungen) rechnungsmässig weder Gewinne noch Verluste zu gewärtigen. In Wirklichkeit wird jedoch nur selten der rechnungsmässige Risikoverlauf zustande kommen; im besondern nicht bei kleinen Versicherungsbeständen. Der Gesamtbetrag der Verluste, die sich für eine bestimmte Versicherungseinrichtung während der in Betracht gezogenen Zeitspanne ergeben, sei mit X bezeichnet. Gewinne werden im folgenden als negative Verluste aufgefasst. Der Gesamtverlust X kann verschiedene Werte annehmen. Doch ist die Zahl der möglichen Werte beschränkt, weil X im gegebenen Fall stets die Summe von Risikosummen aus den vorhandenen Einzelversicherungen darstellen muss. Wir können alle Kombinationen von Einzelverlusten, die zum gleichen Totalverlust X führen, zusammenfassen und die möglichen Gesamtverluste nach steigenden Beträgen ordnen. Das Eintreffen eines jeden dieser möglichen Totalverluste X kann mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit erwartet werden; Totalverlusten, die nicht als Summe von im Bestand auftretenden Risikosummen entstanden sein können, insbesondere allen Beträgen ausserhalb des durch das minimale und maximale Risiko abgegrenzten Bereichs, kommt die Wahrscheinlichkeit Null zu. Den Zusammenhang zwischen den Verlusten X und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $w(X)$ nennen wir Verlustfunktion. Diese nimmt also bei diskontinuierlicher Betrachtung nur für eine endliche Anzahl von Verlustbeträgen einen von Null verschiedenen Wert

*) Die im Text angeführten Nummern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

an. Wird hingegen die kontinuierliche Berechnungsmethode verwendet, so kann die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(X)$ für jeden beliebigen Wert von X zwischen $-\infty$ und $+\infty$ von Null verschieden sein.

Zur näheren Beschreibung der Verlustfunktion benützen wir die Potenzmomente k^{ter} Ordnung [1]):

$$m_k = \sum_{X=-\infty}^{+\infty} w(X)\, X^k \quad \text{oder} \quad m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} w(X)\, X^k\, dX$$

Für $k = 0$ ist $m_0 = \Sigma w(X) = 1$, weil die Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Verluste gleich Eins sein muss.

Das *erste Moment* m_1 ist der Mittelwert von X und wird oft auch als Erwartungswert von X bezeichnet. Werden die Versicherungskosten nach dem Äquivalenzprinzip berechnet, so ist m_1 stets gleich Null.

Das *zweite Moment* m_2 ist auch unter dem Namen Streuung von $w(X)$ bekannt. Im übrigen ist m_2 nichts anderes als das Quadrat des in der klassischen Risikotheorie bekannten mittleren Risikos.

Das *dritte Moment* m_3 dient hauptsächlich zur Charakterisierung der Asymmetrie von $w(X)$. Als «*Mass der Schiefe*» definieren wir den Ausdruck $\varrho = m_3/m_2^{\frac{3}{2}}$. Bei völliger Symmetrie von $w(X)$ bezüglich der Mittelordinate nimmt das Mass der Schiefe den Wert Null an. Bei asymmetrischen Verteilungen ergibt sich ein positiver oder negativer Wert, je nachdem die Werte rechts oder links vom Mittelpunkt dominieren.

Aus m_4 und m_2 berechnet man den Exzess von $w(X)$: $\varepsilon = m_4/m_2^2 - 3$. Positiver Exzess liegt vor, wenn in der Verlustfunktion grössere Abweichungen vom Mittelwert stärker, kleinere Abweichungen schwächer vertreten sind als bei der Gaußschen Verteilung.

B. Die Summenverlustfunktion.

Summenverlustfunktion nennen wir die Funktion

$$W(X) = \sum_{X=-\infty}^{X} w(X) \quad \text{oder} \quad W(X) = \int_{-\infty}^{X} w(X)\, dX\,.$$

$W(X)$ ist die Wahrscheinlichkeit, mit welcher die Versicherungseinrichtung alle Verluste erwarten muss, die kleiner oder höchstens gleich X sind.

Bei diskontinuierlicher Berechnung ist $W(X)$ eine Treppenkurve, bei kontinuierlicher Berechnung eine monoton von 0 bis 1 ansteigende Kurve.

Mit Hilfe der Potenzmomente gerader Ordnung können die Werte der Summenverlustfunktion für beliebige Verlustfunktionen abgeschätzt werden. Für näherungsweise Rechnungen dürfte oft folgende Ungleichung genügen[7]):

$$W\left(\lambda \sqrt{m_2}\right) \geqslant 1 - \frac{m_k}{\left(\lambda \sqrt{m_2}\right)^k}$$

(Pearsonsche Erweiterung der Markoff-Tschebycheffschen Ungleichung.)

Dieser Ansatz kann, wie Birger Meidell gezeigt hat, für Verlustfunktionen, die nur einen Maximalwert aufweisen, durch die folgende Ungleichung verschärft werden [8]):

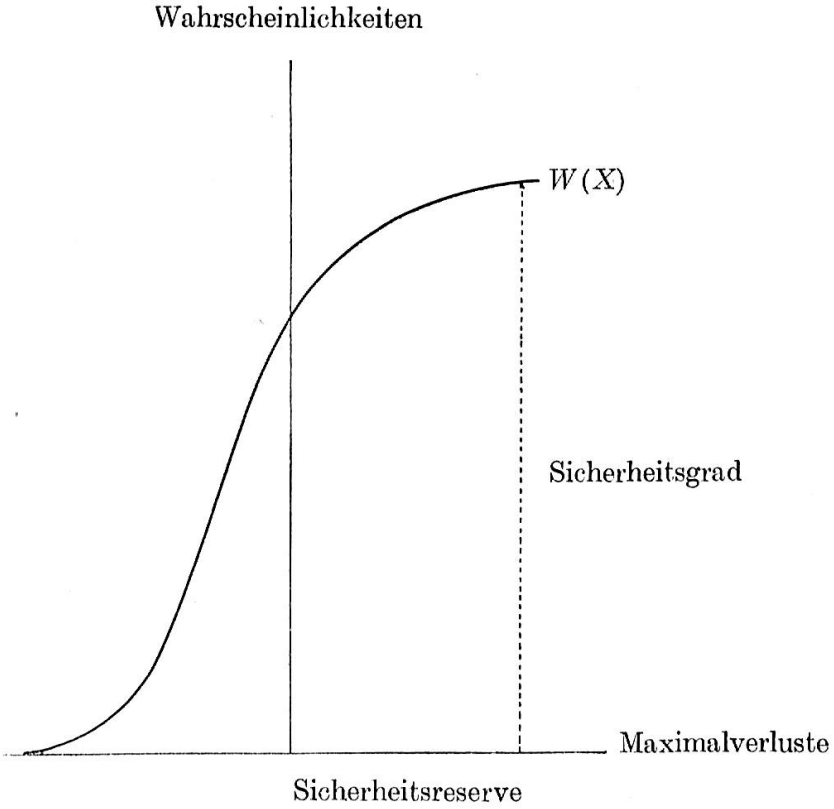
$$W\left(\lambda \sqrt{m_2}\right) \geqslant 1 - \frac{m_k}{\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right) \lambda \sqrt{m_2}\right]^k}$$

In dieser Formel wird überdies vorausgesetzt, dass dem Verlust Null die grösste Wahrscheinlichkeit zukommt.

C. Sicherheitsgrad und Sicherheitsreserve.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die verfügbaren Kassenmittel zur Deckung der Versicherungsverpflichtungen ausreichen, nennen wir inskünftig Sicherheitsgrad der Kasse. Den Sicherheitsgrad einer Kasse, die neben dem erforderlichen Deckungskapital über einen Sicherheitsfonds X verfügt, entnehmen wir ohne weiteres der Summenverlustfunktion $W(X)$ (siehe Figur).

Wie hoch muss der Sicherheitsgrad sein, damit von einem genügenden Risikoausgleich die Rede sein kann? Die absolute Sicherheit wird man von einer Versicherungseinrichtung nicht verlangen wollen, sonst würde die Einrichtung ihren Charakter als Versicherung überhaupt verlieren. Man wird jedoch nur dann von einer genügenden Sicherheit sprechen, wenn Verluste nur so selten zu erwarten sind, dass sie praktisch überhaupt nicht vorkommen. Die Wahl des nötigen Sicherheitsgrades ist im übrigen weitgehend dem freien Ermessen an-



heimgestellt. In unseren nachfolgend angeführten Beispielen haben wir immer einen Sicherheitsgrad von 999 $^0/_{00}$ vorausgesetzt.

D. Jährliche Sicherheitszuschläge.

Wird die Sicherheitsreserve für ein Versicherungsjahr bestimmt, so ist sie mit dem jährlichen Sicherheitszuschlag identisch. Ist sie jedoch für eine Dauer von t Jahren berechnet worden, so finden wir den jährlichen Sicherheitszuschlag aus der Sicherheitsreserve nach der Formel

$$\text{Jährlicher Sicherheitszuschlag} = \frac{\text{Sicherheitsreserve für } t \text{ Jahre}}{a_{\overline{t}|}}.$$

E. Die Wahl der Ausgleichsdauer.

Theoretisch betrachtet könnten wir eine unendlich lange Ausgleichsdauer annehmen, d. h. eine ewige Sicherheitsreserve bestimmen. Der Sicherheitsgrad für eine einzelne Rechnungsperiode wäre jedoch

in diesem Falle beträchtlich kleiner als der bei der Berechnung der ewigen Sicherheitsreserve vorausgesetzte. Erleidet eine Kasse in einer Rechnungsperiode einen Verlust, so werden sich die verantwortlichen Kassenorgane kaum darauf verlassen wollen, dass die erlittenen Verluste durch die künftig zu erwartenden Gewinne wieder gedeckt werden können. Denken wir ferner an die im Laufe der Zeit auftretenden wesentlichen Veränderungen des Risikoverlaufes, so müssen wir unbedingt verlangen, dass der Risikoausgleich innerhalb einer jeden Rechnungsperiode gewährleistet ist. Pensions- und Sterbekassen werden etwa alle fünf Jahre versicherungstechnisch begutachtet. Wir haben daher in unseren Berechnungen immer eine fünfjährige Ausgleichsdauer vorausgesetzt.

II. Die Berechnung der Summenverlustfunktion für einen Versicherungsbestand.

A. Die Verlustfunktion für eine einzelne Versicherung.

Die folgenden Beispiele zeigen, wie sich die Verlustfunktion für eine einzelne Versicherung angeben lässt:

α) Die Verlustfunktion einer gemischten Versicherung für die ganze Versicherungsdauer:

Die gemischte Versicherung mit der Versicherungssumme C und der Versicherungsdauer n sei gegen eine Prämie P und eine Einmaleinlage E abgeschlossen worden. Stirbt der Versicherte im t^{ten} Versicherungsjahr, so entsteht für die Versicherungseinrichtung ein Verlust von

$$X_t = v^t C - a_{\overline{t}|} P - E \quad (t \leqslant n)$$

Erlebt jedoch der Versicherte das Ende der Versicherungsdauer, so hat die Versicherungseinrichtung einen Verlust von

$$X_{n+1} = v^n C - a_{\overline{n}|} P - E$$

zu decken. Diesen Möglichkeiten entsprechen die Wahrscheinlichkeiten

$$w(X_t) = \frac{d_{x+t}}{l_x} \quad \text{und} \quad w(X_{n+1}) = \frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

β) Alters- und Invalidenrentenversicherung:

Die Verlustfunktion für das erste Versicherungsjahr einer Alters- und Invalidenrentenversicherung, die gegen eine Prämie P und eine Einlage E abgeschlossen ist, finden wir aus folgenden Formeln:

$$w\,(-\mathrm{a}_{\overline{1}|}P - E) = q_x^{aa}$$

$$w\,(v_1\,V_x^J - \mathrm{a}_{\overline{1}|}P - E) = i_x^{(e)}$$

$$w\,(v_1\,V_x^A - \mathrm{a}_{\overline{1}|}P - E) = p_x^{aa}$$

In diesen Formeln bedeuten ${}_1V_x^J$ die Reserve nach einem Jahr, wenn der Versicherte invalid wird, und ${}_1V_x^A$ die Reserve nach einem Jahr, wenn der Versicherte aktiv bleibt.

B. Die Bestandesverlustfunktion.

Die Verlustfunktion für einen ganzen Versicherungsbestand nennen wir Bestandesverlustfunktion.

Im folgenden setzen wir immer voraus, dass die verwendeten Wahrscheinlichkeiten unabhängig sind von der Art und der Höhe der Versicherungsleistungen und dass die einzelnen versicherten Objekte im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung voneinander unabhängig sind. Wenn diese Voraussetzungen in gewissen Fällen nicht streng erfüllt sind, so handelt es sich um systematische oder wesentliche Abweichungen, die wir — wie wir eingangs betont haben — nicht berücksichtigen.

Die Bestandesverlustfunktion $w_{1,2}(X)$ für einen Versicherungsbestand von zwei Versicherungen, deren einzelne Verlustfunktionen wir mit $w_1(X)$ und $w_2(X)$ bezeichnen, findet man nach folgender Formel [2]):

$$w_{1,2}(X) = \sum_{x=-\infty}^{X} w_1(X-x)\,w_2(x) \qquad (1\,a)$$

Die Bestandesverlustfunktion für den ganzen Versicherungsbestand von i Versicherungen entsteht somit nach der Rekursionsformel

$$w_{1,2,3\ldots i}(X) = \sum_{x=-\infty}^{X} w_{1,2,3\ldots(i-1)}(X-x)\,w_i(x) \qquad (1\,b)$$

Diese Rekursionsformel vermittelt uns bereits eine gute Vorstellung vom Aufbau der Bestandesverlustfunktion. Für die praktische Rechnung ist die Formel jedoch nicht brauchbar, indem selbst bei kleinen Versicherungsbeständen die Rechnung einen schwer zu bewältigenden Umfang annehmen würde.

Für die Berechnung der Sicherheitsreserven benötigen wir das von $-\infty$ bis X gezogene Integral der Bestandesverlustfunktion, das wir als Summenverlustfunktion für den Versicherungsbestand bezeichnet haben. Es empfiehlt sich, die im folgenden näher begründeten Umformungen und Vereinfachungen unmittelbar für die Summenverlustfunktion

$$W(X) = \sum_{X=-\infty}^{X} w_{1,2,3\ldots i}(X) \tag{2}$$

vorzunehmen.

C. Die Entwicklung der Summenverlustfunktion in eine Brunssche Reihe [1]).

Mit Hilfe der von Bruns eingeführten Reihenentwicklung kann die Summenfunktion $W(X)$ einer beliebigen Verteilungsfunktion $w(X)$ als unendliche Reihe dargestellt werden. Dabei müssen allerdings gewisse Bedingungen erfüllt sein, die jedoch in den für unsere Aufgabe auftretenden Fällen stets erfüllt sind *). Das erste Glied der Brunsschen Reihe wird durch

$$\Phi(X) = \int_{-\infty}^{X} \varphi(X)\, dX = \int_{-\infty}^{X} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2}\, dX$$

das Integral der Gaußschen Funktion dargestellt. Die folgenden Glieder werden durch die mit gewissen Koeffizienten multiplizierte Gaußsche Funktion und ihre Differentialquotienten gebildet; es gilt also folgende allgemeine Darstellung für eine Summenfunktion:

$$W(X) = \Phi(X) + c_0\, \varphi(X) + c_1\, \varphi'(X) \ldots \tag{2a}$$

Einige Werte für die Funktionen Φ, φ'', φ''' und $\varphi^{(4)}$ sind in der Tabelle auf Seite 181 zusammengestellt.

*) [1]) Seiten 254/255.

Die Ableitungen der Gaußschen Funktion haben die Form

$$\varphi^{(k)}(X) = p_k(X)\,\varphi(X)$$

wo p_k ein Polynom k^{ten} Grades ist, das mit Hilfe der Rekursionsformel

$$p_{k+1}(X) = -2X\,p_k(X) + p_k'(X)$$

berechnet werden kann.

Ist die zu entwickelnde Summenfunktion eine Treppenlinie, so ergeben sich besonders einfache Formeln für die Koeffizienten der Brunsschen Reihe. Der Koeffizient c_k der k^{ten} Ableitung der Gaußschen Funktion ist dann nämlich

$$c_k = \frac{1}{2^{k+1}(k+1)!}\sum_{X=-\infty}^{+\infty} w(X)\,p_{k+1}(X), \tag{3}$$

wo $w(X)$ die Verteilungsfunktion ist, aus der die Summenfunktion $W(X)$ hervorgegangen ist. Ersetzen wir die Variable X durch ξ, die mit X durch die Gleichung

$$\xi = \frac{X - M_1}{\sqrt{2M_2}} \tag{4}$$

verbunden ist, so erreichen wir, dass die Glieder $c_0\,\varphi(\xi)$ und $c_1\,\varphi'(\xi)$ der Brunsschen Reihe verschwinden. Die in der Substitution (4) auftretenden Grössen M_1 und M_2 sind die beiden ersten Momente von $w(X)$. Die übrigbleibende Reihe

$$W(\xi) = \Phi(\xi) + c_2\,\varphi''(\xi) + c_3\,\varphi'''(\xi)\ldots \tag{2b}$$

nennt man die normale Entwicklung der Brunsschen Reihe. Ist $W(\xi)$ mit $\Phi(\xi)$ identisch, so verschwinden alle Koeffizienten c_k der normalen Entwicklung der Brunsschen Reihe. Die in der normalen Entwicklung der Brunsschen Reihe im zweiten und den folgenden Gliedern auftretenden Koeffizienten charakterisieren also die Abweichung der dargestellten Funktion $W(\xi)$ von $\Phi(\xi)$. Diese Koeffizienten c_k lassen sich durch die Momente der Verteilungsfunktion $w(X)$, aus der die zu entwickelnde Summenfunktion $W(X)$ hervorgegangen ist, ausdrücken. Im besonderen enthalten die Koeffizienten c_2 und c_3, wie aus den nachstehenden Formeln hervorgeht,

die Masse für die Schiefe und den Exzess von $w(X)$. Sind M_k die Momente von $w(X)$, so lassen sich die Koeffizienten der normalen Entwicklung der Brunsschen Reihe unter Berücksichtigung der Substitution (4) wie folgt ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}
c_0 &= 0 \\
c_1 &= 0 \\
c_2 &= \frac{1}{3!\,(\sqrt{2})^3}\left[-\frac{M_3}{(\sqrt{M_2})^3}\right] \\
c_3 &= \frac{1}{4!\,(\sqrt{2})^4}\left[\frac{M_4}{(M_2)^2}-3\right] \\
c_4 &= \frac{1}{5!\,(\sqrt{2})^5}\left[-\frac{M_5}{(\sqrt{M_2})^5}+10\,\frac{M_3}{(\sqrt{M_2})^3}\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (3\,a)$$

usw.

Da die Verlustfunktion für eine einzelne Versicherung und die Bestandesverlustfunktion nur spezielle Arten von Verteilungsfunktionen sind, so können die zugehörigen Summenverlustfunktionen in Brunssche Reihen entwickelt werden. Die Summenverlustfunktion für eine einzelne Versicherung könnten wir ohne weiteres als Brunssche Reihe darstellen, da uns die Momente der zugehörigen Verlustfunktion bekannt sind. Um die Summenverlustfunktion für einen ganzen Versicherungsbestand in eine Brunssche Reihe entwickeln zu können, müssen wir noch angeben, wie die Momente der zugehörigen Bestandesverlustfunktion berechnet werden können.

D. Die Berechnung der Momente der Bestandesverlustfunktion.

Für die nachfolgenden Ableitungen erweist es sich als nützlich, das Polynom [1])

$$f(z) = \sum_{X=-\infty}^{+\infty} w_i\,(X)\,e^{zX}$$

als erzeugende Funktion der Verlustfunktion $w_i(X)$ einzuführen. Multiplizieren wir die erzeugenden Funktionen der Verlustfunktionen $w_1(X)$ und $w_2(X)$ von zwei einzelnen Versicherungen miteinander, so finden wir:

$$f_1(z) \cdot f_2(z) = \left[\sum_{X=-\infty}^{+\infty} w_1(X)\, e^{zX}\right] \left[\sum_{X=-\infty}^{+\infty} w_2(X)\, e^{zX}\right]$$

$$= \sum_{X=-\infty}^{+\infty} e^{zX} \sum_{X=X_1+X_2} w_1(X_1)\, w_2(X_2)$$

$$= \sum_{X=-\infty}^{+\infty} e^{zX} \sum_{x=-\infty}^{X} w_1(X-x)\, w_2(x)$$

Beachten wir die Formel (1 *a*) für die Bestandesverlustfunktion von zwei Versicherungen, so erkennen wir, dass das Produkt der erzeugenden Funktionen von zwei Verlustfunktionen $w_1(X)$ und $w_2(X)$ gleich der erzeugenden Funktion ihrer Bestandesverlustfunktion $w_{1,2}(X)$ ist. Durch fortgesetzte Wiederholung dieses Verfahrens finden wir, dass ganz allgemein die erzeugende Funktion der Bestandesverlustfunktion gleich dem Produkt der einzelnen erzeugenden Funktionen ist.

Diese Eigenschaft der erzeugenden Funktion ermöglicht es uns, die Beziehungen zwischen den Momenten der einzelnen Verlustfunktionen und denjenigen der Bestandesverlustfunktion herzuleiten. Zu diesem Zwecke bestimmen wir die k^{ten} Ableitungen nach z der erzeugenden Funktion $f(z)$:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{X=-\infty}^{+\infty} w(X)\, e^{zX}\, X^k$$

Für $z = 0$ stellt der Ausdruck rechts das k^{te} Moment von $w(X)$ dar:

$$f^{(k)}(0) = \sum_{X=-\infty}^{+\infty} w(X)\, X^k$$

Die k^{te} Ableitung eines Produktes von zwei Funktionen $f_1 \cdot f_2$ lässt sich nach folgender Formel durch die Ableitungen $f_i^{(k)}$ der beiden einzelnen Funktionen darstellen:

$$(f_1 \cdot f_2)^{(k)} = \sum_{t=0}^{k} \binom{k}{t} f_1^{(t)} \cdot f_2^{(k-t)}$$

Da die erzeugende Funktion der Bestandesverlustfunktion gleich dem Produkt der einzelnen erzeugenden Funktionen ist, da ferner die Ableitungen $f^{(k)}(z)$ für $z = 0$ in die Momente m_k der Verlustfunktion für eine Versicherung übergehen und da schliesslich stets $m_0 = 1$ und $m_1 = 0$ ist, ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den Momenten der einzelnen Verlustfunktionen m_k und den Momenten M_k der Bestandesverlustfunktion:

$$\left.\begin{aligned}
M_0 &= \Pi\, m_0 = 1 \\
M_1 &= \Sigma\, m_1 = 0 \\
M_2 &= \Sigma\, m_2 \\
M_3 &= \Sigma\, m_3 \\
M_4 &= \Sigma\, m_4 + 3\,(\Sigma\, m_2)^2 - 3\,\Sigma\,(m_2)^2 \\
M_5 &= \Sigma\, m_5 + 10\,\Sigma\, m_2\,\Sigma\, m_3 - 10\,\Sigma\, m_2\, m_3
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Die Momente der Bestandesverlustfunktion lassen sich also in einfacher Weise aus den Momenten der einzelnen Verlustfunktionen berechnen.

E. Zusammenfassung.

Als Ausgangspunkte für die Berechnung der Summenverlustfunktion eines Versicherungsbestandes können somit die Momente der Verlustfunktionen für die einzelnen Versicherungen des Bestandes dienen. Daraus lassen sich die Momente der Bestandesverlustfunktion nach den Formeln (5) bestimmen. Mit Hilfe der Momente der Bestandesverlustfunktion finden wir endlich unter Benützung der Formeln (3 *a*) die Koeffizienten der Brunsschen Reihe. Die Brunssche Reihe (2 *b*) stellt die gesuchte Summenverlustfunktion für den ganzen Versicherungsbestand dar. Praktisch genügen in vielen Fällen wenige Glieder, um ein befriedigendes Resultat zu gewinnen, so dass nur die ersten vier bis fünf Momente der Verlustfunktion für die einzelnen Versicherungen benötigt werden.

III. Die Abhängigkeit der Summenverlustfunktion vom Umfang des Versicherungsbestandes.

Wollen wir die Summenverlustfunktion für eine ganze Reihe von Versicherungsbeständen mit verschieden grossem Umfang, aber mit gleicher Bestandeszusammensetzung bestimmen, so kann die Rechenarbeit noch weiter vereinfacht werden. Zu diesem Zwecke führen wir die Durchschnittsmomente der Bestandesverlustfunktion

$$\overline{M}_k = \frac{\Sigma\, m_k}{n}$$

ein; dabei bedeutet n die Anzahl der Versicherungen. Neben diesen einfachen Durchschnittsmomenten benützen wir noch kombinierte Durchschnittsmomente wie

$$\overline{M}_{2,2} = \frac{\Sigma\, (m_2)^2}{n} \quad \text{und}$$

$$\overline{M}_{2,3} = \frac{\Sigma\, m_2\, m_3}{n}$$

Die Koeffizienten der Brunsschen Reihe lassen sich unter Verwendung dieser Durchschnittsmomente unter Berücksichtigung der Anzahl n der Versicherungen wie folgt ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{1}{3!\,(\sqrt{2})^3}\,\frac{\overline{M}_3}{(\sqrt{\overline{M}_2})^3}\,n^{-\frac{1}{2}} \\
c_3 &= \frac{1}{4!\,(\sqrt{2})^4}\,\frac{\overline{M}_4 - 3\,\overline{M}_{2,2}}{(\sqrt{\overline{M}_2})^4}\,n^{-1} \\
c_4 &= -\frac{1}{5!\,(\sqrt{2})^5}\,\frac{\overline{M}_5 - 10\,\overline{M}_{2,3}}{(\sqrt{\overline{M}_2})^5}\,n^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}\right\} \qquad (3\,b)$$

usw.

Wie wir bereits unter Abschnitt II C festgestellt haben, charakterisieren die Koeffizienten c_2, c_3, usw. der normalen Entwicklung der Brunsschen Reihe die Verschiedenheit der Bestandesverlustfunktion von der Gaußschen Normalverteilung. Je kleiner diese Koeffizienten ausfallen, desto mehr nähert sich die Bestandesverlustfunktion der Gaußschen Normalverteilung. Aus den Formeln (3 *b*) geht hervor, dass sich die Bestandesverlustfunktion mit wachsendem Versicherungsbestand mehr und mehr der Gaußschen Verteilung nähert. Wird die Anzahl der Versicherten unendlich gross, so verschwinden sämtliche Koeffizienten der normalen Entwicklung, und die Bestandesverlustfunktion geht in den Grenzfall der Gaußschen Normalverteilung über.

In der Risikotheorie [2]) pflegt man als Bestandesverlustfunktion die Gaußsche Normalverteilung

$$w(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X}{\sigma}\right)^2}$$

anzunehmen. In diesem besonderen Fall ist die Verlustfunktion durch das mittlere Risiko σ vollständig bestimmt, so dass durch diese Grösse allein die Stabilität eines Versicherungsbestandes gemessen werden kann. Die von der Annahme einer Gaußschen Verteilung ausgehenden Betrachtungen richten sich daher auf die Eigenschaften und die Methoden zur Berechnung des mittleren Risikos, das mit der Quadratwurzel aus der Streuung M_2 der Verlustfunktion identisch ist.

Die aus dieser speziellen Annahme abgeleiteten Ergebnisse gelten streng genommen nur für umfangreiche Versicherungsbestände, weil nur für diese — wie aus den Formeln (3 *b*) hervorgeht — die Verlustfunktion mit genügender Annäherung durch eine Gaußsche Verteilung dargestellt werden kann. Aber gerade bei grossen Versicherungsbeständen tritt die Bedeutung des Zufallsrisikos zurück, wie die im Abschnitt VI angeführten Beispiele zeigen.

IV. Die Abhängigkeit der Summenverlustfunktion von der Ausgleichsdauer.

Soll die Summenverlustfunktion nicht nur für ein Versicherungsjahr, sondern für eine Zeitspanne von t Jahren berechnet werden, so wird die Momentenberechnung umständlich und zeitraubend. Ist

nicht mit wesentlichen Strukturveränderungen zu rechnen, so kann vereinfacht angenommen werden, dass die Anzahl der Versicherungen der Versicherungseinrichtung konstant bleibt (offene Kasse), wodurch die Rechnung wesentlich erleichtert wird. Die Momente ${}^{(t)}\overline{M}_k$ der Bestandesverlustfunktion für t Versicherungsjahre können nämlich wie folgt aus den Momenten ${}^{(1)}\overline{M}_k$ der Bestandesverlustfunktion für ein Versicherungsjahr berechnet werden:

$$ {}^{(t)}\overline{M}_k = {}^{(1)}\overline{M}_k \, \mathrm{a}_{\overline{t}|}^{(k)}, \quad \text{wobei} \quad \mathrm{a}_{\overline{t}|}^{(k)} = \sum_{t=0}^{t-1} v^{tk} \quad \text{ist.} $$

Die Formeln für die Koeffizienten ${}^{(t)}c_k$ der normalen Entwicklung der Summenverlustfunktion ${}^{(t)}W(\xi)$ für t Versicherungsjahre können dann aus den für ${}^{(1)}W(\xi)$ geltenden Koeffizienten ${}^{(1)}c_k$ ermittelt werden:

$$ \left.\begin{aligned} {}^{(t)}c_2 &= {}^{(1)}c_2 \frac{\mathrm{a}_{\overline{t}|}^{(3)}}{\left(\sqrt{\mathrm{a}_{\overline{t}|}^{(2)}}\right)^3} \\ {}^{(t)}c_3 &= {}^{(1)}c_3 \frac{\mathrm{a}_{\overline{t}|}^{(4)}}{\left(\sqrt{\mathrm{a}_{\overline{t}|}^{(2)}}\right)^4} \\ {}^{(t)}c_4 &= {}^{(1)}c_4 \frac{\mathrm{a}_{\overline{t}|}^{(5)}}{\left(\sqrt{\mathrm{a}_{\overline{t}|}^{(2)}}\right)^5} \end{aligned}\right\} \qquad (3\,c) $$

usw.

Eine Ausdehnung der Ausgleichsdauer t übt somit einen ähnlichen Einfluss auf die Form der Summenverlustfunktion aus wie eine entsprechende Vermehrung der Anzahl n der Versicherungen. Da jedoch die Quotienten

$$ \frac{\mathrm{a}_{\overline{t}|}^{(k)}}{\left(\sqrt{\mathrm{a}_{\overline{t}|}^{(2)}}\right)^k} $$

mit wachsendem t nicht gegen Null, sondern gegen den Grenzwert

$$ \frac{(1 - v^2)^{\frac{k}{2}}}{1 - v^k} $$

streben, so konvergiert die Summenverlustfunktion mit wachsendem t nicht gegen die Summenfunktion der Gaußschen Normalverteilung

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi$$

V. Die Berechnung der Sicherheitsreserve für einen Versicherungsbestand.

Nachdem wir die Summenverlustfunktion $W(\xi)$ für einen Versicherungsbestand in eine Brunssche Reihe entwickelt haben, können wir den dem gewünschten Sicherheitsgrad entsprechenden Maximalverlust ξ berechnen. Für die praktische Rechnung wird man wohl am einfachsten unter Benützung der beiliegenden Tabelle zwei aufeinanderfolgende Argumentwerte ξ_1 und ξ_2 bestimmen, die der Bedingung

$$W(\xi_1) \leqslant S \leqslant W(\xi_2)$$

genügen, wobei wir mit S den gewünschten Sicherheitsgrad bezeichnen. Den gesuchten Maximalverlust ξ finden wir dann nach der Regula falsi mit genügender Annäherung zu

$$\xi = \frac{\xi_1 [W(\xi_2) - S] - \xi_2 [W(\xi_1) - S]}{W(\xi_2) - W(\xi_1)}$$

Die Sicherheitsreserve SR erhalten wir endlich nach der Formel

$$\underline{SR = \xi \sqrt{2 M_2}}$$

VI. Praktische Anwendungen.

A. Die Summenverlustfunktion für einen Bestand von gleichartigen Risikoversicherungen.

Wir suchen die Summenverlustfunktion für einen Bestand von 1000 gleichartigen Risikoversicherungen. Im Schadenfalle, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,01 erwartet wird, ist die Auszahlung

einer Summe von 100 vorgesehen; es ist somit eine Prämie von 0,01 . 100 = 1 für jede einzelne Versicherung erforderlich.

Die Bestandesverlustfunktion kann in diesem einfachen Fall nach der Bernoullischen Formel

$$w(X) = \binom{1000}{0{,}01\,X + 10} 0{,}01^{(0{,}01\,X + 10)} \cdot 0{,}99^{(1000 - 0{,}01\,X - 10)}$$

ermittelt werden. Die zugehörige Summenverlustfunktion $W(X)$ lautet also

$$W(X) = \sum_{X=-1000}^{X} \binom{1000}{0{,}01\,X + 10} 0{,}01^{(0{,}01\,X + 10)} \cdot 0{,}99^{(1000 - 0{,}01\,X - 10)}$$

$W(X)$ für einen Bestand von 1000 Risikoversicherungen.

X	ξ	$\Phi(\xi)$	$c_2\varphi''(\xi)$	$c_3\varphi'''(\xi)$	$c_4\varphi^{(4)}(\xi)$	$W(X)$ nach Bruns	$W(X)$ nach Bernoulli
		Alle Werte sind mit 10^4 multipliziert					
— 950	— 2,13	13	— 25	+ 3	— 0	— 9	0
— 850	— 1,91	35	— 34	+ 5	— 0	+ 6	5
— 750	— 1,69	84	— 56	+ 6	— 0	34	27
— 650	— 1,46	195	— 80	+ 5	+ 0	120	101
— 550	— 1,24	397	— 92	+ 0	+ 1	306	287
— 450	— 1,01	766	— 77	— 8	+ 2	683	661
— 350	— 0,79	1319	— 27	— 17	+ 1	1276	1289
— 250	— 0,56	2142	+ 57	— 21	0	2178	2189
— 150	— 0,34	3153	+ 141	— 19	— 1	3274	3317
— 50	— 0,11	4382	+ 199	— 7	— 3	4571	4573
+ 50	+ 0,11	5618	+ 199	+ 7	— 3	5821	5831
+ 150	+ 0,34	6847	+ 141	+ 19	— 1	7006	6974
+ 250	+ 0,56	7858	+ 57	+ 21	0	7936	7925
+ 350	+ 0,79	8681	— 27	+ 17	+ 1	8672	8656
+ 450	+ 1,01	9234	— 77	+ 8	+ 2	9167	9176
+ 550	+ 1,24	9603	— 92	0	+ 1	9512	9521
+ 650	+ 1,46	9805	— 80	— 5	+ 0	9720	9736
+ 750	+ 1,69	9916	— 56	— 6	— 0	9854	9862
+ 850	+ 1,91	9965	— 34	— 5	— 0	9926	9931
+ 950	+ 2,13	9987	— 25	— 3	— 0	9959	9967
+ 1050	+ 2,36	9996	— 8	— 2	— 0	9986	9985
+ 1150	+ 2,58	9999	— 3	— 1	0	9995	9994

Mit Hilfe der Brunsschen Reihe erhalten wir dagegen

$$W(\xi) = \Phi(\xi) - 0{,}018\,353\,\varphi''(\xi) + 0{,}000\,990\,\varphi'''(\xi) - 0{,}000\,041\,\varphi^{(4)}(\xi) \ldots,$$

wobei $\xi = 0{,}002\,247\,X$ ist. Der Verlauf von $W(X)$ nach den beiden genannten Formeln ist aus der vorhergehenden Tabelle ersichtlich.

Die Bernoullischen Werte bilden eine Treppenkurve. Der angeschriebene Wert von X ist jeweils die mittlere Abszisse eines horizontalen Kurvenstückes. Die mit Hilfe der ersten Glieder der Brunsschen Reihenentwicklung berechneten Werte bilden dagegen eine stetige Kurve. Abgesehen von den Schnittpunkten der beiden Kurven, die im übrigen nicht genau in der Mitte der horizontalen Stücke der Treppenkurve liegen, liefern daher die beiden Formeln im allgemeinen zu einem gegebenen Wert von X etwas verschiedene Werte von $W(X)$ (vergleiche hiezu die gegenüberstehende graphische Darstellung).

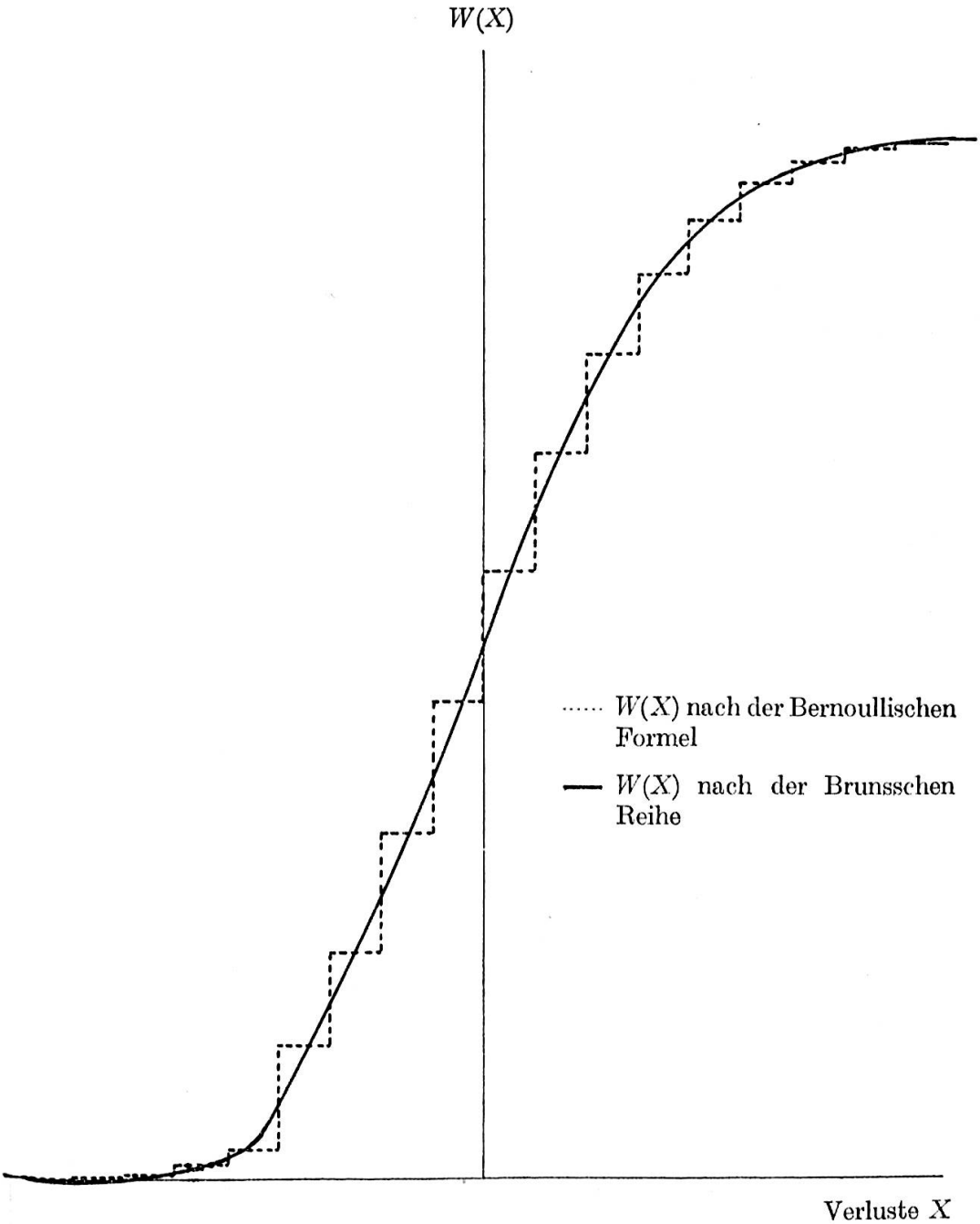
In der Regel wird die Risikosumme nicht einheitlich wie im gewählten Beispiel, sondern verschieden gross. In diesem letzteren, allgemeinen Fall ergeben sich noch kleinere Unterschiede zwischen der effektiven Summenverlustfunktion (Treppenkurve) und der nach Bruns berechneten Funktion.

Wie dieses und weiter folgende Beispiele zeigen, konvergiert die Brunssche Reihe in der Regel stark genug, so dass nur zwei bis drei Glieder berechnet werden müssen. Wenn jedoch die Verlustfunktion eine beträchtliche Schiefe aufweist, wird die Konvergenz schwach, so dass weitere Glieder berücksichtigt werden müssen. Um in solchen Fällen die Berechnung der höheren Momente zu vermeiden, empfiehlt es sich, die Verlustfunktion näherungsweise durch Typ IV der Pearsonschen Verteilungskurven darzustellen. Die in der Gleichung

$$w(X) = w(0)\,\frac{e^{-\nu\,\mathrm{arctg}\frac{X}{c}}}{\left(1 + \frac{X^2}{c^2}\right)^m}$$

auftretenden Parameter lassen sich durch die vier ersten Momente von $w(X)$ ausdrücken. Für weitere Einzelheiten verweisen wir auf das Buch von W. P. Elderton [6]), das eine eingehende Darstellung der Pearsonschen Verteilungskurven enthält.

Bei einem Sicherheitsgrad von 999 ‰ ist für den betrachteten Versicherungsbestand eine Sicherheitsreserve von Fr. 1100 oder 110 % der gesamten Prämieneinnahme von Fr. 1000 erforderlich.



B. Das Zufallsrisiko bei einer Sterbekasse.

Die Aufstellung der Verlustfunktion für Sterbekassen ist sehr einfach. Wir benützen daher dieses Beispiel, um die Auswirkungen verschiedener Bestandesstrukturen und Finanzierungen auf die Höhe des Sicherheitszuschlages zu untersuchen.

Die betrachteten Sterbekassen gewähren ihren Versicherten eine lebenslängliche Todesfallversicherung mit einheitlich festgesetzter

Todesfallsumme. Soweit für die Finanzierung jährliche Prämien vorgesehen sind, werden diese jeweils nur von den Versicherten aufgebracht, welche das Alter 65 noch nicht erreicht haben.

Wir berücksichtigen folgende Versicherungsbestände:

Bestand I umfasst nur Versicherte im Alter von 30—58 Jahren.
Bestand II umfasst Versicherte im Alter von 30—86 Jahren.
Bestand III umfasst Versicherte im Alter von 58—86 Jahren.

Die einzelnen Altersklassen sind in allen Beständen ungefähr proportional den l_x der Tafel TMG besetzt. Wir betrachten also nacheinander einen «jungen», einen «normalen» und einen «überalterten» Bestand.

Die von den Versicherten aufzubringenden jährlichen Prämien sind wie folgt festgesetzt:

Finanzierung A: Die Versicherten zahlen die individuelle Prämie, welche dem am Bilanztag erreichten Alter als Eintrittsalter entspricht.

Finanzierung B: Die Versicherten zahlen die dem Eintrittsalter 30 entsprechende Prämie von 15,74 ‰ der Todesfallsumme.

Finanzierung C: Sämtliche Versicherungen sind prämienfrei.

In allen drei Fällen sei das nach den Grundlagen TMG 3 % erforderliche Deckungskapital vorhanden.

Die Finanzierungen A und C sind als extreme Fälle zu werten, während bei B eine normale Finanzierung vorliegt. In der folgenden Tabelle sind die sich für die erwähnten Bestände und Finanzierungen ergebenden Kassenmittel in ‰ der jeweiligen Gesamtversicherungssumme angegeben.

Finanzierung	A		B		C	
Bestand	ΣP	$\Sigma_t V_x$	ΣP	$\Sigma_t V_x$	ΣP	$\Sigma_t V_x$
	in ‰ der Gesamtversicherungssumme					
I	39	—	16	231	—	457
II	68	229	12	387	—	545
III	30	638	1	705	—	724

Die Verlustfunktion für lebenslängliche Todesfallversicherungen ist durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$w\,[v\,V_{x+1} - P - V_x] = p_x$$

$$w\,[v\,C - P - V_x] = q_x$$

Mit Hilfe dieser Verlustfunktion berechnen wir die Sicherheitsreserven für eine fünfjährige Ausgleichsdauer und die daraus abgeleiteten jährlichen Sicherheitszuschläge.

Jährlicher Sicherheitszuschlag in ‰ der Gesamtversicherungssumme.

Personenzahl	Bestand I			Bestand II			Bestand III		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C
50	18,5	13,1	9,5	17,2	12,6	9,9	15,9	11,3	10,7
100	12,6	8,9	6,4	11,6	8,6	6,8	10,8	7,8	7,4
200	8,6	6,1	4,4	7,9	5,8	4,6	7,4	5,4	5,1
500	5,2	3,7	2,7	4,8	3,6	3,8	4,5	3,3	3,2
1 000	3,6	2,5	1,8	3,3	2,5	2,0	3,1	2,3	2,2
10 000	1,1	0,8	0,6	1,0	0,8	0,6	1,0	0,7	0,7
100 000	0,3	0,2	0,2	0,3	0,2	0,2	0,3	0,2	0,2

Vergleichen wir die oben angegebenen Werte untereinander, so können wir folgendes feststellen:

a) Die Abhängigkeit des jährlichen Sicherheitszuschlages von der Art der Finanzierung der Kassenleistungen ist viel stärker ausgeprägt als die Abhängigkeit von der Altersstruktur des Versichertenbestandes. Berücksichtigen wir ferner, dass die Bestände I und III eine extreme Alterszusammensetzung aufweisen, so erscheint der Einfluss der Bestandesgliederung auf die Höhe des Sicherheitszuschlages als überraschend gering.

b) Je grösser das Deckungskapital einer Kasse ist, desto kleiner sind die erforderlichen Sicherheitszuschläge.

c) Für prämienpflichtige Versicherungen nimmt der erforderliche Sicherheitszuschlag mit zunehmendem Durchschnittsalter der Versicherten ab, weil die durchschnittliche Risikosumme gleichzeitig

stark abnimmt. Für prämienfreie Versicherungen hingegen nimmt der Sicherheitszuschlag mit zunehmendem Durchschnittsalter der Versicherten zu. Bei prämienfreien Versicherungen steigt nämlich die durchschnittliche Risikosumme mit wachsendem Durchschnittsalter der Versicherten verhältnismässig schwach, während anderseits gleichzeitig die zu erwartende Anzahl der Versicherungsfälle stark zunimmt.

In der Tabelle auf Seite 175 haben wir die Sicherheitszuschläge in $^0/_{00}$ der Gesamtversicherungssumme ausgedrückt. Diese Darstellung hat den Nachteil, dass ein Vergleich mit andern Versicherungsformen auf Schwierigkeiten stösst. Eine besser geeignete Masseinheit bietet daher die Summe der absoluten Beträge der jährlichen Risikoprämien. Diese Masseinheit ist allerdings im allgemeinen wenig anschaulich. Sind jedoch die jährlichen Sicherheitszuschläge für den gleichen Bestand, aber für verschiedene Versicherungsformen zu vergleichen, so gibt die jährliche Prämieneinnahme einen geeigneten und zugleich anschaulichen Maßstab, sofern die Prämien in beiden Fällen in ähnlicher Weise festgesetzt sind (z. B. dem gleichen Eintrittsalter entsprechen). Im folgenden nennen wir die mit der Summe der jährlichen Prämien gemessenen Sicherheitszuschläge relative Zuschläge. Für die Kasse II, B betragen die relativen jährlichen Sicherheitszuschläge:

Personenzahl	Jährlicher Sicherheitszuschlag in % der Gesamtprämie
50	109 %
100	74 %
200	50 %
500	31 %
1 000	21 %
10 000	6 %
100 000	2 %

Die Verlustfunktionen weisen bei Sterbekassen immer eine positive Schiefe auf. Mit zunehmender Personenzahl n nimmt die Schiefe mit $n^{-\frac{1}{2}}$ ab, und die Verlustfunktion nähert sich mehr und mehr der Gaußschen Verteilung. Diese Verhältnisse bringen es mit sich, dass bei

Sterbekassen die relativen Sicherheitsreserven und -zuschläge bei wachsendem n rascher abnehmen als das relative mittlere Risiko, das proportional der Grösse $n^{-\frac{1}{2}}$ sinkt.

C. Das Zufallsrisiko bei einer Rentenkasse.

Eine Pensionskasse richte an ihre Versicherten, die das Schlussalter 65 erreicht haben, lebenslänglich eine einheitlich festgesetzte, jährlich vorschüssig zahlbare Altersrente R aus. Die Verlustfunktion für die einzelnen Versicherungen ist durch die Ausdrücke

$$w(v V_{x+1} + R - V_x - P) = p_x$$

$$w(R - V_x - P) = q_x$$

gegeben. In der nachfolgenden Tabelle sind die relativen Sicherheitszuschläge für Bestände mit normaler Altersstruktur (Bestand II) angegeben. Die Versicherten zahlen die dem Eintrittsalter 30 entsprechende Prämie (Finanzierung B).

Personenzahl	Relative jährliche Sicherheitszuschläge
50	162 %
100	123 %
200	92 %
500	61 %
1 000	44 %
10 000	14 %
100 000	5 %

Es fällt auf, dass die Sicherheitszuschläge für eine Altersrentenversicherung höher ausfallen als für eine Sterbekasse mit gleicher Bestandeszusammensetzung und gleicher Art der Prämienbemessung. Diese Erscheinung lässt sich dadurch erklären, dass die Rentenversicherung ein völlig einseitiges Risiko deckt. Während bei Todesfallversicherungen die Differenz zwischen Todesfallsumme und Deckungskapital als Risikosumme auftritt, ist bei der Rentenversicherung

das Deckungskapital selbst als Risikosumme zu betrachten. Die Risikosumme ist aber bei den hauptsächlich ins Gewicht fallenden Versicherungen der älteren Versicherten bei der Rentenversicherung viel höher als bei der Todesfallversicherung, so dass die jährlichen Sicherheitszuschläge für die Rentenversicherung höher ausfallen als für die Todesfallversicherung.

Die Verlustfunktion weist bei Erlebensfallversicherungen immer eine negative Schiefe auf. Die relativen Sicherheitszuschläge nehmen daher mit wachsender Versichertenzahl für Erlebensfallversicherungen nicht so rasch ab wie das relative mittlere Risiko, das proportional der Grösse $n^{-\frac{1}{2}}$ sinkt.

D. Das Zufallsrisiko bei kombinierten Versicherungen.

α) Kombinationen von Todesfall- und Erlebensfallversicherungen.

Eine Versicherungskasse gewährt neben einer vom Schlussalter 65 an zahlbaren Altersrente eine Todesfallsumme in der Höhe von fünf Jahresrenten. Die Versicherten zahlen der Kasse die dem Eintrittsalter 30 entsprechende Prämie. In der folgenden Tabelle sind wiederum die relativen Sicherheitszuschläge für Versicherungsbestände mit normaler Altersverteilung zusammengestellt:

Personenzahl	Relative jährliche Sicherheitszuschläge
50	84 %
100	64 %
200	47 %
500	31 %
1 000	23 %
10 000	7 %
100 000	2 %

Die relativen Sicherheitszuschläge fallen in diesem Beispiel kleiner aus als die entsprechenden Zuschläge für die beiden Komponenten (vgl. Abschnitt VI B und C). Dieses Ergebnis ist durch den Umstand

bedingt, dass die Risikosummen der kombinierten Versicherungen durch Addition aus den Risikosummen der Komponenten entstehen. Da die Risikosummen der beiden Komponenten entgegengesetztes Vorzeichen aufweisen, fallen die Risikosummen der kombinierten Versicherungen verhältnismässig klein aus.

Das Erlebensfallrisiko herrscht im vorliegenden Fall vor. Die Verlustfunktion weist daher die typischen Eigenschaften der Verlustfunktionen von Erlebensfallversicherungen, insbesondere ihre negative Schiefe, auf.

Bei Kombinationen von Todesfall- und Erlebensfallversicherungen empfiehlt es sich nicht, nur eine der beiden Komponenten, etwa die Todesfallversicherung, in Rückdeckung zu geben. Durch eine derartige Massnahme würde die Sicherheit der Kasse vermindert.

β) Kombinationen von Lebens- und Invaliditätsversicherungen.

Handelt es sich um eine Kombination von Versicherungsleistungen, bei denen der Versicherungsfall für jede einzelne Komponente mit verschiedener Wahrscheinlichkeit erwartet wird, so gestaltet sich die Darstellung der Verlustfunktion nicht wie in dem unter α) betrachteten Fall. Die Verlustfunktion für die kombinierte Versicherung ist nämlich in gleicher Weise zu bilden wie die Bestandesverlustfunktion von verschiedenen Versicherungen aus den Verlustfunktionen der einzelnen Komponenten. Der Risikoausgleich verbessert sich daher bei zunehmender Anzahl der Komponenten in ähnlicher Weise wie bei einer entsprechenden Vermehrung des Versichertenbestandes. Es empfiehlt sich daher auch bei dieser Art von kombinierten Versicherungen im allgemeinen nicht, eine einzelne Komponente rückzuversichern.

Als Beispiel betrachten wir das Zufallsrisiko bei einer Pensionskasse, die einheitlich festgesetzte Alters-, Invaliden- und Witwenrenten versichert. (Witwenrente = 50 % der Alters- und Invalidenrente.) Die Aktiven zahlen einheitlich die dem Eintrittsalter 30 entsprechende Prämie. Für Bestände mit normaler Altersstruktur ergeben sich folgende relative Sicherheitszuschläge:

Personenzahl	Relative jährliche Sicherheitszuschläge
50	123 %
100	83 %
200	57 %
500	35 %
1 000	24 %
10 000	7 %
100 000	2 %

Die Bestandesverlustfunktion nimmt im vorliegenden Beispiel einen ähnlichen Verlauf wie bei einer Sterbekasse. Zufolge der positiven Schiefe der Bestandesverlustfunktion nehmen die relativen Sicherheitszuschläge mit wachsendem Versicherungsbestand rascher ab als die Grösse $n^{-\frac{1}{2}}$.

E. Zusammenfassung.

Die angeführten Beispiele dürften genügen, um einen Begriff von der Grössenordnung der Sicherheitszuschläge zu vermitteln, die zur Deckung des Zufallsrisikos erforderlich sind. Bei umfangreichen Versicherungsbeständen wären Zuschläge von 2 %—5 % der Prämien ausreichend. Es besteht daher keine dringende Notwendigkeit, bei grossen Versicherungsbeständen dem Zufallsrisiko bei der Prämienberechnung besonders Rechnung zu tragen.

Ganz anders verhält es sich aber bei kleinen Versicherungsbeständen. Zur Deckung der aus zufälligen Schwankungen möglicherweise erwachsenden Verluste sind Sicherheitszuschläge erforderlich, die unter Umständen die gleiche Grössenordnung aufweisen wie die Prämien selbst, die von der Versicherungseinrichtung zur Deckung des übernommenen Risikos erhoben werden müssen. Es ist daher ein dringendes Bedürfnis, bei der Prüfung der finanziellen Lage einer Versicherungseinrichtung mit kleinem Versicherungsbestand dem Zufallsrisiko Rechnung zu tragen und angemessene Sicherheitszuschläge in die Prämien einzurechnen.

Die Funktionen $\Phi(X)$, $\varphi''(X)$, $\varphi'''(X)$ und $\varphi^{(4)}(X)$

X	$\Phi(X)$	$\varphi''(X)$	$\varphi'''(X)$	$\varphi^{(4)}(X)$
0,0	0,500 00	— 1,128 38	0,000 00	6,770 28
0,1	0,556 23	— 1,094 81	0,665 82	6,435 69
0,2	0,611 35	— 0,997 40	1,266 27	5,477 92
0,3	0,664 31	— 0,845 63	1,744 89	4,026 87
0,4	0,714 20	— 0,653 85	2,061 54	2,273 85
0,5	0,760 25	— 0,439 39	2,196 96	0,439 39
0,6	0,801 93	— 0,220 43	2,153 90	— 1,262 11
0,7	0,838 90	— 0,013 83	1,954 92	— 2,653 94
0,8	0,871 05	0,166 60	1,637 40	— 3,619 42
0,9	0,898 45	0,311 22	1,246 89	— 4,111 73
1,0	0,921 35	0,415 11	0,830 22	— 4,151 08
1,1	0,940 01	0,477 80	0,429 35	— 3,811 37
1,2	0,955 16	0,502 61	0,077 00	— 3,200 43
1,3	0,967 00	0,495 54	— 0,205 71	— 2,438 37
1,4	0,976 14	0,464 11	— 0,409 43	— 1,638 24
1,5	0,983 05	0,416 26	— 0,535 19	— 0,891 98
1,6	0,988 17	0,359 38	— 0,591 76	— 0,262 66
1,7	0,991 90	0,299 76	— 0,592 74	0,216 78
1,8	0,994 55	0,242 17	— 0,553 63	0,540 06
1,9	0,996 40	0,189 86	— 0,489 50	0,720 90
2,0	0,997 66	0,144 67	— 0,413 34	0,785 35
2,1	0,998 51	0,107 26	— 0,335 27	0,764 58
2,2	0,999 07	0,077 44	— 0,262 24	0,689 19
2,3	0,999 43	0,054 50	— 0,198 36	0,585 47
2,4	0,999 66	0,037 41	— 0,145 41	0,473 54
2,5	0,999 80	0,025 05	— 0,103 47	0,367 04
2,6	0,999 88	0,016 38	— 0,071 56	0,273 83
2,7	0,999 93	0,010 46	— 0,048 14	0,197 25
2,8	0,999 96	0,006 52	— 0,031 54	0,137 51
2,9	0,999 98	0,003 97	— 0,020 14	0,092 94
3,0	0,999 99	0,002 37	— 0,012 53	0,060 99
3,1	0,999 99	0,001 38	— 0,007 61	0,038 90
3,2		0,000 78	— 0,004 51	0,024 14
3,3		0,000 44	— 0,002 61	0,014 59
3,4		0,000 24	— 0,001 47	0,008 59

Benützte Literatur:

[1]) R. v. Mises: Wahrscheinlichkeitsrechnung.
[2]) C. Boehm: Versuch einer systematischen Darstellung der modernen Risikotheorie (Blätter für Versicherungsmathematik, Band III).
[3]) Alfred Berger: Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik II.
[4]) O. Anderson: Einführung in die mathematische Statistik.
[5]) Rietz-Baur: Handbuch der mathematischen Statistik.
[6]) W. P. Elderton: Frequency Curves and Correlation.
[7]) H. Münzner: Über Verschärfungen der Tschebycheffschen Ungleichung (Skandinavisk Aktuarietidskrift 1935).
[8]) Birger Meidell: Sur un problème fondamental de la statistique mathématique (Skandinavisk Aktuarietidskrift 1922).