Über das asymptotische Verhalten der Erneuerungsfunktion

Autor(en): **Legras, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **42 (1942)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966916

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über das asymptotische Verhalten der Erneuerungsfunktion.

Von *Paul Legras*, Freiburg.

1. Problemlage und historischer Rückblick.

Die Lösung $\varphi(t)$ der linearen Volterraschen Integralgleichung

$$\varphi(t) = p(t) + \int_0^t p(t-x)\,\varphi(x)\,dx \tag{1}$$

nennen wir im Hinblick auf die Interpretation, welche die vorliegende Gleichung in der Versicherungswissenschaft, insbesondere beim Problem der Erneuerung kontinuierlicher Gesamtheiten erfährt, *Erneuerungsfunktion*. Aus gleichen Gründen setzen wir über die *Ausscheidedichte* $p(t)$, abgesehen von der als selbstverständlich angenommenen eigentlichen Riemannschen Integrierbarkeit in jedem endlichen Teilintervall von $(0, \infty)$, voraus:

$$p(t) \geqq 0 \tag{2}$$

und

$$\int_0^\infty p(t)\,dt = 1. \tag{3}$$

Durch Integration der Gleichung (1) gelangt man zu

$$1 = P(t) + \int_0^t P(t-x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{4}$$

wobei

$$P(t) = 1 - \int_0^t p(x)\,dx \tag{5}$$

ist, eine Form, die in der Fachliteratur sehr häufig als Ausgangsgleichung gewählt wird. Von Bedeutung ist der Wert des im allgemeinen als existierend vorausgesetzten Integrals

$$T = \int_0^\infty P(t)\,dt = \int_0^\infty t p(t)\,dt. \tag{6}$$

Seit den ersten Studien über die *Erneuerungsgleichung* (1) bzw. (4) von *Ch. Moser* (23) [1]) hat sich eine reichhaltige Spezialliteratur herausgebildet. Von den älteren Arbeiten erwähnen wir diejenigen von *L. Herbelot* (15), *R. Risser* (29), *E. Zwinggi* (32) und *A. J. Lotka* (18).

Es handelt sich u. a. um die Anwendung der klassischen Theorien zur Berechnung der Erneuerungsfunktion. Besonders erwähnen wir die Darstellung durch die *C. Neumannsche Reihe:*

$$\varphi(t) = p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) + \ldots, \tag{7}$$

wobei die in der Reihe auftretenden Funktionen durch die Integralrekursion

$$\begin{aligned} p_0(t) &= p(t) \\ p_n(t) &= \int_0^t p_{n-1}(t-x)\,p(x)\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{8}$$

gegeben sind. Die tatsächliche Berechnung der Erneuerungsfunktion auf Grund dieser Reihenentwicklung fand in der Praxis wenig Beachtung, da die durch die Rekursion (8) vorgeschriebenen Integrationen nur in seltenen Fällen explizite durchgeführt werden können oder dann auf umständliche Ausdrücke führen. Beachtung muss hier einem neuen Gesichtspunkte geschenkt werden, der darin besteht, die Funktion $p(t)$ so passend zu wählen, dass alle nach (8) vorzunehmenden Integrationen in geschlossener und übersichtlicher Form vorgenommen werden können. Dies ist dann möglich, wenn die Funktionen Lösungen der Funktionalgleichung

$$p(A+B, t) = \int_0^t p(A, t-x)\,p(B, x)\,dx \tag{9}$$

sind. Die Ausscheidedichte enthält nach dieser Forderung einen Parameter, der ein *transzendentes Additionstheorem* veranlasst. Die Erneuerungsfunktion kann in diesem Fall nach (7) mit Rücksicht auf (8) und (9) in der folgenden expliziten Form geschrieben werden:

[1]) Die Zahlen beziehen sich auf das am Schlusse der Arbeit beigefügte Literaturverzeichnis.

(10) $$\varphi(t) = p(A,t) + p(2A,t) + p(3A,t) + \ldots$$

In einer kürzlich erschienenen Note hat *H. Hadwiger* (14) eine Zusammenstellung von Lösungen der Funktionalgleichung (9) gegeben. Mit Rücksicht auf die Interpretation als Wahrscheinlichkeitsdichte sind die folgenden beiden Lösungen beachtenswert: Eine erste einfache Lösung ist

(11) $$p(A,t) = \frac{a^A}{\Gamma(A)} t^{A-1} e^{-at} \quad (A>0, a>0).$$

Die explizite Darstellbarkeit der Erneuerungsfunktion in diesem Fall wurde z. B. von *A. W. Brown* (1) behandelt, während noch speziellere Fälle (A ganz) vielerorts eine Rolle spielen. Vgl. z. B. *E. Zwinggi* (34).

Eine zweite Lösung, die in der mathematischen Bevölkerungstheorie von Bedeutung ist — vgl. die Arbeiten *H. Hadwiger* (10) und *H. Hadwiger* und *W. Ruchti* (13) — ist gegeben durch

(12) $$p(A,t) = \frac{A}{\sqrt{\pi t^3}} e^{2aA - \frac{A^2}{t} - a^2 t} \quad (A>0, a>0).$$

Über Darstellung und Verhalten der Erneuerungsfunktion in diesem speziellen Fall vgl. *H. Hadwiger* (11).

Die Darstellung durch die C. Neumannsche Reihe gestattet auf Grund der Voraussetzung (2) unmittelbar auf

(13) $$\varphi(t) \geqq 0$$

zu schliessen. Ist die Ausscheidedichte beschränkt, d. h. gilt im Intervall $(0,\infty)$

(14) $$p(t) \leqq M,$$

so ergibt sich aus (7) leicht die rohe Abschätzung

(15) $$\varphi(t) \leqq M e^{Mt}.$$

Über die Darstellung der Erneuerungsfunktion als Lösung einer Differentialgleichung vgl. *E. Zwinggi* (32), und über die Entwicklung in eine Potenzreihe *H. Hadwiger* (7). Eine explizite Berechnung bei einer ganz speziellen Ausscheidedichte — Gesetz von Achard — wurde von *H. Schulthess* (30) durchgeführt.

Die in der Erneuerungsgleichung (1) auftretende Integralbildung stellt eine sogenannte *Faltung* dar. Dies ermöglicht die Anwendung spezieller Verfahren zur Auflösung. Vgl. *A. J. Lotka* (18), *V. A. Kostitzin* (16) und *V. Fock* (5). In der neusten Zeit wurde wiederholt die hauptsächlich von *G. Doetsch* (2) geschaffene Theorie der *Laplace-Transformation* herangezogen. Bei der Auflösung der Gleichung spielt der wichtige *Faltungssatz* (G. Doetsch [2], S. 161) eine entscheidende Rolle. Vgl. hierzu die Arbeiten von *L. Féraud* (4), *R. Tarjan* (31) und *H. Hadwiger* und *W. Wegmüller* (12). Durch die Abhandlungen von *H. Richter* (28) und *W. Feller* (3), die wir noch oft zitieren müssen, hat die Theorie der Erneuerungsgleichung einen gewissen Abschluss erfahren.

Die Existenzfrage für die Lösung der Gleichung (1) kann, abgesehen von der Möglichkeit, welche die klassische Theorie liefert, mit Hilfe eines Theorems von *Paley* und *Wiener* aus der Theorie der Laplace-Transformation (vgl. *G. Doetsch* [2], S. 282) gelöst werden. Vgl. hierzu *H. Hadwiger* (8), S. 10. Der vorliegenden Sachlage besser angepasst ist es, den Existenznachweis auf Grund eines Theorems von *Bernstein* und *Widder* betreffend die Laplace-Stieltjessche Darstellung absolut-monotoner Funktionen zu führen, wie *W. Feller* (3), S. 247 bis 249, entwickelt.

In der letzten Zeit ist die Frage nach dem asymptotischen Verhalten der Erneuerungsfunktion in den Vordergrund der Betrachtung gerückt. Verschiedene Autoren waren schon früher bestrebt, allgemeingültige Aussagen über den Verlauf der Lösung $\varphi(t)$ für $t \to \infty$ zu machen, eine Aufgabe, die sich mit Rücksicht auf die praktische Deutung dieser Funktion naturgemäss aufdrängte. So glaubte man bewiesen zu haben, dass unter normalen Voraussetzungen über $p(t)$ die Lösung $\varphi(t)$ sich stets wellenförmig dem asymptotischen Wert

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = \frac{1}{T} \tag{16}$$

nähert. Strebt die Erneuerungsfunktion gegen eine Konstante, wie die asymptotische Formel (16) dies darstellt, so spricht man von *eigentlicher Stabilisierung*. Im Gegensatz zu einer allgemeinen Aussage von *E. Zwinggi* (33) hat *H. Hadwiger* (6) gezeigt, dass sich die Erneuerungsfunktion auch monoton verhalten kann. Wie später *H. Hadwiger* (9)

weiter gezeigt hat, kann man ohne schärfere Voraussetzungen über die Ausscheidedichte nicht einmal auf die eigentliche Stabilisierung schliessen. Es gibt Fälle, wo die Erneuerungsfunktion eine nicht abbrechende Folge unbeschränkt wachsender Oszillationen ausführt. *H. Richter* (26) bewies dann, dass die Relation

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = 0 \tag{17}$$

eine notwendige Bedingung für die eigentliche Stabilisierung darstellt. Wesentlich schwieriger gestaltet sich die Frage nach hinreichenden Bedingungen. Es hat sich gezeigt, dass die sogenannte *Stabilisierung im Mittel* weit einfacher und unter sehr allgemeinen Voraussetzungen hergeleitet werden kann. Es handelt sich um die asymptotische Relation

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(x)\, dx = \frac{1}{T}. \tag{18}$$

Sie bedeutet, dass sich nicht die Erneuerungsfunktion selbst, sondern ihr Integralmittelwert stabilisiert. Die Existenz des Integrals (6), das den Wert T liefert, ist hierbei vorausgesetzt. Dieser Konvergenzsatz wurde von *H. Richter* (28) unter der weiteren Voraussetzung, dass das Integral

$$\int_0^\infty [p(t)]^2\, dt \tag{19}$$

konvergiert, abgeleitet. Unabhängig wurde der gleiche Satz auch von *W. Feller* (3) auf Grund eines Theorems der Tauberschen Asymptotik (*G. Doetsch* [2], S. 208) gefunden.

Eigentliche Stabilisierung tritt nach den Untersuchungen von *H. Richter* (28) jedenfalls dann ein, wenn ausser der Existenz der Integrale (6) und (19) noch diejenige von

$$\int_0^\infty p(t)\, t \ln t\, dt \tag{20}$$

vorausgesetzt wird. Dadurch wird klargestellt, dass die Art der Stabilisierung der Erneuerungsfunktion vom asymptotischen Verhalten der Ausscheidedichte abhängig ist.

Einen schärferen Konvergenzsatz hat *W. Feller* (3) abgeleitet: Es bezeichne m_v das Moment

$$m_v = \int_0^\infty t^v p(t)\,dt, \quad m_1 = T, \tag{21}$$

das für $v = 1, 2, \ldots n$ $(n \geqq 2)$ existieren soll. Die Funktionen $t^\mu p(t)$, $\mu = 1, 2, \ldots n - 2$ seien im Intervall $(0, \infty)$ von beschränkter Variation und es gelte

$$\lim_{t \to \infty} t^{n-2} p(t) = 0, \quad \lim_{t \to \infty} t^{n-2} \int_t^\infty p(t)\,dt = 0. \tag{22}$$

Dann gilt die asymptotische Beziehung

$$\lim_{t \to \infty} t^{n-2} \left\{ \varphi(t) - \frac{1}{T} \right\} = 0. \tag{23}$$

Diese Formel liefert auch eine Aussage über die Stärke, mit welcher die eigentliche Stabilisierung erfolgt.

Verfasser leitet in dieser Arbeit eine asymptotische Formel ab, welche unter hinreichend starken Voraussetzungen für die Erneuerungsfunktion Approximationsfunktionen liefert, wobei der Approximationsfehler einer exponentiellen Abschätzung unterworfen wird.

2. Darstellung der Erneuerungsfunktion mit Hilfe der Laplace-Transformation.

In bezug auf die Ausscheidedichte setzen wir für das Nachfolgende weiter voraus, dass $p(t)$ für $t > 0$ (in $t = 0$ von rechts) stetig und stetig differenzierbar sei. Wie wir der klassischen Theorie der Volterraschen Integralgleichungen entnehmen wollen, überträgt sich diese Eigenschaft auf die im übrigen eindeutig bestimmte Lösung $\varphi(t)$ der Gleichung (1). Vgl. hierzu auch die Darstellung durch die in jedem endlichen Teilintervall von $(0, \infty)$ gleichmässig konvergente Neumannsche Reihe (7).

In der Halbebene $R[z] > 0$ konvergieren die Laplace-Integrale

$$\int_0^\infty e^{-zt}\, p(t)\, dt = h(z) \tag{24}$$

und

$$\int_0^\infty e^{-zt}\, P(t)\, dt = H(z) \tag{25}$$

absolut und stellen nach einem grundlegenden Theorem (*Doetsch* [2], S. 43, Satz 6) die oben mit $h(z)$ und $H(z)$ bezeichneten analytischen und in der genannten Halbebene regulären Funktionen dar.

Von grosser Bedeutung für die weitere Entwicklung ist die *charakteristische Gleichung*

$$1 - h(z) = 0\,. \tag{26}$$

Mit Rücksicht auf (3) gilt offenbar

$$|h(z)| < 1\,, \quad R[z] > 0\,, \tag{27}$$

so dass in der Halbebene $R[z] > 0$ keine *charakteristische Wurzel* der Gleichung (26) liegen kann. Sehr einfach lässt sich zeigen, dass $z_0 = 0$ eine *einfache* Wurzel ist und dass jede von z_0 verschiedene Wurzel in der Halbebene $R[z] < 0$ liegen muss.

Wir führen nun die Hilfsfunktion

$$f(z) = \frac{h(z)}{1 - h(z)} \tag{28}$$

ein. Zieht man die Relation (5) in Betracht, aus welcher sich der Zusammenhang

$$H(z) = \frac{1}{z}\left\{1 - h(z)\right\} \tag{29}$$

ergibt, so lässt sich für die Funktion (28) auch schreiben:

$$f(z) = \frac{1}{z\,H(z)} - 1\,. \tag{30}$$

Nach den oben gemachten Feststellungen betreffend die charakteristischen Wurzeln ergibt sich, dass die Hilfsfunktion $f(z)$ in der rechten Halbebene $R[z] > 0$ regulär ist. Nach einem Theorem von *Paley* und *Wiener* (*Doetsch* [2], S. 282) gibt es eine in jedem endlichen Teilintervall von $(0, \infty)$ eigentlich integrierbare und in jedem Intervall $(0, a)$ absolut integrierbare Funktion $\varphi_0(t)$, so dass das Laplace-Integral

$$\int_0^\infty e^{-zt}\, \varphi_0(t)\, dt = f(z) \tag{31}$$

in der Halbebene $R[z] > 0$ absolut konvergiert und dort die reguläre Funktion $f(z)$ darstellt. Aus der zwischen den beiden analytischen Funktionen $h(z)$ und $f(z)$ bestehenden algebraischen Beziehung

$$f(z) = h(z) + h(z)\, f(z) \tag{32}$$

kann nach dem Faltungssatz (Doetsch [2], S. 161) auf die Faltungsrelation

$$\varphi_0(t) = p(t) + \int_0^t p(t-x)\, \varphi_0(x)\, dx + \eta(t) \tag{33}$$

geschlossen werden. Hierbei ist $\eta(t)$ eine sogenannte *Nullfunktion*, d. h. es gilt

$$\int_0^t \eta(x)\, dx \equiv 0.$$

Aus (33) folgert man nun, dass

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) - \eta(t) \tag{34}$$

die Lösung der Integralgleichung (1) darstellt. Da offenbar

$$\int_0^\infty e^{-zt}\, \eta(t)\, dt \equiv 0$$

ist, folgt für die Laplace-Transformierte der Erneuerungsfunktion in $R[z] > 0$

$$\int_0^\infty e^{-zt}\,\varphi(t)\,dt = f(z)\,. \tag{35}$$

Eine Integraldarstellung für die gesuchte Lösung $\varphi(t)$ lässt sich erreichen, wenn man die komplexe Umkehrformel der Laplace-Transformation (*Doetsch* [2], S. 105) anwendet. Die hierzu erforderlichen Voraussetzungen sind mit Berücksichtigung der sich aus unsern Voraussetzungen ergebenden Eigenschaften von $\varphi(t)$ erfüllt. So ergibt sich die Darstellung für $t > 0$ und $\alpha > 0$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{tz} f(z)\,dz, \tag{36}$$

oder nach (28)

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{tz}\,\frac{h(z)}{1-h(z)}\,dz, \tag{37}$$

oder endlich nach (30)

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{tz}\left\{\frac{1}{zH(z)} - 1\right\} dz\,. \tag{38}$$

Diese Integraldarstellungen können in gewissen Fällen zur Berechnung der Erneuerungsfunktion dienen. Es sei z. B.:

$$P(t) = e^{-\lambda t}\left\{a_0 + \frac{a_1}{1!}\,t + \frac{a_2}{2!}\,t^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}\,t^n\right\}. \tag{39}$$

Die Funktion muss aber den hier vorliegenden Verhältnissen angepasst sein, d. h. es muss $\lambda > 0$ und

$P(0) = 1$, also $a_0 = 1$ und für $t > 0$ stets $P'(t) \leqq 0$ sein.

In diesem Falle wird

$$H(z) = \frac{a_0}{z+\lambda} + \frac{a_1}{(z+\lambda)^2} + \ldots + \frac{a_n}{(z+\lambda)^{n+1}} \tag{40}$$

und

$$(41)\quad f(z) = \frac{(z+\lambda)^{n+1} - z\left\{a_0 (z+\lambda)^n + a_1 (z+\lambda)^{n-1} + \ldots + a_n\right\}}{z\left\{a_0 (z+\lambda)^n + a_1 (z+\lambda)^{n-1} + \ldots + a_n\right\}},$$

also eine rationale Funktion, die sich unter der Voraussetzung, dass alle $n+1$ Wurzeln

$$z_0 = 0, z_1, z_2, \ldots z_n$$

der charakteristischen Gleichung

$$(42)\qquad z\left\{a_0 (z+\lambda)^n + a_1 (z+\lambda)^{n-1} + \ldots + a_n\right\} = 0$$

einfach sind, in die Partialbrüche

$$(43)\qquad f(z) = \frac{C_0}{z} + \sum_{v=1}^{n} \frac{C_v}{z - z_v}$$

zerlegen lässt. Für das Residuum C_0 erhalten wir noch

$$(44)\qquad C_0 = \frac{\lambda^{n+1}}{a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n},$$

ein Wert, der wie leicht zu verifizieren ist, mit $\frac{1}{T}$ übereinstimmt. Durch gliedweise Anwendung der Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{tz} \frac{dz}{z - z_v} = e^{z_v t}$$

in der Darstellung (36) gewinnen wir

$$(45)\qquad \varphi(t) = C_0 + \sum_{v=1}^{n} C_v e^{z_v t}.$$

Was nun den Verlauf von $\varphi(t)$ anbetrifft, so ergeben sich nach dieser Darstellung zwei Möglichkeiten, je nachdem die charakteristischen Wurzeln sämtlich reell oder teilweise konjugiert komplex sind. Unter Berücksichtigung von

$$R[z_v] < 0, \quad (v > 0)$$

ergibt sich die monotone oder wellenförmige Konvergenz der Erneuerungsfunktion gegen die Konstante $C_0 = \frac{1}{T}$.

3. Die Stabilisierung im Mittel.

Wie weiter oben dargelegt wurde, konvergiert das Laplace-Integral

(35) $$\int_0^\infty e^{-zt}\,\varphi(t)\,dt = f(z)$$

in der Halbebene $R[z] > 0$ absolut, und es gilt

(30) $$f(z) = \frac{1}{z\,H(z)} - 1 \quad \text{wobei}$$

(25) $$H(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\,P(t)\,dt \quad \text{ist.}$$

Setzen wir die Existenz des Integrals

(6) $$T = \int_0^\infty P(t)\,dt$$

voraus, so gilt nach dem Stetigkeitssatz für Laplace-Integrale (*Doetsch* [2], S. 47)

(46) $$H(z) \to T \quad \text{für} \quad z\,(\text{reell, positiv}) \to 0.$$

Hieraus schliessen wir

(47) $$z\,f(z) \to \frac{1}{T} \quad \text{für} \quad z\,(\text{reell, positiv}) \to 0.$$

Mit Rücksicht auf (13), wonach $\varphi(t) \geqq 0$ ist, kann ein Satz der Tauberschen Asymptotik verwendet werden (*Doetsch* [2], S. 208, Satz 2), wonach für $t \to \infty$

$$\int_0^t \varphi(x)\,dx \sim \frac{t}{T} \tag{48}$$

gilt, oder also die asymptotische Relation

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(x)\,dx = \frac{1}{T}, \tag{18}$$

durch welche die *Stabilisierung im Mittel* dargestellt wird.

4. Eine asymptotische Formel für die Erneuerungsfunktion.

Wir werden jetzt unter einer zusätzlichen starken Voraussetzung über die Ausscheidedichte die eigentliche Stabilisierung der Erneuerungsfunktion ableiten und darüber hinaus eine Formel entwickeln, welche in gewissen Fällen gestattet, beliebig scharfe Approximationsfunktionen herzustellen. Ausser den früher aufgestellten Bedingungen (2), (3) und (6) fordern wir noch, dass $p(t)$ für $t > 0$ (in $t = 0$ von rechts) stetig und 2mal stetig differenzierbar sei und dass weiter für $v = 0, 1, 2$ die asymptotische Relation

$$p^{(v)}(t) = 0\,\{e^{-at}\},\ a > 0 \tag{49}$$

gelte. Nach dieser Voraussetzung gibt es eine positive Konstante M, so dass für $t > 0$ und $v = 0, 1, 2$

$$e^{at}\,p^{(v)}(t) \leqq M \tag{50}$$

gilt. In der Halbebene $R[z] > -a$ konvergieren die Laplace-Integrale

$$\int_0^\infty e^{-zt}\,p(t)\,dt = h(z) \tag{24}$$

und

$$\int_0^\infty e^{-zt}\,t^n\,p(t)\,dt = (-1)^n\,h^{(n)}(z). \tag{51}$$

und für die Momente

(52) $$M_n = \int_0^\infty t^n p(t)\,dt$$

erhält man

(53) $$M_n = (-1)^n h^{(n)}(0).$$

Berücksichtigt man die für $R[z] > -a$ geltenden Beziehungen

(54) $$\lim_{t \to \infty} e^{-zt} p(t) = 0, \quad \lim_{t \to \infty} e^{-zt} p'(t) = 0,$$

so gewinnt man durch zweimalige partielle Integration von (24) für $z \neq 0$ und $R[z] > -a$

(55) $$h(z) = \frac{p(0)}{z} + \frac{p'(0)}{z^2} + \frac{1}{z^2} \int_0^\infty e^{-zt} p''(t)\,dt.$$

Wir betrachten nun in der z-Ebene einen Streifen

(56) $$-\sigma \leqq R[z] \leqq \varrho, \quad 0 < \sigma < a, \quad \varrho > 0.$$

Für $R[z] \geqq -\sigma$ gilt mit Rücksicht auf (50)

(57) $$\left| \int_0^\infty e^{-zt} p''(t)\,dt \right| \leqq \frac{M}{a - \sigma},$$

so dass

nach (55) im Streifen (56) die Abschätzung

(58) $$\left| h(z) - \frac{p(0)}{z} \right| \leqq \left\{ |p'(0)| + \frac{M}{a - \sigma} \right\} \frac{1}{|z|^2}$$

gilt. Wir greifen jetzt zurück auf die wichtige charakteristische Gleichung

(26) $$1 - h(z) = 0$$

und studieren insbesondere die im Streifen (56) gelegenen Wurzeln. Da sich $h(z)$ auf dem im Streifen gelegenen Stück $(-\sigma, \varrho)$ der reellen Achse monoton verhält, ist $z_0 = 0$ dort die einzige *reelle* Wurzel. Sie ist ausserdem *einfach*, da

$$h'(0) = -M_1 < 0 \text{ ist.}$$

Die andern Wurzeln müssen paarweise *konjugiert-komplex* sein. Ist $\alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ eine komplexe Wurzel, so muss

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos\beta t \, p(t) \, dt = 1 \tag{59}$$

sein. Subtrahieren wir diese Gleichung von (3), so folgt

$$\int_0^\infty (1 - e^{-\alpha t} \cos\beta t) \, p(t) \, dt = 0, \tag{60}$$

so dass mit Rücksicht auf (2), auf Voraussetzung $\beta \neq 0$ und auf die Stetigkeit der im Integral (60) geschriebenen Funktionen offensichtlich auf

$$\alpha < 0 \tag{61}$$

geschlossen werden kann. Das bedeutet, dass alle von $z_0 = 0$ verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung (26) in der offenen Halbebene $R[z] < 0$ liegen müssen.

Nun gilt im Streifen (56) weiter

$$h(z) \to 0 \text{ gleichmässig für } z \to \infty, \tag{62}$$

d. h. es kann zu einem $0 < \delta < 1$ ein $A > 0$ so gefunden werden, dass für $|J[z]| \geqq A$ und $-\sigma \leqq R[z] \leqq \varrho$

$$|h(z)| \leqq \delta < 1 \tag{63}$$

ausfällt. Die im Streifen (56) liegenden charakteristischen Wurzeln liegen dann alle im Rechteck

$$-\sigma \leqq R[z] \leqq \varrho, \quad -A \leqq J[z] \leqq A, \tag{64}$$

und nach einem bekannten Satz der Funktionentheorie können es nur *endlich viele* sein. Wir bezeichnen sie mit

$$z_0 = 0, z_1, z_{-1}, z_2, z_{-2}, \ldots z_n, z_{-n}, \tag{65}$$

wo die Numerierung so gewählt sein soll, dass

(66) $$\overline{z}_v = z_{-v}$$

ist.

Die komplexen Wurzeln sollen für das folgende als *einfach* vorausgesetzt werden.

Die Hilfsfunktion

(28) $$f(z) = \frac{h(z)}{1 - h(z)}$$

ist im Rechteck (64) bis auf die Punkte z_v $(v = 0, 1, -1, \ldots n, -n)$ regulär. In diesen Punkten besitzt $f(z)$ Pole 1. Ordnung mit den Residuen

(67) $$C_v = -\frac{h(z_v)}{h'(z_v)} = \frac{\int_0^\infty e^{-z_v t}\, p(t)\, dt}{\int_0^\infty e^{-z_v t}\, t\, p(t)\, dt}.$$

Speziell ist

(68) $$C_0 = \frac{1}{M_1} = \frac{1}{T}.$$

Nach (66) gilt noch

(69) $$C_{-v} = \overline{C}_v.$$

Ist σ so gewählt, dass auf der Geraden $R[z] = -\sigma$ keine charakteristische Wurzel liegt, so ist die Funktion $f(z)$ auch auf dem Rand des Rechtecks (64) regulär.

Nach dem Residuensatz erhält man für das im positiven Sinn über den Rand des Rechtecks erstreckte Integral

(70) $$\frac{1}{2\pi i} \square\!\!\int e^{tz} f(z)\, dz = \sum_{-n}^{n} C_v e^{tz_v}.$$

Der Wert $C_v e^{tz_v}$ stellt das Residuum der Funktion $e^{tz} f(z)$ im Pol z_v dar.

Durch Zerlegung des Randintegrals (70) in die vier geradlinigen Teilintegrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\sigma-iA}^{\varrho-iA} e^{tz} f(z)\,dz = J_1(t), \tag{71}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varrho-iA}^{\varrho+iA} e^{tz} f(z)\,dz = J_2(t), \tag{72}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varrho+iA}^{-\sigma+iA} e^{tz} f(z)\,dz = J_3(t), \tag{73}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\sigma+iA}^{-\sigma-iA} e^{tz} f(z)\,dz = J_4(t), \tag{74}$$

gewinnt man

$$J_1(t) + J_2(t) + J_3(t) + J_4(t) = \sum_{-n}^{n} C_\nu\, e^{z_\nu t}. \tag{75}$$

Ist $\varepsilon > 0$ und $t > 0$ beliebig vorgegeben, so kann nach Feststellung (63) und mit Rücksicht auf die Darstellungsformel (36) ein A_0 so gross gewählt werden, dass für alle $A > A_0$ die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. $$\left| e^{tz} f(z) \right| < \frac{2\pi\varepsilon}{3(\varrho+\sigma)} \quad \text{für} \quad \left| J[z] \right| = A, \; -\sigma \leqq R[z] \leqq \varrho$$

2. $$\left| \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varrho-iA}^{\varrho+iA} e^{tz} f(z)\,dz - \varphi(t) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann ist also

$$\left| J_1(t) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| J_3(t) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| J_2(t) - \varphi(t) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{76}$$

so dass sich aus (75)

$$\left|\sum_{-n}^{n} C_v e^{z_v t} - \varphi(t) - J_4(t)\right| < \varepsilon \quad \text{für} \quad A > A_0 \tag{77}$$

ergibt. Dies bedeutet, dass das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} e^{tz} f(z)\,dz = J(t) \tag{78}$$

(als Cauchyscher Hauptwert) existiert und dass die Relation

$$\varphi(t) = \sum_{-n}^{n} C_v e^{z_v t} + J(t) \tag{79}$$

besteht. Die in der vorstehenden Darstellung rechts geschriebene Summe stellt offensichtlich eine Approximationsfunktion für $\varphi(t)$ dar, und es gilt nun, das Restintegral $J(t)$ abzuschätzen. Zunächst ist für $t > 0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} e^{tz}\frac{p(0)}{z-p(0)}\,dz = 0. \tag{80}$$

Zur Verifikation führe man die Substitution $z = p(0) - s$ durch und vergleiche mit dem bekannten *diskontinuierlichen Faktor* (vgl. *Doetsch* [2], S. 105)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{-ts}\frac{ds}{s} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad t = 0 \quad (\omega > 0). \\ 1 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases} \tag{81}$$

Wenn wir jetzt (80) von (78) subtrahieren, ergibt sich

$$J(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} e^{tz}\left\{f(z) - \frac{p(0)}{z-p(0)}\right\}dz. \tag{82}$$

Nun berücksichtigen wir die Darstellung (28) und erhalten für den im Integral (82) auftretenden Klammerausdruck nach einiger Umrechnung

$$(83) \qquad f(z) - \frac{p(0)}{z - p(0)} = \frac{z}{z - p(0)} \left\{ h(z) - \frac{p(0)}{z} \right\} \frac{1}{1 - h(z)}.$$

Auf der Geraden $R[z] = -\sigma$ sei

$$(84) \qquad |1 - h(z)| \geqq \theta > 0.$$

Die Annahme einer solchen positiven Schranke θ ist mit Rücksicht auf die Konvergenz (62) und auf die Voraussetzung, wonach auf der genannten Geraden keine charakteristische Wurzel liegen soll, gerechtfertigt.

Auf der Geraden ist ferner wegen $p(0) \geqq 0$

$$(85) \qquad \left| \frac{z}{z - p(0)} \right| \leqq 1.$$

Berücksichtigen wir ausser (84) und (85) noch die Abschätzung (58), so ergibt sich für das Restintegral (82)

$$(86) \qquad |J(t)| \leqq \frac{1}{2\pi\theta} \left\{ |p'(0)| + \frac{M}{a - \sigma} \right\} \int_{-\sigma - i\infty}^{-\sigma + i\infty} |e^{tz}| \left| \frac{dz}{z^2} \right|,$$

oder

$$(87) \qquad |J(t)| \leqq \frac{1}{2\sigma\theta} \left\{ |p'(0)| + \frac{M}{a - \sigma} \right\} e^{-\sigma t},$$

wo noch der Wert des bekannten Integrals

$$(88) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\sigma^2 + \xi^2} = \frac{\pi}{\sigma}$$

eingesetzt wurde. Nach (79) lässt sich jetzt schreiben

$$(89) \qquad \varphi(t) = \sum_{-n}^{n} C_v e^{z_v t} + 0\{e^{-\sigma t}\}.$$

Setzen wir in (89) noch

$$\begin{array}{l|l} z_0 = 0 & C_0 = \dfrac{1}{T} \\ z_v = -\xi_v + i\eta_v & C_v = A_v + i\,B_v \\ z_{-v} = -\xi_v - i\eta_v & C_{-v} = A_v - i\,B_v \end{array} \quad (v = 1, 2, \ldots n),$$

so erhalten wir endlich die asymptotische Formel

$$(90) \qquad \varphi(t) = \frac{1}{T} + 2\sum_{v=1}^{n} e^{-\xi_v t}\{A_v \cos\eta_v t - B_v \sin\eta_v t\} + 0\{e^{-\sigma t}\}.$$

Besonders beachte man, dass

$$(91) \qquad 0 < \xi_v < \sigma \quad (v = 1, 2, \ldots n)$$

gilt.

Die erhaltene Formel (90) zeigt, dass unter den gewählten Voraussetzungen (49) über die Ausscheidedichte die Erneuerungsfunktion stets gegen den asymptotischen Wert $\frac{1}{T}$ konvergiert und dass, falls ausser $z_0 = 0$ noch andere Wurzeln der charakteristischen Gleichung im Streifen $-\sigma \leqq R[z] \leqq \varrho$ liegen, diese Konvergenz wellenförmig erfolgt. Die durch die Formel gelieferte Approximation kann um so mehr verfeinert werden, je grösser man σ wählt und je mehr charakteristische Wurzeln also verwertet werden. Es kann natürlich der Fall eintreten, dass im oben genannten Streifen ausser $z_0 = 0$ keine charakteristische Wurzel mehr liegt. Die Formel reduziert sich dann auf

$$(92) \qquad \varphi(t) = \frac{1}{T} + 0\{e^{-\sigma t}\},$$

wobei über die Form der Annäherung an den asymptotischen Wert nichts entnommen werden kann.

Besondere Beachtung verdient der Fall, wo

$$(93) \qquad \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{M_n}{n!}} = 0$$

ist; dann ist nämlich

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{M_n}{n!} z^n \tag{94}$$

eine ganze transzendente Funktion. Da $h(0) = 1$ ist, kann der Wert 1 nicht der Picardsche Ausnahmewert sein, und die charakteristische Gleichung (26) hat in der linken Halbebene $R[z] < 0$ unendlich viele, paarweise konjugiert-komplexe Wurzeln.

In der asymptotischen Formel (90) kann dann σ jede beliebig grosse Zahl sein; es ist aber die Bedingung zu beachten, dass auf der Geraden $R[z] = -\sigma$ keine charakteristische Wurzel liegen soll.

Die Erneuerungsfunktion kann *formal* für $t \to \infty$ durch die *asymptotische Reihe*

$$\varphi(t) \sim \frac{1}{T} + \sum_{v=1}^{\infty} e^{-\xi_v t} (A_v \cos \eta_v t - B_v \sin \eta_v t) \tag{95}$$

dargestellt werden. In gewissen Fällen wird durch (95) eine gleichmässig konvergente Reihenentwicklung geliefert. Die genaue Abklärung dieser Frage erfordert weitere Studien, u. a. über die Verteilung der charakteristischen Wurzeln.

Wir bemerken noch, dass die Bedingung (93) jedenfalls dann erfüllt ist, wenn

$$p(t) = 0 \quad \text{für} \quad t > \omega, \tag{96}$$

d. h. wenn die Ausscheidedichte ausserhalb eines endlichen Intervalls verschwindet.

Literaturverzeichnis.

1. *Brown, A. W.:* A note on the use of a Pearson type III funktion in a renewal theory. Ann. math. Statist. 11, S. 448—453 (1940).
2. *Doetsch, G.:* Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin, J. Springer, 1937.
3. *Feller, W.:* On the integral equation of renewal theory. Ann. math. Statist. 12, S. 243—267 (1941).
4. *Feraud, L.:* Le renouvellement, quelques problèmes connexes et les équations intégrales du cycle fermé. M. V. S. V. 41, S. 81—93 (1941).
5. *Fock, V.:* Über eine Klasse von Integralgleichungen. Math. Zeitschr. 21, S. 161—173 (1924).
6. *Hadwiger, H.:* Zur Berechnung der Erneuerungsfunktion nach einer Formel von V. A. Kostitzin. M. V. S. V. 34, S. 37—43 (1937).
7. *Hadwiger, H.:* Über die Entwicklung der Erneuerungsfunktion in eine Potenzreihe. Skandinavisk Aktuarietidskrift 1938, S. 31—37.
8. *Hadwiger, H.:* Über die Integralgleichung der Bevölkerungstheorie. M. V. S. V. 38, S. 1—14 (1939).
9. *Hadwiger, H.:* Zur Frage des Beharrungszustandes bei kontinuierlich sich erneuernden Gesamtheiten. Archiv für math. Wirtschafts- und Sozialforschung. Band V, Heft 1, S. 32—34 (1939).
10. *Hadwiger, H.:* Eine analytische Reproduktionsfunktion für biologische Gesamtheiten. Skandinavisk Aktuarietidskrift 1940, S. 101—113.
11. *Hadwiger, H.:* Natürliche Ausscheidefunktionen für Gesamtheiten und die Lösung der Erneuerungsgleichung. M. V. S. V. 40, S. 31—39 (1940).
12. *Hadwiger, H., Wegmüller, W.:* Entwicklung und Umschichtung von Personengesamtheiten. Zwölfter internationaler Kongress der Versicherungsmathematiker, Luzern 1940. Denkschrift Band III, S. 369—386.
13. *Hadwiger, H., Ruchti, W.:* Darstellung der Fruchtbarkeit durch eine biologische Reproduktionsformel. Archiv für math. Wirtschafts- und Sozialforschung. Band VII, Heft 1, S. 30—34 (1941).
14. *Hadwiger, H.:* Ein transzendentes Additionstheorem und die Neumannsche Reihe. M. V. S. V. 42, S. 57—66 (1942).
15. *Herbelot, H.:* Application d'un théorème d'analyse. Bulletin trimestr. de l'inst. des act. franc. 19 (1909).
16. *Kostitzin, V. A.:* Application des Equations Intégrales. Mémorial des Sciences mathématiques, LXIX (1935).
17. *Linder, A.:* Die Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung. Archiv für math. Wirtschafts- und Sozialforschung. Band IV, S. 136—156 (1938).
18. *Lotka, A. J.:* A contribution to the theory of self-renewing aggregates, with special reference to industrial replacement. Ann. of Math. Statist. 10, S. 1—25 (1939).

19. *Lotka, A. J.:* On an integral equation in population analysis. Ann. of Math. Statist. 10, S. 144—161 (1939).
20. *Lotka, A. J.:* The theory of industrial replacement. Skandinavisk Aktuarietidskrift 1940, S. 1—14.
21. *Lotka, A. J.:* Sur une équation intégrale de l'analyse démographique et industrielle. M. V. S. V. 40, S. 1—16 (1940).
22. *Moser, Chr.:* Integralgleichungen und sich erneuernde Gesamtheiten. Ber. des 9. intern. Kongresses f. Versicherungswissenschaft, Stockholm 1930, Band 3.
23. *Moser, Chr.:* Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes bei einer sich erneuernden Gesamtheit. M. V. S. V. 21 (1926).
24. *Preinreich, G. A. D.:* The theory of industrial replacement. Skandinavisk Aktuarietidskrift 1939, S. 1—19.
25. *Preinreich, G. A. D.:* The present status of renewal theory. Waverly Press, Baltimore (1940).
26. *Richter, H.:* Eine Bemerkung zum Erneuerungsproblem. Archiv für math. Wirtschafts- und Sozialforschung. Band VI, Heft 3 (1940).
27. *Richter, H.:* Die Konvergenz der Erneuerungsfunktion. Bl. f. Vers.-Math. u. verw. Gebiete, Band 5, Heft 1 (1940).
28. *Richter, H.:* Untersuchungen zum Erneuerungsproblem. Math. Ann. 118, S. 145—194 (1941).
29. *Risser, R.:* Sur une application d'une Equation Fonctionnelle à un problème d'Assurance. Bulletin trimestr. de l'instit. des act. franc. 22 (1912).
30. *Schulthess, H.:* Über das Erneuerungsproblem bei Verwendung eines analytischen Sterbegesetzes. M. V. S. V., Heft 33 (1933).
31. *Tarjan, R.:* Untersuchungen über den Kapitalbedarf des Lebensversicherungsgeschäftes. Zwölfter internationaler Kongress der Versicherungsmathematiker, Luzern 1940. Denkschrift Band III.
32. *Zwinggi, E.:* Das Problem der Erneuerung. Festgabe Moser, Bern 1931, S. 127—162.
33. *Zwinggi, E.:* Zum Problem der Erneuerung. Bl. f. Vers. Math. u. verw. Gebiete, Band 31, Heft 1 (1931).
34. *Zwinggi, E.:* Bemerkungen zum Erneuerungsproblem. M. V. S. V. 35, S. 69—73 (1938).