Zur Bestimmung der Rückschlusswahrscheinlichkeit einer geschlossenen Gesamtheit

Autor(en): **Nolfi, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **44 (1944)**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-551020

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Zur Bestimmung der Rückschlusswahrscheinlichkeit einer geschlossenen Gesamtheit.

Von *P. Nolfi*, Zürich.

Wir betrachten eine geschlossene Gesamtheit von Personen und nehmen an, dass diese Gesamtheit nur durch Ableben ihrer einzelnen Mitglieder eine Verminderung erfährt.

Die Wahrscheinlichkeit für ein Mitglied, ein Zeitintervall 0 bis t zu überleben, sei gegeben durch $p(\alpha) = e^{-\alpha}$, wobei $\alpha = \alpha(t) = \int_0^t \mu(\tau)\, d\tau$ ist. $\mu(\tau)$ bedeutet die Sterbensintensität. $q(\alpha) = 1 - e^{-\alpha}$ ist die Wahrscheinlichkeit für ein Mitglied der Gesamtheit, während der Beobachtungszeit 0 bis t zu sterben. Es ist nun nach der Newtonschen Formel die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Bestand von n Personen r Todesfälle eintreten, gegeben durch:

$$w_r(\alpha) = \binom{n}{r} (1 - e^{-\alpha})^r e^{-(n-r)\alpha}$$

Wie es sich auf Grund eines Urnenschemas zeigen lässt, gilt diese Gleichung exakt, sobald vorausgesetzt werden kann, dass die Mitglieder der Gesamtheit die gleiche Sterbenswahrscheinlichkeit besitzen. Die angeführte Formel kann also praktisch auf eine Gruppe gleichaltriger Personen angewandt werden. Bei Zusammenfassung mehrerer Gruppen kann sie indessen nur als Näherungsformel betrachtet werden. Dagegen bleibt sie richtig, auch wenn die Grundwahrscheinlichkeit bzw. die Intensität $\mu(\tau)$ zeitlichen Veränderungen unterliegt. Die Beobachtung kann also über mehrere Jahre erstreckt werden.

Eine genaue Betrachtung der Sterblichkeitsziffer an grossen Beständen zeigt, dass diese trotz der grossen Zahl der beobachteten Individuen ausserordentlich grosse Schwankungen aufweist. Das hat immer mehr zur Einsicht geführt, dass diese Schwankungen den Zufallserscheinungen, wie sie bei Auslosungen aus einer Urne auftreten, nicht gleichgestellt werden dürfen. Es war Lexis, der diese

Tatsache klar erkannt und eine entsprechende mathematische Behandlung dieses Fragenkomplexes gegeben hat. Nach ihm setzen sich die Totalschwankungen der beobachteten Verhältniszahlen aus zwei Komponenten zusammen: Die eine kann man als die *unwesentliche* bezeichnen, weil sie einem Schwankungssystem angehört, das auch bei konstant bleibender Grundwahrscheinlichkeit auftritt; die andere dagegen beruht auf der physischen Änderung der Grundwahrscheinlichkeit von Serie zu Serie und wird daher die *physische Schwankungskomponente* genannt. Im Finanzhaushalt einer Versicherungsinstitution haben die physischen Schwankungen einen viel grösseren Einfluss als die durch den reinen Zufall hervorgerufenen Abweichungen. In der Tat können die ersteren gerade bei grossen und sehr grossen Versicherungsbeständen zu ausserordentlich hohen Verlusten führen. Trotzdem war die physische Schwankungskomponente nur selten Gegenstand mathematischer Betrachtungen. Wie oben erwähnt, hat Lexis diesem Problem besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Ihm verdankt man die Einführung des Divergenzkoeffizienten, welcher Anhaltspunkte über das Ausmass solcher Schwankungen liefert.

Der Ermittlung der physischen Schwankungen dient auch die Bestimmung der Rückschlusswahrscheinlichkeit. Wenn z. B. in einer Gruppe von versicherten Personen beobachtet wird, dass die effektive Sterblichkeit gegenüber den Erwartungen einen wesentlich anderen Verlauf zeitigt, so fragt es sich, ob dies auf den reinen Zufall zurückgeführt werden kann oder ob es sich nicht vielmehr um eine unzutreffende Annahme bei der Wahl der Sterbetafel handelt, in dem Sinn, dass sich die in der Vergangenheit beobachtete Sterblichkeit in der Zwischenzeit wesentlich geändert hat. Das ist aber anderseits dem Sinn nach die gleiche Aufgabe, wie sie von Bayes gestellt wurde und zur Aufstellung des nach ihm benannten Prinzips führte. Sie kann im konkreten Fall wie folgt formuliert werden: In einem Bestand von n Personen sind während der Zeit 0 bis t r Todesfälle eingetreten, während nach den Erwartungen nq Todesfälle erwartet wurden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert der Sterbenswahrscheinlichkeit zwischen zwei bestimmten Grenzen liegt, so z. B. zwischen 0 und Q?

Die Lösung dieser Aufgabe führt zu einem sehr interessanten Satz, den wir im folgenden beweisen werden. Wir bemerken zunächst, dass $q(\alpha)$ eine Funktion von α ist. Wenn der wahre Wert der Sterblich-

keit zwischen 0 und Q liegt, dann liegt der entsprechende Wert von α zwischen 0 und λ, wobei $Q = q(\lambda) = 1 - e^{-\lambda}$ ist. Die Rückschlusswahrscheinlichkeit dafür, dass der wahre Wert von α zwischen den Grenzen 0 und λ liegt, wird nach der Teilungsregel oder dem Bayesschen Prinzip gegeben durch den Ausdruck

$$g(\lambda) = \frac{\binom{n}{r} \int_0^\lambda (1 - e^{-\alpha})^r e^{-(n-r)\alpha} d\alpha}{\binom{n}{r} \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha})^r e^{-(n-r)\alpha} d\alpha}.$$

Das hier auftretende Integral lässt sich durch partielle Integration auflösen. Es ist nämlich:

$$\cdot - e^{-\alpha})^r e^{-(n-r)\alpha} d\alpha = -\frac{1}{n-r}(1 - e^{-\lambda})^r e^{-(n-r)\lambda} + \frac{r}{n-r} \int_0^\lambda (1 - e^{-\alpha})^{r-1} e^{-\alpha(n-r+1)} d\alpha.$$

Durch Zusammenfassung aller Glieder erhält man:

$$g(\lambda) = 1 - \left\{ e^{-n\lambda} + \binom{n}{1} e^{-(n-1)\lambda}(1 - e^{-\lambda}) + \ldots + \binom{n}{r} e^{-(n-r)\lambda}(1 - e^{-\lambda})^r \right\}.$$

Beachtet man, dass $e^{-\lambda n} = P^n$ und $(1 - e^{-\lambda})^r = Q^r$ ist, so lässt sich $g(\lambda)$ in die folgende Form überführen:

$$g(\lambda) = G(Q) = 1 - \left\{ P^n + \binom{n}{1} P^{n-1} Q + \ldots + \binom{n}{r} P^{n-r} Q^r \right\}.$$

Aus $(P + Q)^n = 1$ erhält man für $g(Q)$ auch die Darstellung

$$G(Q) = \binom{n}{r+1} Q^{r+1} P^{n-r-1} + \binom{n}{r+2} Q^{r+2} P^{n-r-2} + \ldots + Q^n.$$

Damit erscheint die Rückschlusswahrscheinlichkeit auf eine andere Wahrscheinlichkeit zurückgeführt. Der rechtsstehende Ausdruck ist nämlich nichts anderes als die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Bestand von n Personen mit der Grundsterblichkeit Q mindestens $r + 1$ Todesfälle eintreten. Wir können somit den Satz aussprechen:

Satz: Wenn in einem Bestand von n Personen r Todesfälle eingetreten sind, so ist die Rückschlusswahrscheinlichkeit dafür, dass der wahre Wert der Sterbenswahrscheinlichkeit zwischen den Grenzen 0 und Q liegt, gleich der Wahrscheinlichkeit, dass im gleichen Bestand bei der Grundwahrscheinlichkeit Q mehr als r Todesfälle eintreten.

Man kann sich leicht vergewissern, dass dieser Satz richtig ist. Je grösser der Wert von Q gewählt wird, um so grösser wird einerseits

die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert der Grundwahrscheinlichkeit zwischen 0 und Q liegt, und um so grösser wird anderseits in Übereinstimmung mit dem abgeleiteten Satz auch die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als r Todesfälle eintreten. Insbesondere wird für $Q = 1$ auch $G(Q) = 1$, in Übereinstimmung mit der Tatsache, dass sowohl mit Sicherheit angenommen werden kann, dass der Wert der Grundwahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 liegt als auch, dass mehr als r Todesfälle eintreten. Für $Q = 0$ wird ebenfalls $G(Q) = 0$; d. h. es kann mit Sicherheit angenommen werden, dass die Grundwahrscheinlichkeit nicht 0 ist, da sonst nicht r Todesfälle eingetreten wären. Ebenso kann mit Sicherheit angenommen werden, dass bei der Sterblichkeit 0 nicht mehr als r Todesfälle eintreten.

Selbstverständlich behält der vorliegende Satz auch für andere Fälle geschlossener Gesamtheiten seine Gültigkeit bei. Wenn wir ihn hier besonders in Verbindung mit der Sterblichkeit in Zusammenhang gebracht haben, so geschah das im Hinblick auf seine praktische Bedeutung.

Für die Auswertung der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist zu beachten, dass die rechte Seite die Summenwahrscheinlichkeit einer Bernoullischen Verteilung darstellt. Bei grösseren Werten von n kann zur Auswertung des Ausdrucks das Gaußsche Integral benützt werden. Es ist dann

$$G(Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\nu} e^{-x^2} dx \quad \text{wobei} \quad \nu = \frac{nQ - r - 0{,}5}{\sqrt{2nPQ}} \quad \text{zu setzen ist.}$$

Als Beispiel betrachten wir folgenden Fall: In einem Bestand von 300 gleichaltrigen Rentenbezügern sind 9 Todesfälle eingetreten, während nach den technischen Grundlagen (Sterbetafel) 12 erwartet wurden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich hier um eine Untersterblichkeit gehandelt hat?

Nach dem soeben abgeleiteten Satz ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich gross wie die Wahrscheinlichkeit, dass im gleichen Bestand mehr als 9 Todesfälle eintreten, wenn 12 zu erwarten sind. Ihre Bestimmung gestaltet sich daher sehr einfach. Wir haben zu setzen $nQ = 12$; $r = 9$. Damit wird $\nu = 0{,}52$ und $G(Q) = 0{,}77$. Es kann somit mit der Wahrscheinlichkeit von 0,77 geschlossen werden, dass im vorliegenden Fall eine Untersterblichkeit vorgelegen hat.