Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 45 (1945)

Artikel: Verteilungsfunktionen und ihre Auszeichnung durch Funktionalgleichungen

Autor: Haller, B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555103

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Verteilungsfunktionen und ihre Auszeichnung durch Funktionalgleichungen

Von *B. Haller,* Bern

Fast alle Wissenschaften bedienen sich in neuerer Zeit mehr und mehr statistischer Methoden in ihren Forschungsarbeiten. Entsprechend dieser wachsenden Bedeutung werden diese Methoden ständig ausgebaut und weiterentwickelt und haben heute einen bemerkenswerten Stand erreicht. Eine der häufigsten Aufgaben besteht nun darin, die durch die statistischen Erhebungen erhaltenen Daten für die Untersuchung in geeigneter Form darzustellen. Dies ist in vielen Fällen die mathematische Funktion. Die beträchtliche Zahl verwendbarer Funktionen und die grosse bestehende Freiheit bei deren Auswahl sind aber nicht immer von Vorteil, da oft gebräuchliche und einfache Funktionen dort verwendet werden, wo eine andere viel zweckmässiger wäre. Eine Aufsuchung der geeignetsten Funktion ist aber dadurch erschwert, dass das Wissensgut in der Literatur stark zerstreut und oft nicht leicht auffindbar ist. Die vorliegende Arbeit stellt eine Zusammenfassung dieses Stoffes dar im Hinblick auf das Problem, für gewisse Funktionalgleichungen, welche in vielen statistischen Problemen von grundlegender Bedeutung sind, explizite Lösungen finden zu können.

I. Verteilungsfunktionen

1. Definition der Verteilungsfunktion

Eine Funktion $F(x)$ wird als Verteilungsfunktion bezeichnet, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

a) $F(x)$ ist im Intervall $-\infty < x < \infty$ definiert;

b) $F(x)$ ist monoton nicht abnehmend, und es gilt

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \text{ und}$$

$$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

$F(x)$ besitzt also nur Unstetigkeiten erster Art, d. h. Sprünge. Man betrachtet zwei Verteilungsfunktionen, die sich nur durch die Funktionswerte in den Unstetigkeitsstellen unterscheiden, nicht als verschieden und normiert deshalb die Verteilungsfunktionen durch die Bedingung

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(F(x+0) + F(x-0)\right) \begin{cases} F(x+0) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} F(x+\varepsilon) \\ F(x-0) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} F(x-\varepsilon) \end{cases}$$

Die aufgeführten Grenzwerte existieren als Folge der Monotonie (einseitige Stetigkeit). Vgl. Carathéodory **1**, S. 150 [1]).

Die Menge der Sprungstellen einer Verteilungsfunktion wird ihr Punktspektrum P genannt, während die Menge der Stellen, in deren Umgebung die Verteilungsfunktion nicht konstant ist, ihr Gesamtspektrum S heisst:

$$x \subset P: \quad F(x+0) \neq F(x-0)$$

$$x \subset S: \quad F(x+\varepsilon) \neq F(x-\varepsilon) \qquad (\varepsilon > 0).$$

Das Gesamtspektrum einer Verteilungsfunktion enthält stets mindestens einen Punkt und ist abgeschlossen, während das Punktspektrum einer solchen Funktion eine nicht notwendig abgeschlossene, höchstens abzählbare Teilmenge des Gesamtspektrums darstellt, die auch leer sein kann (Wintner **2**).

2. Arten von Verteilungsfunktionen

Man unterscheidet folgende Arten von Verteilungsfunktionen:

a) Totalstetige Verteilungsfunktionen:

Für diese Funktionen existiert zu $F(x)$ eine im Lebesgueschen Sinn (Lévy **6**, S. 31) integrierbare Dichtefunktion $f(x)$ derart, dass

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy.$$

Die Dichtefunktion erfüllt mit Rücksicht auf die der Verteilungsfunktion auferlegten Bedingungen folgende Vorschriften:

---

[1]) Die fett gedruckten Zahlen verweisen auf das Literaturverzeichnis.

1. $f(x)$ ist definiert in $-\infty < x < \infty$.
2. $f(x) \geqq 0$.
3. $f(x)$ ist in jedem endlichen Intervall im Lebesgueschen Sinn integrierbar.
4. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.

Da Dichtefunktionen, welche sich nur in den Punkten einer Menge vom Masse Null unterscheiden, zur gleichen Verteilungsfunktion $F(x)$ führen, betrachten wir derartige Dichtefunktionen nicht als verschieden und werden im folgenden von *der* Dichtefunktion einer Verteilungsfunktion sprechen.

Verteilungen, welche durch totalstetige Verteilungsfunktionen dargestellt werden, heissen auch geometrische Verteilungen.

b) Reinunstetige Verteilungsfunktionen:

Eine reinunstetige Verteilungsfunktion besitzt nur endlich oder abzählbar viele Wachstumsstellen; sie kann daher höhere Werte nur durch Sprünge annehmen. Falls wir die Grösse des Sprunges an der Stelle x_i mit f_i bezeichnen und die «unechte Verteilungsfunktion» $E(x)$ durch

$$E(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

definieren, so können wir in diesem Falle $F(x)$ darstellen als

$$F(x) = \sum_i f_i \cdot E(x - x_i).$$

Neben Treppenfunktionen sind in diesem Fall auch stetswachsende Funktionen enthalten, deren Sprungstellen überall dicht liegen.

c) Reinsinguläre Verteilungsfunktionen:

Eine dritte Art von Verteilungsfunktionen, die nicht auf die beiden ersten zurückführbar ist, wird dargestellt durch eine stetige Verteilungsfunktion, deren Wachstumsstellen jedoch eine Menge vom Masse Null bilden, ohne aber nur abzählbar oder in endlicher Anzahl vorhanden zu sein. Diese reinsingulären Verteilungsfunktionen stellen die Inversen der oben erwähnten stetswachsenden Funktionen mit

überall dicht liegenden Sprungstellen dar; für die normalerweise zur Verwendung gelangenden Verteilungsfunktionen fallen sie jedoch ausser Betracht. Wir werden uns mit ihnen in dieser Arbeit nicht näher befassen.

Die drei Arten von Verteilungsfunktionen können in einfacher Weise dadurch veranschaulicht werden, dass man sie durch verschiedenartige Verteilungen einer Masse der Grösse 1 darstellt:

a) Der totalstetigen Verteilungsfunktion entspricht dann die kontinuierliche Verteilung dieser Masse mit der Dichte $f(x)$ auf die ganze Achse.

b) Der reinunstetigen Verteilungsfunktion entspricht dagegen die Zuordnung von Teilmassen endlicher Grösse zu diskreten, in endlicher oder abzählbarer Zahl vorhandenen Punkten der Achse.

c) Reinsinguläre Verteilungsfunktionen sind dann darzustellen als kontinuierliche Verteilung der Gesamtmasse auf die Punkte einer nicht abzählbaren Nullmenge. Kein Punkt erhält dann eine Masse von endlicher Grösse, die Dichte der Verteilung ist jedoch überall unendlich gross.

Neben den erwähnten drei reinen Typen sind — nach entsprechender Normierung — natürlich auch beliebige Kombinationen derselben als Verteilungsfunktionen möglich. Derartige allgemeine Verteilungsfunktionen lassen sich stets in eindeutiger Weise in drei noch zu normierende Teilfunktionen der oben beschriebenen Art zerlegen (Cramér **2**, S. 17).

3. Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitstheorie

X stelle eine unabhängige und zufällige Variable dar, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung durch die Verteilungsfunktion $F(x)$ gegeben sei. Dann stellt $F(x)$ die Wahrscheinlichkeit dafür dar, dass die Variable X kleiner als x ausfalle, vermehrt um die halbe Wahrscheinlichkeit dafür, dass $X = x$ wird. Falls wir es speziell mit einer reinen Verteilungsfunktion der oben beschriebenen Arten zu tun haben, können wir weiter folgendes aussagen:

a) Falls $F(x)$ totalstetig ist, stellt die Dichtefunktion $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür dar, dass $X = x$ wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass X grösser als a, jedoch kleiner als b ausfällt, kann ausgedrückt werden durch

$$W(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

b) Im Falle einer reinunstetigen Verteilungsfunktion kann die zufällige Variable nur gewisse diskret verteilte Werte x_i annehmen. Bezeichnet man mit f_i die Wahrscheinlichkeit, mit der der Wert x_i angenommen wird, so kann $F(x)$ dargestellt werden als

$$F(x) = \sum_i f_i + \frac{f_n}{2},$$

wobei sich die Summe über die links von x liegenden Abszissenwerte erstreckt und das Glied $\frac{f_n}{2}$ nur dann auftritt, falls x auf einen dieser ausgezeichneten Abszissenpunkte fällt.

c) Ist die Verteilungsfunktion reinsingulär, so kann die zufällige Variable wiederum nur gewisse diskret verteilte Werte annehmen. Um jedoch $F(x)$ mittels der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten (die nirgends eine endliche Grösse aufweisen) darstellen zu können, erweist es sich als zweckmässig, den Stieltjesschen Integralbegriff zu verwenden.

4. Das Stieltjessche Integral

Dieser Integralbegriff wird uns nicht nur erlauben, reinsinguläre Verteilungsfunktionen als unendliche Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten der links eines bestimmten Punktes liegenden Abszissenwerte darzustellen, sondern wir werden uns seiner hauptsächlich deswegen bedienen, weil er uns gestatten wird, mit beliebigen Verteilungsfunktionen Integraloperationen durchzuführen, unbekümmert darum, um was für Arten von Funktionen es sich dabei handelt. Da wir uns die allgemeine Verteilungsfunktion aus Teilfunktionen der drei möglichen Arten zusammengesetzt vorstellen müssen, bildet die Einführung dieses Integrals eine grosse Vereinfachung in der Behandlung derartiger Funktionen.

Definition: Zwei Funktionen $F(x)$ und $G(x)$ seien im Intervall (a, b) von beschränkter Schwankung, dann existiert der als Stieltjessches Integral bezeichnete Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} G(\xi_i)\,[F(x_{i+1}) - F(x_i)] = \int_a^b G(x)\,dF(x),$$

falls $F(x)$ und $G(x)$ im Intervall (a, b) keine gemeinsamen Unstetigkeitsstellen besitzen (Schmidt **1**, S. 123). Dabei stellen die x_i Teilpunkte der Abszisse dar, welche die Beziehung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ erfüllen, während für ξ_i die Bedingung $x_{i+1} \geqq \xi_i \geqq x_i$ gilt. Ausserdem ist noch die Feinheitsbedingung $d_n \to 0$ $(n \to \infty)$, wo $x_{i+1} - x_i \leqq d_n$ $(i = 0, 1, \ldots n-1)$ gilt, zu beachten.

Nachstehend sollen die Grundeigenschaften des Stieltjesschen Integrals kurz zusammengestellt werden [1]). Für weiteres Studium verweisen wir auf Perron (**1**).

$$a)\quad \int [G_1(x) + G_2(x)]\, dF(x) = \int G_1(x)\, dF(x) + \int G_2(x)\, dF(x)$$

$$\int [G(x) + C]\, dF(x) = \int G(x)\, dF(x) + C\,(F(b) - F(a))$$

$$\int G(x)\, d[F_1(x) + F_2(x)] = \int G(x)\, dF_1(x) + \int G(x)\, dF_2(x)$$

$$\int G(x)\, d[F(x) + C] = \int G(x)\, dF(x)$$

$$b)\quad \int G(x)\, d[C \cdot F(x)] = \int G(x)\, C dF(x) = C \cdot \int G(x)\, dF(x)$$

$$c)\quad \int_a^b G(x)\, dF(x) + \int_b^c G(x)\, dF(x) = \int_a^c G(x)\, dF(x)$$

$$d)\quad \int G(x)\, dF(x) = G(y)\,[F(b) - F(a)] \quad a \leqq y \leqq b$$

$$\left| \int G(x)\, dF(x) \right| \leqq \int |G(x)|\, dF(x) \leqq \int M dF(x) = M\,[F(b) - F(a)], \quad |G(x)| \leqq M$$

$$e)\quad \int_a^b G(x)\, dF(x) = G(x)\, F(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)\, dG(x)$$

$$f)\quad \lim_{n \to \infty} \int G_n(x)\, dF(x) = \int G(x)\, dF(x), \text{ falls in } (a, b) \text{ gleichmässig } G_n(x) \to G(x)$$

$$g)\quad \int_a^\infty G(x)\, dF(x) = \lim_{u \to \infty} \int_a^u G(x)\, dF(x)$$

Da sich jede beliebige Verteilungsfunktion stets in eindeutiger Weise in drei Teilfunktionen der in § 2 erwähnten Arten zerlegen lässt, kann das Stieltjessche Integral einer Funktion von beschränkter Schwankung $G(x)$ mit der Verteilungsfunktion $F(x)$ als Belegung entsprechend zerlegt werden:

$$\int G(x)\, dF(x) = c_1 \int G(x)\, f(x)\, dx + c_2 \sum_i G(x_i)\, f_i + c_3 \int G(x)\, dF_3(x); \quad c_1 + c_2 + c_3 = 1,\ c_i \geqq 0.$$

---

[1]) Wo nicht anders angegeben, ist als untere und obere Grenze der Integrale a bzw. b zu setzen.

5. Beziehungen zwischen Verteilungsfunktionen

a) Eine Verteilungsfunktion $\overline{F}(x)$ heisst *konjugiert* zu einer andern $F(x)$, falls die Relation gilt:

$$\overline{F}(x) = 1 - F(-x).$$

b) Eine Verteilungsfunktion $F(x)$ heisst *symmetrisch,* falls sie mit ihrer Konjugierten identisch ist; es gilt dann also

$$F(x) + F(-x) = 1.$$

c) Eine Verteilungsfunktion $F_1(x)$ heisst im *engern Sinn ähnlich* zu einer andern Verteilungsfunktion $F(x)$, falls sie sich von dieser nur durch die Präzision unterscheidet, d. h. falls

$$F_1(x) = F\left(\frac{x}{a}\right) \text{ ist.}$$

Bei totalstetigen Verteilungsfunktionen gilt für die Dichtefunktion entsprechend

$$f_1(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right).$$

Alle zu einer bestimmten Verteilungsfunktion im engern Sinne ähnlichen Verteilungsfunktionen heissen zum gleichen *Typ* gehörig.

d) Eine Verteilungsfunktion $F_1(x)$ heisst im *weitern Sinn ähnlich* zu einer andern Verteilungsfunktion $F(x)$, falls sie neben einer Massstabänderung auch durch eine Nullpunktverschiebung aus $F(x)$ hervorgeht:

$$F_1(x) = F\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

$$f_1(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Alle Verteilungsfunktionen, die zu einer bestimmten Verteilungsfunktion im weitern Sinne ähnlich sind, heissen zur gleichen *Klasse* gehörig.

6. Zusammensetzung von Verteilungsfunktionen

Die *Linearkombination* von Verteilungsfunktionen mit positiven Koeffizienten liefert bei entsprechender Normierung wieder eine Verteilungsfunktion, nämlich

$$\frac{\sum_i c_i \cdot F_i(x)}{\sum_i c_i} = H(x).$$

Die wichtigste Art der Zusammensetzung von Verteilungsfunktionen stellt die *Faltung* dar, die durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x-y)\, dF(y) = H(x)$$

definiert ist. Diese Operation, welche in abgekürzter Form als

$$G(x) * F(x) = H(x)$$

dargestellt wird, liefert uns die Verteilungsfunktion der Summe $X+Y$ zweier willkürlicher und unabhängiger Variablen, deren eine (X) nach der Verteilungsfunktion $F(x)$ und deren andere (Y) nach $G(x)$ verläuft (Wintner **7**). Sie besitzt folgende Eigenschaften:

a) Die Resultatfunktion der Faltung zweier Verteilungsfunktionen ist wieder eine Verteilungsfunktion, falls an den gemeinsamen Sprungstellen von $F(x)$ und $G(x)$ die Definition durch die bereits erwähnte Normierung ergänzt wird.

b) Die Faltung ist kommutativ und assoziativ:

$$G * F = F * G$$

$$G * (F * E) = (G * F) * E = G * F * E.$$

c) Die Faltung symmetrischer Verteilungsfunktionen ergibt wieder symmetrische Verteilungsfunktionen (Wintner **7**).

d) Die Faltung der zu zwei Verteilungsfunktionen F und G konjugierten Verteilungsfunktionen liefert die konjugierte Verteilungsfunktion zur Faltung der ursprünglichen Funktionen (Wintner **7**):

$$\overline{F} * \overline{G} = \overline{(F * G)}.$$

e) Das Punkt- und Gesamtspektrum der Resultatfunktion entsteht durch vektorielle Addition der entsprechenden Spektra der gegegebenen Verteilungsfunktionen (Wintner **2**).

f) Die Momente M_i der Resultatfunktion berechnen sich aus den Momenten M'_i und M''_i der ursprünglichen Funktionen nach der Formel

$$M_i = (M' + M'')^i, \qquad M_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i \, dF(x),$$

wobei die Potenzen M'^i und M''^i durch M'_i bzw. M''_i zu ersetzen sind (Lévy **2**, S. 183).

Während sich also die Mittelwerte M_1 bei der Faltung einfach addieren, setzen sich die Streuungen

$$s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_1)^2 \, dF(x)$$

nach der Formel

$$s^2 = s'^2 + s''^2$$

zusammen. Bei der Faltung kann also die Streuung nie abnehmen.

g) Wenn nur eine der beiden ursprünglichen Verteilungsfunktionen stetig bzw. totalstetig ist, so gilt dies auch für die Resultatfunktion (Lévy **2**, S. 189), wobei höchstens der Nullpunkt eine Ausnahme machen kann (Raikov **2**).

h) Falls für eine totalstetige Teilfunktion einer Faltung der Absolutwert der ersten (2., 3., ... n-ten) Ableitung nirgends grösser als eine bestimmte Zahl k ist, so gilt dasselbe für die Resultatfunktion (Lévy **2**, S. 189).

7. Folgen von Verteilungsfunktionen

Man nennt eine Folge von Verteilungsfunktionen konvergent, falls eine Verteilungsfunktion derart existiert, dass in jedem Abszissenpunkt x gilt:

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x).$$

Folgende Aussagen sind in diesem Zusammenhang von Interesse:

a) Jede Verteilungsfunktion der Form $F(jx)$, $F(0) = \frac{1}{2}$, strebt

für $j \to \infty$ gegen die unechte Verteilungsfunktion $E(x)$ (vgl. I 2*b*) und für $j \to 0$ entweder gegen die Funktion $D(x) = F(0)$ oder, falls $F(x)$ im Nullpunkt unstetig ist, gegen

$$D(x) = \begin{cases} F(+0) & x > 0 \\ F(-0) & x < 0. \end{cases}$$

Die Funktion $D(x)$ stellt jedoch keine Verteilungsfunktion mehr dar. Wir haben damit gerade ein Beispiel dafür erhalten, dass eine konvergente Folge von Verteilungsfunktionen als Grenzfunktion eventuell keine Verteilungsfunktion haben kann.

b) Aus $F_n(x) \to F(x)$ und $F_n(x) \to G(x)$ folgt $F(x) \equiv G(x)$.

c) Sind alle Verteilungsfunktionen der Folge symmetrisch, so ist bei Konvergenz auch die Grenzfunktion symmetrisch.

d) Eine Verteilungsfunktion $F(x)$ strebt dann und nur dann gegen die Klasse der Verteilungsfunktion $G(x)$, falls $a_n > 0$ und b_n als Funktionen von n derart auffindbar sind, dass in jedem Stetigkeitspunkt von $G(x)$ gilt (Lévy **2**, S. 202):

$$\lim_{n \to \infty} F(a_n x + b_n) = G(x).$$

e) Eine Verteilungsfunktion $F(x)$ strebt dann und nur dann gegen den Typ einer Verteilungsfunktion $G(x)$, falls $a_n > 0$ als Funktion von n derart angebbar ist, dass in jedem Stetigkeitspunkt von $G(x)$ gilt (Lévy **2**, S. 202):

$$\lim_{n \to \infty} F(a_n x) = G(x).$$

8. Bemerkung über mehrdimensionale Verteilungsfunktionen

Häufig treten in der Praxis auch Verteilungsfunktionen von mehreren Variablen auf, so speziell bei Korrelationsproblemen. Zur Untersuchung werden diese Funktionen vorteilhaft in einem n-dimensionalen Raum dargestellt. In der vorliegenden Arbeit soll jedoch auf diese allgemeineren Fragen nicht eingetreten werden, wir verweisen deshalb den Leser auf die Arbeit von Jessen und Wintner (**1**) und deren sehr reichhaltiges Literaturverzeichnis.

II. Die charakteristischen Funktionen

Bevor wir an die Formulierung der zu untersuchenden Probleme gehen, sollen noch die charakteristischen Funktionen behandelt werden, welche sich später als ein sehr geeignetes Mittel erweisen werden, um auftretende Funktionalgleichungen und Integralbeziehungen in wesentlich einfacherer Form darstellen zu können. Der Begriff dieser Funktion findet sich unter anderer Bezeichnung bereits bei Laplace und Cauchy; nach Poincaré beschäftigte sich dann erstmals Lévy (1925) in eingehender Weise mit ihnen und führte auch eine neue Schreibweise ein, welche die Aufstellung einer einfachen Umkehrformel gestattete.

1. Definition der charakteristischen Funktion

Es sei $F(t)$ eine Verteilungsfunktion und z reell, dann wird die charakteristische Funktion $\varphi(z)$ von $F(t)$ durch das Integral

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt}\, dF(t)$$

dargestellt. Da

$$|\varphi(z)| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{izt}|\, dF(t) \leqq \int_{-\infty}^{\infty} dF(t) = 1,$$

konvergiert das Integral für alle z absolut.

Die charakteristische Funktion ist nichts anderes als die in Stieltjesscher Gestalt geschriebene Fourier-Transformierte der Funktion $F(x)$. Der Faktor $i = \sqrt{-1}$ im Exponent wurde von Lévy (**2**, S. 161) eingeführt, er vereinfacht die Konvergenzverhältnisse und erleichtert die Umkehrung.

Da die Grösse

$$W(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x)\, dF(x)$$

als Erwartungswert von y bezeichnet wird, stellt die charakteristische Funktion den Erwartungswert von e^{izt} dar.

2. Eigenschaften der charakteristischen Funktionen

a) Die charakteristische Funktion einer Verteilungsfunktion ist stetig, da das Integral in jedem abgeschlossenen Intervall gleichmässig konvergiert.

b) Für $z = 0$ nimmt jede charakteristische Funktion den Wert 1 an:

$$\varphi(0) = 1.$$

c) Die «normierte» Linearkombination und das Produkt zweier charakteristischer Funktionen sind wieder charakteristische Funktionen (Bochner **3**).

d) Für die konjugiert komplexe Funktion besteht die Relation:

$$\overline{\varphi(z)} = \varphi(-z).$$

e) Die charakteristische Funktion einer symmetrischen Verteilungsfunktion ist reell.

f) Die charakteristischen Funktionen stehen mit den Momenten der Verteilungsfunktionen in enger Beziehung. Es gilt nämlich, falls $M_p < \infty$,

$$\varphi^{(p)}(z)\,\Big|_{z=0} = i^p \int_{-\infty}^{\infty} x^p e^{izx}\, dF(x)\,\Big|_{z=0} = i^p M_p.$$

Damit $\varphi(z)$ als Funktion der komplexen Veränderlichen z bei $z = 0$ regulär ist, müssen notwendig alle Momente M_p ($p = 0, 1, 2, \ldots$) existieren. In diesem Falle gilt für die charakteristische Funktion die Potenzreihenentwicklung

$$\varphi(z) = M_0 + ziM_1 - \frac{z^2 M_2}{2} - \frac{z^3 i M_3}{3!} + \ldots$$

g) Falls eine Folge von charakteristischen Funktionen $\varphi_n(z)$ in jedem endlichen Intervall gleichmässig gegen die Grenzfunktion $\varphi(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(z)$ konvergiert, gehört diese ebenfalls zur Menge der charakteristischen Funktionen (Bochner **3**).

3. Die Umkehrformel für charakteristische Funktionen

Nach Lévy (**2**, S. 166ff.) kann aus jeder charakteristischen Funktion die ursprüngliche Verteilungsfunktion eindeutig aus folgender Formel zurückerhalten werden:

$$F(x) = F(0) + \frac{1}{2\pi i} HW \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-izx}}{z} \varphi(z)\, dz.$$

Dabei bedeutet

$$HW \int_{-\infty}^{\infty} g(z)\, dz$$

den Cauchy-Hauptwert des Integrals, d. h.

$$\lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} g(z)\, dz,$$

und es ist die Konstante $F(0)$ durch die Bedingung $F(-\infty) = 0$ zu bestimmen.

Die Eindeutigkeit der Umkehrformel gestattet uns, eine Verteilungsfunktion durch blosse Angabe ihrer charakteristischen Funktion $\varphi(z)$ zu definieren. Dies hat dazu beigetragen, die Bedeutung dieser Funktionen zu heben. Wir werden allerdings im nächsten Abschnitt sehen, dass nicht zu jeder beliebig gewählten Funktion $\varphi(z)$ eine zugehörige Verteilungsfunktion existiert, selbst wenn sogar die oben erwähnten Eigenschaften alle vorhanden sind.

Falls die charakteristische Funktion die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(z)|\, dz < \infty$$

erfüllt, folgt aus der obigen Umkehrformel, dass die zugehörige Verteilungsfunktion $F(x)$ eine stetige und beschränkte Ableitung besitzt, die wie folgt dargestellt werden kann (Wintner **7**):

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi} HW \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} \varphi(z)\, dz.$$

Ist anderseits $F(x)$ unstetig, so ist der Sprung im Punkte x erhältlich aus der Formel (Cramér **2**, S. 24)

$$F(x+0) - F(x-0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-ixz} \varphi(z)\, dz.$$

Dieser Grenzwert existiert für jedes reelle x, er verschwindet an den Stetigkeitsstellen der Verteilungsfunktion.

Zahlreiche weitere Eigenschaften der Verteilungsfunktionen sind in ähnlicher Weise aus dem Verhalten der entsprechenden charakteristischen Funktionen erkennbar, wobei speziell das asymptotische Verhalten von $\varphi(z)$ interessante Beziehungen ergibt (vgl. z. B. Dugué **1**).

4. Das Darstellungsproblem

Wie schon erwähnt, genügen die unter Abschnitt 2 aufgeführten Eigenschaften nicht, um eine charakteristische Funktion als solche zu charakterisieren. Selbst wenn das Umkehrungsintegral konvergiert, sind wir nur sicher, eine reelle Funktion mit der totalen Variation 1 zu erhalten, ohne jedoch auch voraussagen zu können, ob diese monoton verläuft (Lévy **6**, S. 39). Hier tritt eine zurzeit noch nicht überwundene Schwierigkeit auf, indem entweder nur für bestimmte Klassen von Funktionen die Zugehörigkeit zu den charakteristischen Funktionen bekannt ist oder aber die hinreichenden und notwendigen Kriterien in der praktischen Anwendung nicht einfacher sind als die Ausführung der Umkehrung und der Untersuchung des Verlaufs der Funktion.

Folgende Klassen von Funktionen bestehen sicher aus charakteristischen Funktionen:

a) Alle Funktionen der Gestalt $\varphi(z) = e^{-|z|^a}$ mit $0 < a < 2$. Für $a > 2$ sind diese Funktionen sicher keine charakteristischen Funktionen mehr (Bochner **1**, S. 76).

b) Alle geraden Funktionen $\varphi(z)$, welche für $z \geqslant 0$ die Bedingungen $\varphi'(z) < 0$ und $\varphi''(z) > 0$ erfüllen (Pólya **2**).

c) Alle Funktionen, welche mit Hilfe einer willkürlich wählbaren, nicht abnehmenden Funktion $G(x)$ darstellbar sind als (Bochner **3**)

$$\varphi(z) = \exp\left(-z^2 \int_0^\infty \frac{dG(x)}{|z|^2 + x^2}\right).$$

d) Alle Funktionen, die darstellbar sind als

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z+t)\,\bar{g}(z-t)\,dt,$$

wobei $g(t)$ und $\bar{g}(t)$ zueinander konjugiert komplexe Funktionen der reellen Variablen t darstellen (Mathias **1**).

Folgende von Bochner und Khintchine stammenden Bedingungen sind notwendig und hinreichend dafür, dass eine Funktion charakteristische Funktion einer Verteilungsfunktion ist (Lévy **6**, S. 39):

a) Es sei $F(0) = 1$ und der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(z_i - z_j)\, u_i \bar{u}_j \geqslant 0 \text{ und reell,}$$

wie auch die ganze Zahl n, die reellen Zahlen z_i und die komplexen Zahlen u_i mit ihren Konjugierten $\bar{u}_i$ gewählt werden (Bochner **2**).

b) $\varphi(z)$ sei Grenzfunktion einer in jedem endlichen Intervall gleichmässig konvergenten Folge von Funktionen der Form

$$A_n(z) = \frac{1}{N} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_n(z+t)\, \bar{g}_n(t)\, dt$$

mit

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |\, g_n(t)\, |^2\, dt,$$

wobei $g(t)$ und $\bar{g}(t)$ zueinander konjugiert komplexe Funktionen der reellen Variablen t darstellen (Khintchine **5**).

5. Abbildungseigenschaften der charakteristischen Funktionen

Wie schon erwähnt, zeichnen sich die charakteristischen Funktionen dadurch aus, dass in ihrem Funktionenbereiche gewisse komplizierte Beziehungen der Verteilungsfunktionen in wesentlich einfacherer Gestalt abgebildet werden. Wir erwähnen in der Folge kurz einige dieser Abbildungen.

a) Die lineare Substitution.

Der Überführung von $F(x)$ in $F\left(\frac{x-r}{a}\right)$ entspricht bei den charakteristischen Funktionen der Übergang von $\varphi(z)$ zu $e^{riz}\,\varphi(az)$, wie sich leicht durch Ausrechnung ergibt. Die charakteristischen Funktionen von Verteilungsfunktionen desselben Typs unterscheiden sich also lediglich durch die Präzision, während für Verteilungsfunktionen derselben Klasse exponentielle Zusatzfaktoren auftreten.

b) Die Faltung.

Hier zeigt sich besonders eindrücklich, wie die von uns gewählte Transformation gewisse transzendente Beziehungen als algebraische Zusammenhänge abzubilden vermag. Durch Umbildung des auftretenden Doppelintegrals zeigt man nämlich, dass die charakteristische Funktion der Faltung zweier Verteilungsfunktionen

dem Produkt
$$F_1(x) * F_2(x) = F_3(x)$$
$$\varphi_1(z) \cdot \varphi_2(z) = \varphi_3(z)$$
der entsprechenden charakteristischen Funktionen entspricht.

Da der Faltungsprozess im Hinblick auf die wahrscheinlichkeitstheoretische Bedeutung einen erheblichen Teil der Theorie der Verteilungsfunktionen beherrscht, ist mit diesem «Faltungssatz» eine Relation von grundlegender Bedeutung gewonnen.

c) Konvergente Folgen von Verteilungsfunktionen.

In bezug auf deren Grenzgesetze gilt folgender Satz:

Eine Folge von Verteilungsfunktionen $F_n(x)$ konvergiert dann und nur dann gegen eine Grenz-Verteilungsfunktion $F(x)$, falls für ein beliebiges positives a die charakteristischen Funktionen $\varphi_n(z)$ gleichmässig in $|z| < a$ konvergieren. Ist dies der Fall, dann ist die Grenzfunktion der charakteristischen Funktionen die charakteristische Funktion von $F(x)$, und die Konvergenz der charakteristischen Funktionen erfolgt gleichmässig in jedem endlichen Intervall (Cramér **2**, S. 29).

Dieser Satz wird falsch, wenn auf die Bedingung der gleichmässigen Konvergenz in der Umgebung von Null verzichtet wird. So besitzt z. B. die Folge der Funktionen
$$\varphi_n(z) = e^{-nz^2}$$
für $n \to \infty$ eine Grenzfunktion, jedoch stellt diese nicht mehr die charakteristische Funktion einer Verteilungsfunktion dar. Für die Verteilungsfunktionen gilt
$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \frac{1}{2}.$$
Diese Grenzfunktion ist selbst keine Verteilungsfunktion mehr!

Anderseits genügt die Voraussetzung, dass die Grenzfunktion der Folge der charakteristischen Funktionen selber eine charakteristische Funktion sei und dass diese Folge für jedes z konvergiere, damit der Satz wieder richtig wird. Ferner genügt auch die Bedingung, dass für ein beliebiges positives a die Folge $\varphi_n(z)$ in $|z| < a$ gegen eine Grenzfunktion konvergiert, welche im Punkte $z = 0$ stetig ist. Unser obiges Beispiel erfüllt diese Bedingung nicht, da dort die Grenzfunktion in $z = 0$ eine Unstetigkeit besitzt.

III. Übersicht über die bekannten Verteilungsfunktionen

Nachfolgend sind die in der Literatur auftretenden Verteilungsfunktionen[1]) mit ihren charakteristischen Funktionen in Tabellenform zusammengestellt. In einem zweiten Abschnitt folgen zu diesen Funktionen Bemerkungen über die bisherigen Anwendungen und Hinweise auf die Literatur. Die Verteilungsfunktionen wurden in dieser Zusammenstellung unter Verzicht auf eine Einteilung nach der analytischen Gestalt in der ersten Spalte durchlaufend numeriert, wobei in der Anordnung die reinunstetigen Verteilungsfunktionen vorweggenommen wurden. Die totalstetigen Verteilungsfunktionen bilden den Hauptteil und beginnen mit den Funktionen algebraischer Gestalt.

Um die Darstellung möglichst zu vereinfachen, wurde in der zweiten Spalte nicht die Verteilungsfunktion $F(x)$, sondern deren Häufigkeitsfunktion $f(x)$ aufgeführt. Diese ist bei reinunstetigen Verteilungsfunktionen definiert als Höhe der Sprünge in den Unstetigkeitsstellen der Verteilungsfunktion und nimmt nur dort von Null verschiedene Werte an, während sie für die totalstetigen Verteilungsfunktionen mit der Dichtefunktion übereinstimmt. Da fast überall die Präzision als 1 angenommen wurde, kann diese bei den meisten Funktionen als weiterer Parameter eingeführt werden, indem $\varphi(z)$ durch $\varphi\left(\frac{z}{a}\right)$ und bei totalstetigen Funktionen $f(x)$ durch $a \cdot f(ax)$ ersetzt wird $(0 < a < \infty)$. In gewissen Fällen, wo explizite Darstellungen der Verteilungsfunktionen möglich sind, wurden sie im zweiten Abschnitt unter den zusätzlichen Bemerkungen aufgeführt.

In der dritten Spalte ist als Definitionsgebiet die Menge der Werte der Variablen bezeichnet, für welche bei reinunstetigen Verteilungsfunktionen Sprünge, bei totalstetigen Verteilungsfunktionen nicht verschwindende Funktionswerte angenommen werden. Die für die Parameter gültigen Bedingungen wurden in der vierten Spalte angegeben. In der fünften Spalte ist die Normierungskonstante angeführt, die zu der in der ersten Spalte angeschriebenen Formel als Faktor hinzutreten muss, damit die «normierte» Häufigkeitsfunktion dargestellt wird. Die sechste Spalte enthält die charakteristische Funktion. Bei einigen Verteilungsfunktionen konnten diese nicht explizit angegeben werden. Die Angaben der siebenten Spalte beziehen sich auf die Ausführungen des sechsten Kapitels über die Attraktionsgebiete.

[1]) Vollständigkeit wurde angestrebt bis 1941.

1. Tabellarische Zusammenstellung der Verteilungsfunktionen

Nr.	Häufigkeitsfunktion $f(x)$	Definitionsgebiet	Parameter	Normierungskonstante	Charakteristische Funktion	Attraktionsgebiet: α
1	1	a	a) $a=0$ b) $a \neq 0$	1	e^{aiz}	2
2	$\frac{1}{2}$	$\pm a$	$a \neq 0$	1	$\cos az$	2
3	$\begin{cases} \frac{1}{2}(1+\varepsilon_n) \\ \frac{1}{2}(1-\varepsilon_n) \end{cases}$	0 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$n=1,2,\ldots$ $0 \leqslant \varepsilon_n < 1$	1	$\frac{1}{2}\left[1+\varepsilon_n+(1-\varepsilon_n)\,e^{iz2^{-n}}\right]$	2
4	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$	$0,1,\ldots n$	$0<p<1$ $p+q=1$ $n>0$ ganz	1	$(pe^{iz}+q)^n$	2
5	$\frac{a^x}{x!}$	$0,1,2,\ldots$	$a>0$	e^{-a}	$e^{a(e^{iz}-1)}$	2
6	$\binom{n+x-1}{x} p^x$	$0,1,2,\ldots$	$0<p<1$ $p+q=1$ $n>0$ ganz	q^n	$\left(\frac{q}{1-pe^{iz}}\right)^n$	2
7	$\binom{\frac{h}{d}-1+x}{x} \frac{d^x}{(1+d)^{\frac{h}{d}+x}}$	$0,1,2,\ldots$	$d>-1$ $h>0$ $\frac{h}{d}$ ganz	1	$[1+d(1-e^{iz})]^{-\frac{h}{d}}$	2
8	$\binom{P}{x}\binom{Q}{n-x}$	$0,1,\ldots n$	$P>0,\ Q>0$ P ganz, Q ganz $n>0$ ganz	$\frac{1}{\binom{P+Q}{n}}$	$\frac{\binom{P}{n}}{\binom{P+Q}{n}} F(-n,-Q,P-n+1;e^z)$	2
9	$\sum\limits_{v_1+2v_2+\ldots+nv_n=x} \frac{h_1^{v_1}\cdot h_2^{v_2}\cdot\ldots h_n^{v_n}}{v_1!\,v_2!\ldots v_n!}$	$0,1,2,\ldots$	$h>0$ $n>0$ ganz	$e^{-h_1-h_2\ldots-h_n}$	$e^{\sum\limits_1^n h_v(e^{viz}-1)}$	2

Nr.	Häufigkeitsfunktion $f(x)$	Definitionsgebiet	Parameter	Normierungskonstante	Charakteristische Funktion	Attraktionsgebiet: α
10	$I_x(a)$	$0, 1, 2, \ldots$ $-1, -2, \ldots$	$a > 0$	e^{-a}	$e^{a(\cos z - 1)}$	2
11	$\frac{1}{b-a}$	$a < x < b$		1	$\frac{e^{ibz} - e^{iaz}}{i(b-a)z}$	2
12	$\frac{1}{2a}$	$-a < x < a$	$a > 0$	1	$\frac{\sin az}{az}$	2
13	$ax + \frac{2-a}{2}$	$0 < x < 1$	$\lvert a \rvert \leqslant 2$	1	$\frac{e^{iz}-1}{z^2}\left[a - iz\left(1 + \frac{a}{2}\right)\right] - \frac{ai}{z}$	2
14	$1 - \lvert x \rvert$	$-1 < x < 1$	—	1	$\frac{2}{z^2}(1 - \cos z)$	2
15	$1 - \lvert x \rvert^a$	$-1 < x < 1$	$a > 0$	$\frac{a+1}{2a}$		2
16	$(1 + x)^a$	$-1 < x < 0$	$a > 0$	$a + 1$		2
17	$(1 - \lvert x \rvert)^a$	$-1 < x < 1$	$a > 0$	$\frac{a+1}{2}$		2
18	$(1 - \lvert x \rvert^a)^{\frac{n-1}{a}}$	$-1 < x < 1$	$a > 0$ $n > 0$ ganz	$\frac{a\,\Gamma\left(1 + \frac{n}{a}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{a} + 1\right)}$		2
19	$(1 - x^2)^a$	$-1 < x < 1$	$a > -1$ $a \neq 0$	$\frac{\Gamma\left(a + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(a+1)}$	$2^{a+\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(a + \frac{3}{2}\right)\frac{J_{a+\frac{1}{2}}(z)}{z^{a+\frac{1}{2}}}$	2
20	$x^{n-2}(1 - x^2)^{\frac{N-n-2}{2}}$	$0 < x < 1$	$N > 0$ ganz $n > 1$ ganz $N \geqslant n + 1$	$\frac{2\,\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$		2

Nr.	Häufigkeitsfunktion $f(x)$	Definitionsgebiet	Parameter	Normierungskonstante	Charakteristische Funktion	Attraktionsgebiet: α
21	$x^a(1-x)^{n-a}$	$0<x<1$	$n>0$ $0<a<n$	$\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(a+1)\Gamma(n-a+1)}$		2
22	$\left(1+\frac{x}{a}\right)^{va}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{vb}$	$-a<x<b$	$v>0$	$\frac{a^{va}b^{vb}\cdot\Gamma(va+vb+2)}{(a+b)^{va+vb+1}\Gamma(va+1)\Gamma(vb+1)}$		2
23	$\frac{1}{(1+x)^a}$	$-1<x<0$	$0<a<1$	$1-a$		2
24	$\left(\frac{a+x}{b-x}\right)^v$	$-a<x<b$	$\lvert v\rvert<1$	$\frac{\sin v\pi}{(a+b)\cdot v\pi}$		2
25	$\frac{1}{x^a}$	$b<x<\infty$	$a>1$ $b>0$	$(a-1)\,b^{a-1}$		$a-1$ $1<a\leqslant 3$ 2 $a>3$
26	$\frac{(x-1)^b}{x^a}$	$1<x<\infty$	$a>b+1$ $b>-1$	$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-b-1)\Gamma(b+1)}$		2
27	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\infty<x<\infty$	—	$\frac{1}{\pi}$	$e^{-\lvert z\rvert}$	1
28	$\frac{1}{(1+x^2)^2}$	$-\infty<x<\infty$	—	$\frac{2}{\pi}$	$e^{-\lvert z\rvert}(1+\lvert z\rvert)$	2
29	$\frac{1}{(1+x^2)^a}$	$-\infty<x<\infty$	$a>0$	$\frac{\Gamma(a)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(a-\frac{1}{2}\right)}$		2
30	$\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$	$-\infty<x<\infty$	—	$\frac{2}{\pi}$	$e^{-\lvert z\rvert}(1-\lvert z\rvert)$	2
31	$\left(\frac{p-x^2}{q+x^2}\right)^{\frac{m}{p+q}}$	$-\sqrt{p}<x<\sqrt{p}$	$p>0,\ q>0$ $m>0,\ q>p$	$\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)}{\sqrt{\pi p}\,\Gamma(1+k)\,F\left(k,\frac{1}{2},k+\frac{3}{2},-\frac{p}{q}\right)}$ $k=\frac{m}{p+q}$		2

Nr.	Häufigkeitsfunktion $f(x)$	Definitionsgebiet	Parameter	Normierungskonstante	Charakteristische Funktion	Attraktions-gebiet: α
32	e^{-x}	$a < x < b$		$\frac{1}{e^{-a} - e^{-b}}$	$\frac{e^{a(iz-1)} - e^{b(iz-1)}}{(1-iz)(e^{-a}-e^{-b})}$	2
33	e^{-x}	$0 < x < \infty$	—	1	$\frac{1}{1-iz}$	2
34	$x^{a-1} e^{-x}$	$0 < x < \infty$	$a > 0$	$\frac{1}{\Gamma(a)}$	$\left(\frac{1}{1-iz}\right)^a$	2
35	$\left(1+\frac{x}{a}\right)^{va} e^{-vx}$	$-a < x < \infty$	$a > 0$ $v > 0$	$\frac{(av)^{av+1} e^{-av}}{a\Gamma(av+1)}$	$\frac{e^{-aiz}}{\left(1-\frac{iz}{v}\right)^{av+1}}$	2
36	$e^{-\lambda x} x^{a-1} \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \frac{c^v x^{bv}}{\Gamma(bv+a)}$	$0 < x < \infty$	$\lambda > 0,\ c \geqslant 0,\ b \geqslant 0$ $a > 0,\ n = 1, 2, \ldots$	$\frac{\lambda^a}{\left(1+\frac{c}{\lambda^b}\right)^n}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - iz}\right)^a \left(\frac{1+c\left(\frac{1}{\lambda-iz}\right)^b}{1+c\lambda^{-b}}\right)^n$	2
37	$e^{-\lambda x} x^a \sum_{v=1}^{n} A_v x^{v-1}$	$0 < x < \infty$	$\lambda > 0,\ a > -1$ $n = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{\sum_{v=1}^{n} A_v \frac{\Gamma(v+a)}{\lambda^{v+a}}}$	$\frac{\sum_{v=1}^{n} A_v \frac{\Gamma(v+a)}{(\lambda-iz)^{v+a}}}{\sum_{v=1}^{n} A_v \frac{\Gamma(v+a)}{\lambda^{v+a}}}$	2
38	$e^{-\lvert x\rvert}$	$-\infty < x < \infty$	—	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1+z^2}$	2
39	$e^{-\lvert x\rvert}(1+\lvert x\rvert)$	$-\infty < x < \infty$	—	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{1+z^2}\right)^2$	2
40	$e^{-\lvert x\rvert^a}$	$-\infty < x < \infty$	$a > 0$	$\frac{a}{2\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}$		2
41	e^{-x^2}	$-\infty < x < \infty$	—	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	$e^{-\frac{z^2}{4}}$	2

Nr.	Häufigkeitsfunktion $f(x)$	Definitionsgebiet	Parameter	Normierungskonstante	Charakteristische Funktion	Attraktionsgebiet: α
42	$x^a e^{-x^2}$	$0 < x < \infty$	$a > 0$	$\dfrac{2}{\Gamma\left(\dfrac{a+1}{2}\right)}$		2
43	$e^{-x-e^{-x}}$	$-\infty < x < \infty$	—	1	$\Gamma(1-iz)$	2
44	$\dfrac{e^{-x^{-a}}}{x^{a+1}}$	$0 < x < \infty$	$a \neq 0$	a		2 $a<0$ a $0<a<2$ 2 $a \geqslant 2$
45	$\dfrac{1}{x} e^{-\frac{lg^2 x}{2}}$	$0 < x < \infty$	—	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$		2
46	$e^{-h^2 lg^2 \frac{(x-a)(b-m)}{(b-x)(m-a)}}$	$a < x < b$	$-\infty \leqslant a < m < b \leqslant \infty$ $h > 0$			2
47	$\dfrac{e^{-\frac{b}{x}}}{x^{a+1}}$	$0 < x < \infty$	$a > 0$ $b > 0$	$\dfrac{b^a}{\Gamma(a)}$	$\dfrac{2}{\Gamma(a)} (biz)^{\frac{a}{2}} K_a\left(2\sqrt{-biz}\right)$	2
48	$\dfrac{1}{x} e^{-ax-\frac{b}{x}}$	$0 < x < \infty$	$a > 0$ $b > 0$			2
49	$\dfrac{1}{\sqrt{x^3}} e^{-\frac{1}{2x}}$	$0 < x < \infty$	—	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$e^{(-1+i)\sqrt{z}}$	½
50	$\dfrac{1}{\sqrt{x^3}} e^{-bx-\frac{a^2}{x}}$	$0 < x < \infty$	$a > 0$ $b > 0$	$\dfrac{a}{\sqrt{\pi}} e^{2a\sqrt{b}}$	$e^{2a(\sqrt{b}-\sqrt{b-iz})}$	2
51	$x^{\frac{p}{s}-1} e^{-ax^{\frac{1}{s}}}$	$0 < x < \infty$	$s \neq 0,\ a > 0$ $p > 0$	$\dfrac{a^p}{\lvert s \rvert \Gamma(p)}$		2
52	$\dfrac{e^{-a \cdot arctg\, x}}{(1+x^2)^b}$	$-\infty < x < \infty$	$a \neq 0,\ b > 0$			2

Nr.	Häufigkeitsfunktion $f(x)$	Definitionsgebiet	Parameter	Normierungskonstante	Charakteristische Funktion	Attraktionsgebiet: α
53	$\frac{1}{e^x+e^{-x}}$	$-\infty<x<\infty$	—	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}\left\lvert\Gamma\left(\frac{1+iz}{2}\right)\right\rvert^2$	2
54	$\frac{1}{\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}$	$-\infty<x<\infty$	—	1	$\lvert\Gamma(1+iz)\rvert^2$	2
55	$\frac{1}{(e^x+e^{-x})^{2a}}$	$-\infty<x<\infty$	$a>0$	$\frac{2\Gamma(2a)}{\Gamma(a)^2}$	$\frac{\left\lvert\Gamma\left(a+\frac{iz}{2}\right)\right\rvert^2}{\lvert\Gamma(a)\rvert^2}$	2
56	$\frac{1}{x^5\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)}$	$0<x<\infty$	—	$\frac{15}{\pi^4}$		2
57	$\frac{lg\,x}{x^a}$	$1<x<\infty$	$1<a$	$(a-1)^2$		$a-1$ $1<a<3$ 2 $a\geqslant 3$
58	$\frac{1}{x^a\,lg\,x}$	$b<x<\infty$	$b>1$ $a>1$	$\frac{1}{-L_i(b^{1-a})}$		$a-1$ $1<a<3$ 2 $a\geqslant 3$
59	$-x^a\,lg\,x$	$0<x<1$	$a>-1$	$(a+1)^2$		2
60	$e^{-\lambda x}\frac{1}{x}I_a(x)$	$0<x<\infty$	$\lambda>1,\ a>0$	$a\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}\right)^a$	$\left(\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda-iz+\sqrt{(\lambda-iz)^2-1}}\right)^a$	2
61	$e^{-\lambda x}x^{\frac{a-1}{2}}I_{a-1}(2\sqrt{x})$	$0<x<\infty$	$\lambda>0,\ a\geqslant 0$	$\lambda^a e^{-\frac{1}{\lambda}}$	$e^{-\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda-iz}\right)}\left(\frac{\lambda}{\lambda-iz}\right)^a$	2
62	$\lvert x\rvert^{\frac{n-1}{2}}K_{\frac{n-1}{2}}(\lvert x\rvert)$	$-\infty<x<\infty$	$n=1,2,\ldots$	$\frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^n$	2

Nr.	Häufigkeitsfunktion $f(x)$	Definitionsgebiet	Parameter	Normierungskonstante	Charakteristische Funktion	Attraktions-gebiet: α
63	$\pi e^{-\lambda x} x^{a-\frac{1}{2}} I_{a-\frac{1}{2}}(x)$	$0 < x < \infty$	$\lambda > 1 \quad a > 0$	$\dfrac{\lvert 1-\lambda^2 \rvert^a}{2^{a-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}\, \Gamma(a)}$	$\left(\dfrac{1-\lambda^2}{1-(\lambda-iz)^2}\right)^a$	2
64	$e^{-\lambda x} \lvert x \rvert^{a-\frac{1}{2}} K_{a-\frac{1}{2}}(\lvert x \rvert)$	$-\infty < x < \infty$	$\lvert \lambda \rvert < 1 \quad a > 0$			
65	$e^{-\lambda x} x^{a-1} M_{b, a-\frac{1}{2}}(x)$	$0 < x < \infty$	$a > 0 \quad b \geqslant 0$ $a \geqslant b \quad \lambda > \frac{1}{2}$	$\dfrac{\left(\lambda^2-\frac{1}{4}\right)^a}{\Gamma(2a)} \left(\dfrac{2\lambda+1}{2\lambda-1}\right)^b$	$\left(\dfrac{4\lambda^2-1}{4(\lambda-iz)^2-1}\right)^a \left(\dfrac{1-\dfrac{iz}{\lambda-\frac{1}{2}}}{1-\dfrac{iz}{\lambda+\frac{1}{2}}}\right)^b$	2
66	$\sum\limits_{v=0}^{\infty} \dfrac{e^{-a} a^v}{v!} f^{*v}(x)$		$a > 0$	1	$e^{a(\varphi(z)-1)}$	
67	$\sum\limits_{v=0}^{\infty} \dfrac{e^{-a} a^v}{v!} \cdot \dfrac{e^{-v} v^n}{x!}$	$0, 1, 2, \ldots$	$a > 0$	1	$e^{a(e^{e^{iz}-1}-1)}$	2
68	$\sum\limits_{v=0}^{\infty} \dfrac{e^{-x} x^v}{v!} \cdot \dfrac{e^{-v} v^n}{n!}$	$0 < x < \infty$	$n = 0, 1, 2, \ldots$	$\dfrac{n!}{\sum\limits_{v=0}^{\infty} e^{-v} v^n}$	$\dfrac{\sum\limits_{v=0}^{\infty} e^{-v} v^n (1-iz)^{-v-1}}{\sum\limits_{v=0}^{\infty} e^{-v} v^n}$	2
69	$\sum\limits_{v=0}^{n} \binom{n}{v} q^{n-v} p^v f^{*v}(x)$		$0 < p < 1$ $p + q = 1$ $n > 0$ ganz	1	$(p\,\varphi(z) + q)^n$	
70	$\sum\limits_{v} w_v(a) \cdot f^{*v}(x)$		(s. Seite 135)	1	$\sum\limits_{v} w_v(a) \,.\, \varphi^v(z)$	

2. Zusatzbemerkungen zu den einzelnen Verteilungsfunktionen

Nr. 1. *a)* $a = 0$. Verteilungsfunktion von Dirac oder «unechte Verteilungsfunktion». Einheitselement in der Faltungsalgebra, da für beliebige Verteilungsfunktionen G stets $F * G = G$ gilt. Expl. Darstellung vgl. Kap. I, Abschnitt 2*b*.

b) $a \neq 0$. Lineare Transformation der unechten Verteilungsfunktion, für die wegen $F\left(\frac{x}{c}\right) = F(x - a(c-1))$ Typ und Klasse zusammenfallen und als «unechte Klasse» bezeichnet werden (Khintchine **6**, Wintner **1**).

Nr. 2. Verteilungsfunktion von Bernoulli.

Unendliche Faltungspotenzen dieser Funktion von der Form $F(a_1 x) * F(a_2 x) * \cdots * F(a_n x) * \cdots$ stellen unter gewissen Bedingungen totalstetige oder reinsinguläre Verteilungsfunktionen («Unendliche Bernoulli-Faltungen») dar. Für $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ entsteht speziell die Verteilungsfunktion Nr. 12 (Wintner **3**, **4**, **5**, **7**, Erdös **1**, **2**, Kawata **1**, Kershner **1**).

Nr. 3. Unendliche Faltungspotenzen dieser Funktion von der Form $F(x, \varepsilon_1) * F(x, \varepsilon_2) * \cdots * F(x, \varepsilon_n) * \cdots$ heissen «unendliche Poisson-Faltungen» und stellen unter gewissen Bedingungen totalstetige oder reinsinguläre Verteilungsfunktionen dar (Hartman & Kershner **1**, **2**, Wintner **6**).

Nr. 4. Binomiale Verteilungsfunktion von Bernoulli.

Verteilungsfunktion der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von x Ereignissen bei n gleichmöglichen Fällen (von Mises **2**, S. 129) Verallgemeinerungen für den Fall der «Mehrwertigkeit» und für «inhomogene Serien» bei Baumberger (**1**, **2**).

Nr. 5. Verteilungsfunktion der «seltenen Ereignisse» von Poisson. Diese Funktion geht durch einen Grenzübergang aus Nr. 4 hervor, falls dort n über alle Grenzen wächst und p wie $\frac{1}{n}$ gegen Null geht. Dementsprechend wird sie dort angewendet, wo Ereignisse mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit auftreten (Kinderselbstmorde, Atomzerfall usw.) (von Mises **2**, S. 148,

Khintchine **1**, S. 17, Riebesell **1**, S. 23, Lévy **6**, S. 85 ff). Auch diese Funktion wurde für «Mehrwertigkeit» und «inhomogene Serien» verallgemeinert (Baumberger **1**, **2**).

Nr. 6. Verteilungsfunktion von Pascal.

Verteilungsfunktion der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von n Ereignissen bei beliebig vielen $(n + x - 1)$ gleichmöglichen Fällen (Risser & Traynard **1**, S. 323, Guldberg **1**, Baumberger **1**).

Nr. 7. Verteilungsfunktion von Eggenberger-Pólya für seltene Ereignisse. Liefert für $d = 0$ als Spezialfall die Funktion Nr. 5 und für speziell gewählte h und d die Funktionen Nrn. 4 und 6 (Eggenberger **1**, Baumberger **1**, Lüders **1**, Guldberg **2**, Riebesell **1**, S. 37).

Nr. 8. Hypergeometrische Verteilungsfunktion.

Verteilungsfunktion für das Eintreffen von x Ereignissen in n Versuchen mit der speziellen Wahrscheinlichkeitsansteckung $j = -\frac{1}{(P + Q)}$ bei $P + Q$ Möglichkeiten. (n Ziehungen aus einer Urne mit P weissen und Q schwarzen Kugeln ohne Zurücklegen der gezogenen Kugeln). Verschwindet die Wahrscheinlichkeitsansteckung, d. h. wird $j = 0$, so geht die Funktion über in Nr. 4 (Fischer **1**, Dieulefait **1**, **2**, Risser & Traynard **1**, S. 327, Guldberg **1**). Die Verallgemeinerung für beliebige Wahrscheinlichkeitsansteckungen ergibt die Verteilungsfunktion von Eggenberger-Pólya für gewöhnliche Ereignisse (Baumberger **1**).

Nr. 9. Verteilungsfunktion von Pollaczek-Geiringer.

Verteilungsfunktion für das Eintreten von x seltenen Ereignissen einzeln oder in Paaren, Tripeln usw. bis höchstens n-Tupeln. Wie aus der Formel ersichtlich ist, handelt es sich um die Faltung der Verteilungsfunktionen für das Eintreten der einzelnen n-Tupel. Anwendungsmöglichkeiten: Mehrlingsgeburten, Unfälle mit mehreren Toten, Blutkörperchenauszählung (Klumpenbildung), Hagelversicherung. Bei Zulassung von n-Tupeln beliebig hoher Ordnung und spezieller Wahl der

h_n geht diese Funktion in Nr. 7 über (Pollaczek-Geiringer **1**, Lüders **1**, Baumberger **1**, Riebesell **1**, S. 37).

Nr. 10. Grenzverteilungsfunktion der Summe von n Zufallsvariablen, die den Wert 0 mit der Wahrscheinlichkeit $\left(1 - \frac{a}{n}\right)$ und die Werte $+1$ und -1 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{a}{2n}$ annehmen, falls n unbeschränkt wächst (vgl. hierzu Nr. 66) (Lévy **1**, Jahnke-Emde **1**, S. 284).
$I_x(a) = i^{-x} \cdot J_x(ia)$ wobei $i = \sqrt{-1}$ und $J_x(a)$ = Besselsche Funktion.

Nr. 11. Verteilungsfunktion für Gleichverteilungen.
Berechnung der Faltungspotenzen durch Tricomi (**1**).

Nr. 12. Glättungsfunktion (Spezialfall von Nr. 11).
Eine beliebige Verteilungsfunktion $g(x)$ wird bei Faltung mit dieser Funktion «geglättet» ($a = 1$):

$$g(x) * f(x) = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} g(x - y)\, dy.$$

Faltungspotenzen und Grenzverhalten werden angegeben von Risser (**1**), Pólya (**1**), Maurer (**1**), Brun (**1**) und Sommerfeld (**1**).

Nr. 13. Lineare Verteilungsfunktion, bei Interpolationsproblemen auftretend (Galvani **1**).

Nr. 14. Dreieck-Verteilungsfunktion von Irwin (Dodd **2**).

Nr. 15. Parabolische Verteilungsfunktion (Dodd **1**).

Nr. 16. Pearsonsche Verteilungsfunktion Typ IX (Elderton **1**).

Nr. 17. Verteilungsfunktion des arithmetischen Mittels aus grösstem und kleinstem Wert von Stichproben aus einer Nr. 12 mit $a = 1$ entsprechenden Verteilung (Dodd **1**).

Nr. 18. Glockenförmige Verteilungsfunktion (Hartman & Wintner **1**).

Nr. 19. Verteilungsfunktion von Pearson Typ II.
Wird $a = \frac{1}{2}$ angenommen, erhält man die elliptische Verteilungsfunktion (Elderton **1**, Dodd **1**).

Tritt auf als Verteilungsfunktion gewisser Korrelationskoeffizienten (Gårding **1**).

Nr. 20. Verteilungsfunktion eines speziellen Korrelationskoeffizienten (Gårding **1**).

Nr. 21. Verteilungsfunktion des Problems von Bayes. Stellt im diskontinuierlichen Falle die Wahrscheinlichkeit dafür dar, dass, falls sich bei n Ziehungen aus einer Urne a schwarze Kugeln ergeben, die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel gerade x ist (von Mises **1**, **2**, S. 153).

Nrn. 22 bis 24. Verteilungsfunktionen von Pearson, Typ I, VIII und XII (Elderton **1**).

Nr. 25. Verteilungsfunktion von Pearson Typ XI, hyperbolische Verteilungsfunktion (Elderton **1**, Castellano **1**, Khintchine **2**).

Nr. 26. Verteilungsfunktion von Pearson Typ VI (Elderton **1**).

Nr. 27. Verteilungsfunktion von Cauchy.
Die explizite Darstellung der Verteilungsfunktion lautet

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.$$

(Lévy **2**, S. 179 ff., **6**, S. 202, Dugué **4**, Dodd **1**).

Nr. 28. Baten (**1**), Dodd (**1**).

Nr. 29. Verteilungsfunktion von Pearson Typ VII und t-Verteilung von «Student» (Elderton **1**, Münzner **1**).

Nr. 30. Baten (**1**).

Nr. 31. Verallgemeinerte Pearson-Verteilungsfunktion von Hansmann, abgeleitet aus der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{ydx} = \frac{2mx}{-pq + (q-p)\,x^2 + x^4}.$$

Aus verschiedenen Differentialgleichungen dieser Form können 20 verschiedene symmetrische Typen derartiger Verteilungsfunktionen abgeleitet werden, von denen hier nur der Haupttyp II als Beispiel aufgeführt steht (Hansmann **1**).

Nr. 32. Castellano (**1**).

Nr. 33. Verteilungsfunktion von Pearson Typ X (Elderton **1**).

Nr. 34. Verteilungsfunktion von Pearson Typ III in spezieller Gestalt. Tritt auf als Verteilungsfunktion der Summe von Quadraten normalverteilter Variabler (Baten **1**) und gewisser Momente zweiter Ordnung (Gårding **1**). Enthält die χ^2-Verteilung von Pearson als Spezialfall (Anderson **1**, S. 99, Pearson **1**). Anwendungen in der Bevölkerungstheorie (Wicksell **1**, Brown **1**, Hadwiger **3**, Hadwiger & Ruchti **1**) und der Sachversicherung (Riebesell **2**). Vgl. auch Lévy (**8**, **10**) und Hadwiger (**4**, **5**).

Nr. 35. Verteilungsfunktion von Pearson Typ III in der normalen Gestalt (Elderton **1**).

Nr. 36. Hadwiger (**5**).

Nr. 37. Liechti (**1**)

Nr. 38. Grenzfunktion für Summen von Variablen, welche mit systematischen Fehlern behaftet sind (abgenützte Geldmünzen, Länge des Lebens usw.) (Eyraud **1**). Vgl. auch Baten (**1**), Mayr (**1**), McKay (**1**), Wintner (**7**).

Nr. 39. Entsteht aus Nr. 38 durch Faltung mit sich selbst (Baten **1**).

Nr. 40. Dodd (**1**, **2**), Münzner (**2**).

Nr. 41. Verteilungsfunktion des Gauss-Laplaceschen Fehlergesetzes oder normale Verteilungsfunktion (von Mises **2**, S. 42 ff., Khintchine **1**, S. 1, Cramér **2**, S. 49 ff., Lévy **2**, S. 175 ff. u. a. m.). Grenzfunktion für Potenzen einer grossen Zahl von Verteilungsfunktionen (vgl. Kap. VI, Abschnitt 2*a*).

Nr. 42. Seminormale Verteilungsfunktion. Verteilungsfunktion des quadratischen Mittels normalverteilter Variabler. Die Verteilungsfunktion ist darstellbar durch die unvollständige Gammafunktion, für $a = 1$ wird speziell

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} \left(1 - e^{-x^2}\right).$$

Für ganze a kann die charakteristische Funktion angegeben werden:

$$\varphi(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} \sum_{\nu=0}^{a} \binom{a}{\nu} \left(\frac{iz}{2}\right)^{a-\nu} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)$$

(Surico **1**, Castellano **1**, Steffensen **1**, Tricomi **2**).

Nrn. 43 und 44. Grenzfunktionen für die Verteilung des Maximalwertes einer Stichprobe. Anwendung bei Impfproblemen in der Medizin, Lottos usw. (Fisher & Tippet **1**, Gumbel **1**, **2**, von Mises **3**, von Schelling **1**).

Nr. 45. Verteilungsfunktion von Galton. Anwendung in Problemen der Astronomie (d'Addario **1**, Pretorius **1**, Yuan **1**).

Nr. 46. Della Riccia (**1**).

Nr. 47. Verteilungsfunktion von Pearson Typ V (Elderton **1**). $K_a(z)$ vgl. Nr. 62.

Nr. 48. Harmonische Verteilungsfunktion (Dugué **3**).

Nr. 49. Quellenfunktion der Wärmeleitung (Jahnke-Emde **1**, S. 48, Lévy **8**, **9**).

Nr. 50. Hadwiger (**1**, **2**, **4**, **5**), Hadwiger & Ruchti (**2**).

Nr. 51. d'Addario (**1**).

Nr. 52. Verteilungsfunktion von Pearson Typ IV (Elderton **1**).

Nr. 53. Transformierte Gudermannsche Hyperbelamplitude $\mathfrak{Amp}\, x$. Die Verteilungsfunktion besitzt die explizite Darstellung

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(e^x) = \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{Amp}\, x}{\pi}$$

(Baten **1**, **2**, Dodd **1**, Jahnke-Emde **1**, S. 58, Mathias **1**, Wintner **7**).

Nr. 54. Verteilungsfunktion von Verhulst oder logistische Verteilungsfunktion. Die explizite Darstellung lautet hier

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

Anwendung in der Bevölkerungstheorie (Hess **1**, Lotka **1**, Vianelli **1**, Zwinggi **1**) und Sachversicherung (Riebesell **1**, S. 27). Vgl. auch Dodd (**1**), Mathias (**1**).

Nr. 55. Enthält Nrn. 53 und 54 als Spezialfälle (Mathias **1**, Wintner **7**).

Nr. 56. Plancksche Strahlungsfunktion (Jahnke-Emde **1**, S. 44).

Nr. 57. Khintchine (**2**).

Nr. 58. $L_i(a) = \int\limits_0^a \frac{dx}{\log x}$, $a \geqslant 0$ (Integrallogarithmus) (Khintchine **2**).

Nr. 59. Riebesell (**1**, S. 78).

Nr. 60. $I_a(x) = i^{-a} J_a(ix)$, wobei $i = \sqrt{-1}$ und $J_a(x)$ = Besselsche Funktion (Hadwiger **5**).

Nr. 61. Hadwiger (**5**). Für $a = 0$ stellt die Funktion die Verteilung von Sachschäden der Grösse x dar und kann aus Nr. 66 als Spezialisierung hergeleitet werden (Riebesell **2**).

Nr. 62. Verteilungsfunktion gewisser statistischer Koeffizienten von Stichproben aus Gesamtheiten, welche normal, und solchen, welche gemäss Typ III von Pearson verteilt sind.

$$K_a(z) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-a}(z) - I_a(z)}{\sin a}, \quad I_a(z) \text{ vgl. Nr. 60.}$$

(Pearson, Jeffery & Elderton **1**, Pearson, Stouffer & David **1**).

Nrn. 63 u. 64. Verteilungsfunktion der Mittelwerte von Stichproben aus einer gemäss Nr. 38 verteilten Gesamtheit. Diese Funktionen sind geeignet zur Darstellung gegebener Verteilungen in schwierigeren Fällen, besonders dann, wenn keine der Pearsonschen Funktionen eine befriedigende Anpassung ergibt (McKay **1**). Sie enthalten die Funktionen Nrn. 33, 38 und 62 als Spezialfälle. Kuznecov (**1**) setzt $x = y^2$ zur Darstellung der Verteilung der Länge eines zufälligen Vektors (Vgl. auch Hadwiger **4**, **5**).

Nr. 65. Es bedeutet $M_{k,m}(x)$ die Whittakersche Funktion

$$M_{k,m}(x) = x^{m+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} {}_1F_1\left(m + \frac{1}{2} - k,\ 2m + x;\ x\right),$$

wo ${}_1F_1(a, r; x)$ die konfluente hypergeometrische Reihe

$$ {}_1F_1(a, r; x) = 1 + \frac{a}{r}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)x^2}{r(r+1)2!} + \dots $$

darstellt. Infolge der Identität

$$ \mathrm{M}_{0,m}(x) = 4^m \Gamma(m+1) \sqrt{x}\, I_m\left(\frac{x}{2}\right) $$

geht diese Verteilungsfunktion für $b = 0$ in Nr. 63 über, falls dort $\lambda = 2\bar{\lambda}$ und $x = \frac{\bar{x}}{2}$ gesetzt wird (Hadwiger **5**).

Nr. 66. Verallgemeinerung der Verteilungsfunktion von Poisson (Nr. 5). Grenzverteilung der Summe von n dem Zufall unterworfenen und voneinander unabhängigen Variablen, welche den Wert 0 mit der Wahrscheinlichkeit $\left(1 - \frac{a}{n}\right)$ und die übrigen Werte gemäss der Häufigkeitsfunktion $f(x) \cdot \frac{a}{n}$ annehmen. Dabei bedeutet

$$ f^{*v}(x) = f(x) * f(x) * \cdots * f(x) $$

eine Faltungspotenz von v Faktoren und $f^{*0}(x)$ die Verteilungsfunktion Nr. 1 für $a = 0$. Setzt man speziell für $f(x)$ die Funktionen Nrn. 1, 2 ($a = 1$), 5 und 33 ein, so erhalten wir nacheinander als Resultat die Funktionen Nrn. 5, 10, 67 und 61 ($a = 0$). (Bavli **1**, de Finetti **1**, Khintchine **1**, S. 21).

Nr. 67. Spezialfall von Nr. 66.

Nr. 68. Spezialfall von Nr. 66 (Hadwiger **6**).
Geht in Nr. 67 über, falls Variable und Parameter vertauscht werden.

Nr. 69. Verteilungsfunktion der Summe von n dem Zufall unterworfenen und voneinander unabhängigen Variablen, die den Wert 0 mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ und die übrigen Werte gemäss der Häufigkeitsfunktion $p \cdot f(x)$ annehmen.

Nr. 70. Verallgemeinerung, welche die Funktionen Nrn. 66 bis 69 umfasst. Dabei bedeutet $w_x(a)$ eine willkürliche arithmetische, $f(x)$ eine beliebige Häufigkeitsfunktion.

IV. Funktionalgleichungen

1. Auswahl gewisser Funktionalgleichungen

Infolge der in Kapitel I erwähnten Eigenschaft der Faltung, die Verteilungsfunktion von Summen willkürlicher und unabhängiger Variablen darzustellen, wählen wir als Grundlage unserer Untersuchungen Funktionalgleichungen, in welchen diese Verknüpfungsoperation auftritt und die als Funktionalgleichungen vom Faltungstypus bezeichnet werden. Derartige Funktionalgleichungen treten bei Problemen auf, die sich mit der Weiterentwicklung von statistischen oder biologischen Gesamtheiten sowie mit der Darstellung gewisser physikalischer Bewegungsvorgänge (Diffusionsprozesse usw.) befassen (Hadwiger **1**, **2**, **5**, Khintchine **1**, S. 9 und 29, Kohler **1**, Pólya **2**, Riebesell **2**). Dabei können sich diese Funktionalgleichungen je nach Art der Verteilungsfunktionen oder Zahl der auftretenden Parameter unterscheiden, wie im folgenden erläutert werden wird.

2. Unterscheidung der Funktionalgleichungen nach Integrationsintervall und Art der Verteilungsfunktionen

Je nachdem die auftretenden Verteilungsfunktionen nur für positive x von Null verschiedene Werte besitzen oder nicht, lautet unsere Funktionalgleichung

$$\int_0^x F(x-y)\,dG(y) = F(x) \underset{0}{\overset{x}{*}} G(x) = H(x) \quad \text{oder}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\,dG(y) = F(x) \underset{-\infty}{\overset{\infty}{*}} G(x) = H(x).$$

Die erste Funktionalgleichung tritt uns z. B. entgegen bei Ausscheidewahrscheinlichkeiten als Funktionen des Alters, während die zweite Art u. a. bei Problemen der Fehlertheorie auftritt. Da wir Verteilungsfunktionen, die durch das praktische Problem nur für positive x definiert sind, stets durch

$$F(x) \equiv 0 \qquad x < 0$$

ergänzen, ist für uns die obige Unterscheidung nicht wesentlich. Wir geben deshalb in der Folge die Grenzen derartiger Integrale nicht mehr an.

Handelt es sich bei den Verteilungsfunktionen um totalstetige oder reinunstetige Funktionen, so wird die Funktionalgleichung für die entsprechende Häufigkeitsfunktion (d. h. für $f(x)$ bzw. f_i) zu

$$\int f(x-y)\,g(y)\,dy = f(x) * g(x) = h(x) \qquad \text{bzw.}$$
$$\sum_k f_{i-k} \cdot g_k \qquad = f_i * g_i = h_i\,.$$

Diese Unterscheidung entspricht der Auseinanderhaltung von stetigen und unstetigen Prozessen (z. B. Lageveränderungen eines Teilchens bzw. Zerfall eines Atoms).

3. Unterscheidung nach auftretenden Parametern

Wir wählen für unsere Untersuchungen aus den Funktionalgleichungen vom Faltungstypus diejenigen aus, welche bei der Faltung gewisse Parameter in bestimmter Weise verknüpfen. Für beliebige ganze n und m gelte z. B.

$$\int F_m(x-y)\,dF_n(y) = F_m(x) * F_n(x) = F_{m+n}(x)\,. \tag{1}$$

Derartige Funktionalgleichungen werden uns als Lösungen Funktionen liefern, welche gestatten, die iterierten Kerne

$$k_n(x) = \int k_{n-1}(x-y)\,k_1(y)\,dy$$

der Neumannschen Reihe für den lösenden Kern

$$K(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} t^\nu \cdot k_\nu(x)$$

Volterrascher Integralgleichungen in geschlossener Form darzustellen. Sie treten ferner auf bei Betrachtung der weiter oben angedeuteten Entwicklung von Gesamtheiten, wenn die Austretenden der Gesamtheit G_n in die Gesamtheit G_{n+1} übertreten.

a) Funktionalgleichungen mit einem Parameter:

Wir setzen nun voraus, dass die auftretenden Verteilungsfunktionen $F_n(x)$ alle zu ein und derselben Parameterklasse gehören, was wir durch die Schreibweise

$$F_m(x) = F(x, mq) \qquad m = 1, 2\ldots$$

mit $$F_1(x) = F(x, q)$$

ausdrücken wollen. Dadurch geht unsere Funktionalgleichung über in die Gleichung

$$\int F(x-y, mq)\, dF(y, nq) = F(x, mq+nq). \tag{2}$$

Falls für die Verteilungsfunktion stetige Abhängigkeit vom Parameter gefordert wird, können wir diese Gleichung wie folgt schreiben

$$\int F(x-y, a)\, dF(y, b) = F(x, a+b), \tag{3}$$

da zu beliebig vorgegebenen positiven Grössen a und b stets zwei ganze Zahlen m und n sowie ein positives q derart gefunden werden können, dass

$$|a - mq| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |b - nq| < \varepsilon$$

wird, wobei ε beliebig klein sein kann.

Diese beiden Funktionalgleichungen entsprechen der Forderung, dass ein gewisses universelles Gesetz existieren müsse, welches alle im entsprechenden Problemkreis auftretenden Funktionen darzustellen gestatte (Hadwiger **1**).

Falls wir festlegen, dass der Parameter speziell die Präzision darstellen soll, d. h. dass gelte

$$F(x, a) = F\left(\frac{x}{a}\right),$$

so erhalten wir eine besondere Form unserer Funktionalgleichung, welche in der leicht verallgemeinerten Gestalt

$$\int F\left(\frac{x-y}{a}\right) dF\left(\frac{y}{b}\right) = F\left(\frac{x}{c}\right) \tag{4}$$

$$c = c(a, b)$$

bereits eingehend untersucht worden ist (Lévy **2**, S. 254, Wintner **7**).

b) Funktionalgleichungen mit mehreren Parametern:

Neben den einparametrigen Verteilungsfunktionen können in Problemen natürlich auch solche mit mehreren Parametern auftreten. Praktisch von Bedeutung sind noch diejenigen Funktionalgleichungen, in welchen deren zwei verknüpft werden, also im allgemeinen Falle

$$\int F(x-y, a, r)\, dF(y, b, s) = F(x, a, r) * F(x, b, s) \tag{5}$$
$$= F(x, c, t)$$

wobei $\quad c = c(a, b) \quad$ und $\quad t = t(r, s)$.

Wiederum haben die Spezialfälle

$$F(x, a, r) * F(x, b, s) = F(x, a+b, r+s) \quad \text{und} \tag{6}$$

$$F\left(\frac{x-r}{a}\right) * F\left(\frac{x-s}{b}\right) = F\left(\frac{x-t}{c}\right) \tag{7}$$

besondere Bedeutung. Zudem kann auch hier die Abhängigkeit der Verteilungsfunktion von einem oder beiden Parametern unstetig sein.

4. Allgemeinere Funktionalgleichungen

Ohne näher darauf eintreten zu wollen, soll doch erwähnt werden, dass die Funktionalgleichungen (3) und (6) homogene Spezialfälle von allgemeineren Gleichungen darstellen. Dabei bedeutet der Ausdruck homogen in diesem Zusammenhang, dass es sich um Funktionen handelt, welche nur von der Differenz $(x - y)$ zweier unabhängiger Variablen und eventuell auch nur von der Differenz zweier unabhängiger Parameter abhängen. Solche allgemeinere Funktionalgleichungen treten in der Theorie der stetigen stochastischen Prozesse auf (z. B. in Diffusionsproblemen) und gestatten, die Durchführung von Grenzübergängen zu vermeiden, da mit ihrer Hilfe das Problem bereits in der dem Grenzfall entsprechenden Form ausgedrückt werden kann.

So lautet z. B. die Gleichung von Smoluchowsky

$$\int F(x, y, a)\, d_y F(y, z, b) = F(x, z, a+b),$$

welche ihrerseits einen besonderen, in bezug auf die Parameter homogenen Fall der Gleichung von Chapman-Kolmogoroff verkörpert:

$$\int F(x, y, a, b)\, d_y F(y, z, b, c) = F(x, z, a, c).$$

Die Verteilungsfunktion $F(x, y, a, b)$ stellt dabei z. B. in Diffusionsproblemen die Wahrscheinlichkeit dafür dar, dass ein sich linear bewegendes Teilchen, welches sich zur Zeit a in x befindet, zur Zeit b im Intervall $(-\infty, y)$ anzutreffen sei.

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass die Lösung dieser Funktionalgleichungen von Kolmogoroff (**1**, **2**) durch Zurückführung auf partielle Differentialgleichungen von parabolischem Typus durchgeführt wurde, während Hostinský in einer Reihe von Arbeiten eine Lösungsmethode mittels «Integralen von infinitesimalen Funktionaltransformationen» beschreibt (**1**, **2**, **3**, **4**).

5. Transformation der Funktionalgleichungen

Da die von uns ausgewählten Funktionalgleichungen alle zum Faltungstypus gehören, bietet uns deren Transformation mit Hilfe der charakteristischen Funktionen gemäss Abschnitt 5 des zweiten Kapitels keine besonderen Schwierigkeiten mehr. Unsere erste Funktionalgleichung (1) des vorausgehenden Abschnittes 3 geht über in die Gleichung

$$\varphi_m(z) \cdot \varphi_n(z) = \varphi_{m+n}(z), \tag{8}$$

während den spezielleren Formen (2), (3) und (4) die Beziehungen

$$\varphi(z, mq) \cdot \varphi(z, nq) = \varphi(z, mq + nq), \tag{9}$$

$$\varphi(z, a) \cdot \varphi(z, b) = \varphi(z, a + b) \qquad \text{und} \tag{10}$$

$$\varphi(az) \cdot \varphi(bz) = \varphi(cz) \tag{11}$$

entsprechen. Ganz analog gehen die Funktionalgleichungen mit zwei Parametern (5), (6) und (7) über in

$$\varphi(z, a, r) \cdot \varphi(z, b, s) = \varphi(z, c, t),$$

$$\varphi(z, a, r) \cdot \varphi(z, b, s) = \varphi(z, a + b, r + s) \qquad \text{und}$$

$$e^{riz} \varphi(az) \cdot e^{siz} \varphi(bz) = e^{tiz} \varphi(cz).$$

Auf die Lösungen dieser transformierten Funktionalgleichungen werden wir nun im nächsten Kapitel näher eintreten.

V. Die Lösungen der Funktionalgleichungen

1. Einparametrige Lösungen

Wir behandeln die Fälle mit unstetiger Abhängigkeit gesondert von denjenigen, bei welchen die Verteilungsfunktion stetig vom auftretenden Parameter abhängt.

a) Unstetige Abhängigkeit:

Unter den Lösungen dieser Art unterscheiden wir solche, die nur für bestimmte (z. B. ganzzahlige) Werte des Parameters definiert sind, und andere, totalunstetige Lösungen. Die Existenz der letzteren ist von Hamel (**1**, S. 459 ff.) mittels des Wohlordnungssatzes der Mengenlehre bewiesen worden; infolge der überall dichtliegenden Unstetigkeiten liefern diese jedoch keine praktisch brauchbaren Verteilungsfunktionen. Wir werden uns in dieser Arbeit auf die zuerst erwähnte Art von Lösungen beschränken.

Falls die Verteilungsfunktion für den Parameterwert q als definiert vorausgesetzt wird, wird unsere Funktionalgleichung (9) in logarithmierter Form zu

$$\psi(z, mq) + \psi(z, nq) = \psi(z, mq + nq),$$

wobei

$$\psi(z, q) = \log \varphi(z, q) \quad \text{und} \quad m, n > 0, \text{ ganz}.$$

Diese schon von Cauchy untersuchte Funktionalgleichung hat in unserem Falle als einzige Lösung (Kamke **1**, S. 134)

$$\psi(z, mq) = m \cdot \psi(z, q),$$

so dass

$$\varphi(z, mq) = [\varphi(z, q)]^m$$

wird ($m = 1, 2, 3, \ldots$).

Die Funktion $\varphi(z, q)$ kann nun aber nicht etwa beliebig gewählt werden, sondern muss zur Menge der charakteristischen Funktionen gehören. Für diese Zugehörigkeit sind nun aber zurzeit hinreichende Bedingungen noch nicht gefunden worden, welche in der praktischen Anwendung einfacher wären als die Durchführung der Umkehrung mit anschliessender Untersuchung des Funktionsverlaufs (Lévy **6**, S. 39 f.). Wir müssen uns deshalb darauf beschränken, aus der Menge der bereits bekannten Verteilungsfunktionen diejenigen herauszusuchen, deren charakteristische Funktion die vorstehende Gestalt

aufweist. Beim Durchgehen der Liste im dritten Kapitel sehen wir, dass derartige Funktionen existieren. So sind die Verteilungsfunktionen Nrn. 4, 6, 7, 62 und 69 nur für ganzzahlige m definiert und besitzen charakteristische Funktionen der angegebenen Form.

b) Stetige Abhängigkeit:

Bei stetiger Abhängigkeit der Verteilungsfunktion vom Parameter hat die Funktionalgleichung (10)

$$\varphi(z, a) \cdot \varphi(z, b) = \varphi(z, a + b)$$

ebenfalls nach Cauchy die einzige Lösung

$$\varphi(z, a) = e^{a(G_1(z) + iG_2(z))}, \qquad a > 0$$

wo $G_1(z)$ und $G_2(z)$ jedes reelle Funktionenpaar bedeuten, welches $\varphi(z, a)$ zu einer charakteristischen Funktion macht (Doetsch **1**, S. 319). Aus den bereits genannten Gründen müssen wir uns wiederum darauf beschränken, für bekannte Verteilungsfunktionen die Erfüllung der Funktionalgleichung testzustellen. Dies ist der Fall für Nrn. 5, 10, 34, 50, 60, 63, 64, 66 und 67 der im dritten Kapitel aufgeführten Funktionen, zu welchen noch von den im nächsten Abschnitt zu behandelnden stabilen Verteilungsfunktionen Nr. 27 als spezieller Fall hinzukommt.

c) Die stabilen Verteilungsfunktionen:

Wir betrachten nun noch den Fall der Funktionalgleichung (4), welche in der transformierten Form (11) lautet

$$\varphi(az)\, \varphi(bz) = \varphi(cz) \qquad c = c(a, b).$$

Die Lösungen dieser Funktionalgleichung zeichnen sich dadurch aus, dass die Faltung zweier Funktionen desselben Typs wiederum zum selben Typ gehört. Diese Verteilungsfunktionen sind von Lévy (**6**, S. 94 ff. und 198 ff., **2**, S. 254 ff.) eingehend untersucht und als stabile Verteilungsfunktionen bezeichnet worden. Es kann gezeigt werden, dass ihre charakteristischen Funktionen die Gestalt

$$\varphi(z) = e^{-r|z|^{\alpha}} \qquad \begin{array}{l} \Re(r) > 0 \\ 0 < \alpha \leqslant 2 \end{array}$$

besitzen, wobei der aus unsern Formeln im allgemeinen ausgeschlossene triviale Fall $\alpha = 0$ der «unechten Verteilungsfunktion» Nr. 1 entspricht.

Die im Exponent auftretende Konstante r kann nach Lévy in folgender Gestalt ausgedrückt werden:

$$r = \begin{cases} 1 + i\beta \dfrac{z}{|z|} tg \dfrac{\alpha\pi}{2} & \alpha \neq 1 \\ 1 & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\text{wobei } |\beta| \leqslant 1.$$

Ein bestimmter Typ von stabilen Verteilungsfunktionen wird also in dieser Darstellung durch zwei Parameter charakterisiert, welche folgende Bedeutung besitzen:

I. Der charakteristische Exponent α misst die Veränderung der Präzision bei der Faltung, da aus der Funktionalgleichung sofort die Beziehung folgt

$$c = \sqrt[\alpha]{a^\alpha + b^\alpha}\,.$$

Für $\alpha < 1$ nimmt also die Präzision bei der Faltung ab, so dass derartige Gesetze z. B. für die Fehlertheorie unbrauchbar sind. Für $\alpha > 2$ und $\alpha < 0$ ist $\varphi(z)$ keine charakteristische Funktion mehr.

II. Der Symmetriekoeffizient β misst die Stärke der Asymmetrie der Verteilungsfunktion des betreffenden Typs. Symmetrische Verteilungsfunktionen haben $\beta = 0$. Für $|\beta| > 1$ ist die Monotonie der Verteilungsfunktion nicht mehr gesichert.

Mittels dieser beiden Parameter werden die Typen von Verteilungsfunktionen durch die Schreibweise $L_{\alpha\beta}$ bezeichnet.

In bezug auf die Faltung bilden die Verteilungsfunktionen ein und desselben Typs $L_{\alpha\beta}$ und auch alle Typen $L_{\alpha\beta_1}$, $L_{\alpha\beta_2}$, ... mit gleichem charakteristischen Exponenten α eine Gruppe. Allerdings können die Paare (α, β) nicht beliebig gewählt werden; denn z. B. existiert zu $\alpha = 1$ oder $\alpha = 2$ nur dann eine Verteilungsfunktion, wenn gleichzeitig $\beta = 0$ ist.

Mitsamt der unechten Verteilungsfunktion sind bis heute nur folgende vier stabile Typen explizit in geschlossener Form darstellbar:

1. Der Typ L_0 der unechten Verteilungsfunktion (Nr. 1) [1]). Einziger Typ mit der Streuung $s = 0$.

[1]) Für $\beta = 0$ beschränkt man sich in der Bezeichnung $L_{\alpha\beta}$ auf die Angabe des charakteristischen Exponenten α.

2. Der Typ L_2 des Gauss-Laplaceschen Fehlergesetzes (Nr. 41). Einziger Typ mit endlicher Streuung: $0 < s < \infty$.
3. Der Typ $L_{\frac{1}{2},-1}$ der Quellenfunktion der Wärmeleitung (Nr. 49).
4. Der Typ L_1 der Verteilungsfunktion von Cauchy (Nr. 27). Da für diese Funktion die Grösse $\beta \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$ eine beliebige Konstante darstellt, die durch Verschiebung der Verteilungsfunktion zum Verschwinden gebracht werden kann, enthält dieser Typ alle symmetrischen und asymmetrischen Verteilungsfunktionen der entsprechenden Klasse.

Im nächsten Abschnitt sollen noch Verteilungsfunktionen betrachtet werden, welche die Funktionalgleichung nicht für alle beliebigen Präzisionen a und b, sondern nur für eine gewisse Auswahl von Paaren (a, b) erfüllen.

d) Die semistabilen Verteilungsfunktionen:

Diese Typen von Verteilungsfunktionen sind dadurch ausgezeichnet, dass die Funktionalgleichung nur dann erfüllt ist, wenn die Präzisionen in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen. Sie enthalten die stabilen Typen als Spezialfall, da letztere einer einschränkenderen Bedingung unterworfen sind. Pólya hat schon 1923 (**2**) gezeigt, dass derartige Verteilungsfunktionen existieren, später hat Lévy (**6**, S. 204) deren allgemeine Gestalt festgestellt, wobei er die Definition derart erweiterte, dass er das Erfülltsein der Funktionalgleichung

$$\psi(qz) = q^{\alpha} \cdot \psi(z) \qquad \alpha > 0$$

für die Logarithmen der charakteristischen Funktionen für bestimmte Werte von q verlangte. Dabei ist zu beachten, dass mit q die Funktionalgleichung auch für q^n $(n = 2, 3, \ldots)$ erfüllt ist. (Falls das Erfülltsein für beliebige Werte von q vorgeschrieben würde, erhielte man nur stabile Verteilungsfunktionen als Lösungen). Der ursprüngliche Fall kann aus dieser Fassung zurückerhalten werden, falls gesetzt wird

$$a = q^m, \quad b = q^n \quad \text{und} \quad c = q^m + q^n.$$

Die auf diese Weise erhaltenen Lösungen erfüllen dann die unserem Problem zugrunde liegende Gleichung (11) für die Verhältnisse $a : b = q^{m-n}$.

Die von Lévy gefundene allgemeine Gestalt der charakteristischen Funktionen semistabiler Verteilungsfunktionen lautet

$$\varphi(z) = \exp\left\{ -c\,|z|^{\alpha}\left[P_0(\log|z|) + i\frac{z}{|z|}\,P_1(\log|z|)\right]\right\},$$

wobei $P_0(x)$ und $P_1(x)$ Funktionen der Periode $\log q$ darstellen und zudem die Bedingung

$$|P_1(x)| < P_0(x)\cdot tg\,\frac{\alpha\pi}{2}$$

erfüllen, damit das Vorhandensein einer charakteristischen Funktion gesichert ist.

Ausser den schon erwähnten stabilen Verteilungsfunktionen, welche hier als Spezialfälle enthalten sind, ist noch keine geschlossene Darstellung einer derartigen Funktion bekannt. Pólya hat jedoch gezeigt, dass das Gauss-Laplacesche Gesetz (Nr. 41) auch im Bereiche der semistabilen Verteilungsfunktionen die einzige Lösung mit endlicher, von Null verschiedener Streuung darstellt.

2. Zweiparametrige Lösungen

a) Die Lösungen der Funktionalgleichung (6):

Entsprechend unserem Vorgehen im vorigen Abschnitt unterscheiden wir vorerst wieder die Verteilungsfunktionen nach der Art der Abhängigkeit von den auftretenden Parametern. Wir lassen wiederum die totalunstetigen Lösungen unberücksichtigt und erhalten in allen Fällen als einzig mögliche Lösungen Verteilungsfunktionen mit charakteristischen Funktionen der Form

$$\varphi(z, a, r) = [\Phi(z)]^a\,[\Psi(z)]^r,$$

wobei nun je nachdem keiner, einer oder auch beide Parameter diskontinuierlich sein können.

Derartige Lösungen können nun ohne weiteres dadurch gebildet werden, dass man die charakteristischen Funktionen bekannter Verteilungsfunktionen als $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$ einsetzt. Beispiele für Funktionen dieser Art stellen die im dritten Kapitel aufgeführten Verteilungsfunktionen Nrn. 36 und 61 dar, welche als Zusammensetzungen spezieller

Formen der Funktionen Nrn. 1, 34 und 66 auftreten. Abgesehen von solchen Bildungen existieren aber auch Lösungen, bei welchen die Teilfunktionen keine selbständigen Verteilungsfunktionen sind. Ein Beispiel hiefür stellt die Funktion Nr. 65 dar, bei welcher der zweite Teil der charakteristischen Funktion für sich allein keine charakteristische Funktion verkörpert, da dessen Absolutbetrag im Gegensatz zu Abschnitt 1 des zweiten Kapitels nicht beschränkt ist.

b) Die quasistabilen Verteilungsfunktionen:

Wir treten nun noch näher auf die Lösungen der Funktionalgleichung (7) ein, welche als quasistabile Verteilungsfunktionen bezeichnet werden (Lévy **6**, S. 208). Diese zeichnen sich dadurch aus, dass bei der Faltung zweier Verteilungsfunktionen derselben Klasse wieder eine Funktion dieser gleichen Klasse entsteht. Im Gegensatz zu den stabilen Funktionen gehört jedoch bei der Faltung zweier Funktionen desselben Typs die Resultatfunktion nicht mehr dem gleichen, sondern einem linear transformierten Typ an. Es wird also z. B.

$$F\left(\frac{x}{a}\right) * F\left(\frac{x}{b}\right) = F\left(\frac{x+v}{c}\right)$$

und für die charakteristischen Funktionen

$$\varphi(az) \cdot \varphi(bz) = e^{-viz}\, \varphi(cz).$$

Eine Lineartransformation der verwendeten Verteilungsfunktion

$$F(x - v) = G(x)$$

d. h.

$$e^{viz}\, \varphi(z) = \gamma(z)$$

liefert uns nun aber die Faltung

$$\begin{aligned} \gamma(az) \cdot \gamma(bz) &= e^{2viz}\, \varphi(az) \cdot \varphi(bz) \\ &= e^{viz}\, \varphi(cz) = \gamma(cz), \end{aligned}$$

so dass also

$$G\left(\frac{x}{a}\right) * G\left(\frac{x}{b}\right) = G\left(\frac{x}{c}\right)$$

wird.

Quasistabile Typen sind also durch Lineartransformation in stabile Typen überführbar, wobei einzig der Fall $\alpha = 1$ eine Ausnahme bildet. Dementsprechend lautet die allgemeine Gestalt ihrer charakteristischen Funktionen

$$\varphi(z) = \begin{cases} \exp\left[viz - |z|^{\alpha}\left(1 + i\beta\frac{z}{|z|}\,tg\,\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right] & \alpha \neq 1 \\ \exp\left[viz - k\left(\frac{\pi}{2}|z| + i\beta z \log|z|\right)\right] & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$|\beta| \leqslant 1 \qquad 0 < \alpha \leqslant 2 \qquad k > 0, \text{ konst.}$$

Geschlossene Darstellungen von Verteilungsfunktionen dieser Typen sind bis jetzt nur für die den vier oben erwähnten stabilen Typen entsprechenden Funktionen bekannt. Man erhält deren Form durch Ersetzen von x durch $(x - v)$, während bei den charakteristischen Funktionen das Glied e^{viz} hinzutritt.

Wie bei den stabilen Verteilungsfunktionen kann auch hier der Fall eintreten, dass die Funktionalgleichung statt für alle, nur für gewisse Verhältnisse der Präzisionen erfüllt ist. Derartige Verteilungsfunktionen nennt man quasisemistabil. Sie enthalten die quasistabilen Funktionen als Spezialfälle. Lévy hat auch für diese Funktionen die Definition entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 1*d* dieses Kapitels erweitert und für die charakteristischen Funktionen folgende Ausdrücke gefunden (**4**)

$$\varphi(z) = \begin{cases} \exp\left[viz - |z|^{\alpha}\left(P_1(\log|z|) + i\frac{z}{|z|}P_2(\log|z|)\right)\right] & \alpha \neq 1 \\ \exp\left[viz\log|z| - \frac{\pi}{2}|z|\,P_1(\log|z|) + izP_2(\log|z|)\right] & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$P_n(x + \log q) = P_n(x); \quad P_1(x) > 0; \quad |v| \leqslant P_1(x);$$

$$n = 1,\ 2;$$

$$\text{dazu noch für } \alpha \neq 1\colon\ |P_2(x)| \leqslant P_1(x).$$

3. Lösungen mit mehreren Parametern

Wie im Falle zweier Parameter lassen sich durch Kombination bekannter Verteilungsfunktionen auch n Parameter enthaltende Lösungen mit charakteristischen Funktionen der Form

$$\varphi(z, h_1, h_2, \ldots h_n) = [\Phi_1(z)]^{h_1} [\Phi_2(z)]^{h_2} \ldots [\Phi_n(z)]^{h_n}$$

bilden; ferner können auch Lösungen existieren, für die die einzelnen $\Phi_n(z)$ keine charakteristischen Funktionen sind. Als Beispiel für die erste Art ist zu erwähnen die Verteilungsfunktion von Pollaczek-Geiringer für seltene Ereignisse (Nr. 9).

4. Spezielle Klassen von Verteilungsfunktionen

Infolge ihres innern Zusammenhanges fasst man alle durch die Funktionalgleichungen (4) und (7) ausgezeichneten Verteilungsfunktionen passend zusammen. So bilden die Verteilungsfunktionen eines stabilen Typs zusammen mit den Verteilungsfunktionen der zugehörigen quasistabilen Typen eine *invariante Klasse* von Verteilungsfunktionen (Khintchine **6**). Diese invarianten Klassen umfassen dann also die Gesamtheit derjenigen Verteilungsfunktionen, deren Faltung mit einer im weiteren Sinne ähnlichen Funktion wieder zur selben Klasse gehört. In gleicher Weise werden die Funktionen semistabiler und entsprechender quasisemistabiler Typen zu *seminvarianten Klassen* zusammengefasst, für welche die zugrunde liegende Funktionalgleichung nur für bestimmte Präzisionen erfüllt ist. Die folgende Zusammenstellung zeigt, wie die erwähnten Typen und Klassen untereinander zusammenhängen:

Seminvariante Klasse

Semistabile Typen — Quasisemistabile Typen

Stabiler Typ — Quasistabile Typen

Invariante Klasse

5. Unbeschränkt teilbare Verteilungsfunktionen

Eine noch umfassendere Gattung von Verteilungsfunktionen stellen die unbeschränkt teilbaren Verteilungsfunktionen dar, welche u. a. alle seminvarianten Klassen sowie die in Abschnitt 1*b* dieses Kapitels aufgeführten Verteilungsfunktionen als Sonderfälle enthalten. Sie sind wie folgt definiert (Khintchine **3**):

Eine Verteilungsfunktion $F(x)$ heisst unbeschränkt teilbar, falls zu jedem beliebigen ganzzahligen n eine Verteilungsfunktion $F_n(x)$

existiert, deren Faltungspotenz $F_n^{*n}(x)$ mit der gegebenen Verteilungsfunktion $F(x)$ identisch ist.

Diese Verteilungsfunktionen sind bereits von Lévy u. a. Autoren eingehend untersucht worden, wobei auch die allgemeine Gestalt dieser Funktionen festgestellt wurde. Demnach besitzen die charakteristischen Funktionen der unbeschränkt teilbaren Verteilungsfunktionen die folgende, abgekürzt geschriebene Gestalt (Lévy **6**, S. 180)

$$\varphi(z) = \exp\left[miz - \frac{rz^2}{2} + \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}\right)\left(e^{izu} - 1 - \frac{izu}{1+u^2}\right) dn(u)\right],$$

wobei $n(u)$ eine in den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ nicht abnehmende, für $u = \pm\infty$ endliche Funktion bedeutet, die zudem in jedem endlichen Intervall (a, b) die Bedingung

$$\int_a^b u^2\, dn(u) < \infty$$

erfüllt und m sowie r reelle Konstanten darstellen ($r \geqslant 0$).

Setzt man speziell $n(u) = s \cdot E(x-1)$, wo $E(x)$ die unechte Verteilungsfunktion (Nr. 1) bedeutet, geht diese Formel über in

$$\varphi(z) = e^{miz} \cdot e^{-\frac{rz^2}{2}} \cdot e^{s(e^{iz}-1)} \cdot e^{-\frac{siz}{2}}.$$

Daraus geht deutlich hervor, dass die unbeschränkt teilbaren Verteilungsfunktionen Faltungsprodukte von linear transformierten unechten Verteilungsfunktionen (Nr. 1), Gauss-Laplaceschen Verteilungsfunktionen (Nr. 41) und gewissen «Integralprodukten» der Poissonschen Verteilungsfunktion (Nr. 5) darstellen.

Lévy hat nun gezeigt, dass diese Zerlegung einer unbeschränkt teilbaren Verteilungsfunktion in die soeben erwähnten drei Arten von Funktionen sogar eindeutig ist, solange nur unbeschränkt teilbare Verteilungsfunktionen als Teilgesetze zugelassen werden. Sobald die Teilgesetze jedoch beliebige Verteilungsfunktionen sein können, existieren zahlreiche andere Zerlegungen, über welche bereits eine ausgedehnte Literatur vorhanden ist, in der diese Zerlegungsprobleme als «Arithmetik der unbeschränkt teilbaren Verteilungsfunktionen» zusammengefasst werden (vgl. z. B. Dugué **2**, Kawata **2**, Lévy **5**, **7**,

6, S. 186 ff., Slutsky **1**). Da hier auf diese mannigfachen Sätze nicht eingegangen werden kann, beschränken wir uns auf die Angabe zweier Sätze für die Gauss-Laplacesche und die Poissonsche Verteilungsfunktion. Danach existiert nämlich für diese beiden Funktionen auch bei Zulassung beliebiger, nicht unbeschränkt teilbarer Verteilungsfunktionen als Teiler nur je eine mögliche Zerlegung, und zwar in Funktionen, welche zur selben Klasse wie die gegebene Verteilungsfunktion gehören (Theoreme von Cramér **1** und Raikov **1**).

VI. Das asymptotische Verhalten der Potenzen von Verteilungsfunktionen

Nachdem für eine empirisch gegebene Verteilung die geeignete Verteilungsfunktion festgestellt worden ist, bleibt als eine Hauptaufgabe festzustellen, nach was für einer Verteilungsfunktion im Grenzfall die Summe von n voneinander unabhängigen Variablen verläuft, wenn von diesen jede der gefundenen Verteilungsfunktion unterworfen ist und n über alle Grenzen wächst. Da der Summenbildung der Variablen die fortgesetzte Faltung der zugrunde liegenden Verteilungsfunktion entspricht, besteht also die Aufgabe darin, das asymptotische Verhalten dieser Potenzen von Verteilungsfunktionen zu untersuchen.

Damit dies aber geschehen kann, wird im allgemeinen eine lineare Transformation der Variablen eingeführt werden müssen, da sonst, wie man am Beispiel der stabilen Verteilungsfunktionen leicht feststellen kann, als Grenzfunktion die in Abschnitt 7 des ersten Kapitels erwähnte Funktion $D(x)$ entsteht. Je nachdem diese Transformation nun homogen ist oder nicht, erhält man dann also eine Grenzfunktion einer Folge von Verteilungsfunktionen, welche alle zum gleichen Typ oder aber zur gleichen Klasse gehören.

Anderseits können jedoch auch Folgen von Verteilungsfunktionen betrachtet werden, deren jede einer andern Klasse K_n angehört. Falls in diesem Falle eine Grenzfunktion existiert und zur Klasse K gehört, spricht man von Konvergenz der Klassen K_n gegen die Klasse K. Näheren Aufschluss über diese Klassenkonvergenz im Zusammenhang mit der Theorie der Potenzen von Verteilungsfunktionen geben Doeblin (**1**, **2**) und Khintchine (**4**).

1. Definition des Attraktionsgebietes

Die Typen und Klassen, deren Verteilungsfunktionen bei fortgesetzter Faltung auf dieselbe Grenzfunktion führen, werden nun durch den Begriff der Attraktionsgebiete zusammengefasst (Lévy **2**. S. 233 und 252 ff.). Diese werden wie folgt definiert (Gnedenko **1**):

Eine Verteilungsfunktion $F(x)$ gehört zum Attraktionsgebiet der Verteilungsfunktion $G(x)$, falls zwei Folgen von Konstanten a_n und b_n angegeben werden können derart, dass die Faltungspotenz $F^{*n}(a_n x + b_n)$ für über alle Grenzen wachsendes n gegen $G(x)$ als Grenzfunktion strebt.

Falls zu einer Verteilungsfunktion eine derartige Grenzfunktion $G(x)$ existiert, gehört sie nach Lévy im homogenen Falle ($b_n = 0$) einem stabilen Typ, im allgemeinen Fall nach Khintchine (**6**) einer invarianten Klasse an. Je nach der verwendeten linearen Transformation entsteht nun aber als Grenzfunktion eine andere Verteilungsfunktion des betreffenden Typs oder der betreffenden Klasse. Wir werden deshalb in der Folge auch vom Attraktionsgebiet eines Typs oder einer Klasse sprechen. In unserer Zusammenstellung in Kapitel III haben wir zu jeder Verteilungsfunktion den charakteristischen Exponenten α des Attraktionsgebietes in der letzten Spalte angegeben. Da jeder stabile Typ ein Attraktionsgebiet besitzt, das mindestens aus den Verteilungsfunktionen dieses Typs besteht, kann die Gesamtheit aller Attraktionsgebiete durch Aufsuchen der Gesamtheit der stabilen Typen bzw. invarianten Klassen gefunden werden. Diese Aufgabe ist gelöst dank der Feststellung der allgemeinen Gestalt dieser Funktionen durch Lévy.

Die Funktionen eines bestimmten Attraktionsgebietes zeichnen sich aus durch die folgende Eigenschaft ihrer Momente:

$$M_p = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p dF(x) \begin{cases} = \infty & p > \alpha \\ < \infty & p < \alpha \end{cases},$$

wobei für $0 < \alpha < 2$ die Zahl α den charakteristischen Exponenten der Grenzfunktionen darstellt, während für $\alpha \geqslant 2$ die Grenzfunktionen durch den Typ L_2 des Gauss-Laplaceschen Fehlergesetzes (Nr. 41) gebildet werden. Für $\alpha = 0$ existiert als Grenzfunktion keine Verteilungsfunktion, sondern nur die in Abschnitt 7 des ersten Kapitels erwähnte Funktion $D(x)$ (Lévy **2**, S. 277).

Aus dieser Eigenschaft geht hervor, dass die Zugehörigkeit zu einem bestimmten Attraktionsgebiet durch die grossen Werte der unabhängigen Variablen entschieden wird. Es lässt sich zeigen, dass Abänderung der Werte der Verteilungsfunktion innerhalb bestimmter Grenzen der unabhängigen Variablen das Attraktionsgebiet unverändert lässt, wogegen bei Abänderung der Werte ausserhalb dieser Grenzen die Verteilungsfunktion eventuell das Attraktionsgebiet wechselt (Feldheim **1**, S. 14).

2. Unterscheidung der Attraktionsgebiete

a) Das Attraktionsgebiet der Gauss-Laplaceschen Verteilungsfunktion:

Wie die zahlreichen Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung zeigen, wird seit langem versucht, geeignete Bedingungen für die Zugehörigkeit einer Verteilungsfunktion zu diesem Attraktionsgebiet aufzufinden. Die ursprünglich allein vorhandenen hinreichenden Bedingungen wurden in den Sätzen von Ljapounoff und Lindeberg durch notwendige und hinreichende Bedingungen ersetzt (vgl. z. B. Feller **1**, Lévy **1**), während später fast gleichzeitig Khintchine (**2**), Lévy (**3**) und Feller (**1**) in etwas weiterem Umfang anwendbare Kriterien aufstellten. Im weitern sei auf die Literatur zu den einzelnen Verteilungsfunktionen in Kapitel III verwiesen, die sehr oft Untersuchungen über das Grenzverhalten enthält.

Wie aus Abschnitt 1 hervorgeht, gehören zum Attraktionsgebiet des Typs L_2 oder auch der Gauss-Laplaceschen Verteilungsfunktion einmal alle Verteilungsfunktionen mit endlicher Streuung. Daneben gehören aber auch noch einige Funktionen mit unendlicher Streuung dazu, wie z. B. aus der notwendigen und hinreichenden Bedingung von Khintchine (**2**)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 [1 - F(x) + F(-x)]}{\int_{-x}^{x} y^2 \, dF(y)} = 0$$

für die Zugehörigkeit einer Verteilungsfunktion zu diesem Attraktionsgebiet hervorgeht. Derartige Verteilungsfunktionen sind z. B. Nr. 25 für $a = 3$, Nr. 30, Nr. 44 für $a = 2$, Nr. 57 für $a = 3$ und Nr. 58 für $a = 3$.

b) Die aussergewöhnlichen Verteilungsfunktionen:

Da das Attraktionsgebiet der Gauss-Laplaceschen Verteilungsfunktion alle andern an Bedeutung und Umfang beträchtlich überragt, werden diese übrigen Attraktionsgebiete unter der Bezeichnung aussergewöhnliche Verteilungsfunktionen (Lévy **2**, S. 252: Lois exceptionnelles) zusammengefasst. Hierunter fallen die Attraktionsgebiete aller stabilen Typen $L_{\alpha\beta}$ mit $0 < \alpha < 2$ bzw. aller entsprechenden invarianten Klassen. Sämtliche dieser Verteilungsfunktionen besitzen eine unendlich grosse Streuung. Von den im dritten Kapitel aufgeführten Funktionen gehören — eventuell nur für gewisse Parameter — zu den aussergewöhnlichen Verteilungsfunktionen Nrn. 25, 27, 44, 49, 57 und 58.

3. Ausnahmefälle

Es gibt aber auch Verteilungsfunktionen, für welche bei unendlich oft wiederholter Faltung mit sich selbst eine Grenzfunktion nicht eindeutig angegeben werden kann. Als Beispiel hiezu mögen uns die Verteilungsfunktionen dienen, welche semistabilen Typen angehören. Für diese werden wegen der Beziehung

$$q^{\alpha} \cdot \psi(z) = \psi(qz) \qquad \psi(z) = \log \varphi(z)$$

alle Potenzen mit den speziell gewählten Exponenten

$$n = q^{\alpha \cdot h} \qquad h \text{ ganz}$$

identisch, falls als lineare Transformation $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ eingeführt wird. Es wird in der Tat

$$\varphi\left(\frac{z}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^n = \varphi\left(\frac{z}{q^h}\right)^{q^{\alpha h}} =$$

$$= \exp\left\{-cq^{\alpha h}\left|\frac{z}{q^h}\right|^{\alpha}\left[P_0\left(\log\frac{|z|}{q^h}\right) + i\frac{z}{|z|}P_1\left(\log\frac{|z|}{q^h}\right)\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{-c\,|z|^{\alpha}\left[P_0(\log|z|) + i\frac{z}{|z|}P_1(\log|z|)\right]\right\}$$

wenn man berücksichtigt, dass gemäss der Definition auf Seite 145 $P_0(x)$ und $P_1(x)$ Funktionen der Periode $\log q$ darstellen. Wählt man

jetzt den Exponenten n beliebig, so kann in gleicher Weise gezeigt werden, dass nun alle Potenzen der Ordnung $n \cdot q^{\alpha h}$ mit beliebigem ganzen h identisch werden. Wir erhalten also für die Faltungspotenz $F^{*n}\left(n^{\frac{1}{\alpha}} x\right)$ unendlich viele Grenzfunktionen, da diese nur vom nichtganzen Teil der Grösse $\frac{\log n}{\log q^{\alpha}}$ abhängt.

Trotz diesem Verhalten spricht man auch von Attraktionsgebieten von semistabilen Verteilungsfunktionen, da z. B. Verteilungsfunktionen mit charakteristischen Funktionen der Form

$$\chi(z) = \varphi(z)^{1+w(z)} \qquad \lim_{x \to 0} w(x) = 0$$

für die Exponentenfolge $n = q^{\alpha h}$ $(h = 1, 2, 3, \ldots)$ gegen die semistabile Verteilungsfunktion mit der charakteristischen Funktion $\varphi(z)$ streben (Lévy **2**, S. 273).

Weitere Beispiele für das Auftreten von nichtstabilen Grenzfunktionen erhält man, falls nicht mehr nur Verteilungsfunktionen desselben Typs oder derselben Klasse miteinander gefaltet werden. Werden z. B. m Verteilungsfunktionen des stabilen Typs $L_{\alpha_1\beta}$ und n Funktionen des stabilen Typs $L_{\alpha_2\beta}$ miteinander gefaltet (Lévy **2**, S. 269), so entsteht eine Verteilungsfunktion mit der charakteristischen Funktion

$$\varphi(z) = e^{-m r_1 |z|^{\alpha_1} - n r_2 |z|^{\alpha_2}}.$$

Wachsen nun m und n über alle Grenzen und führen wir als Transformation $a_n = m^{\frac{1}{\alpha_1}}$ ein, so erhalten wir nur dann zu einem stabilen Typ gehörende Grenzfunktionen, falls m und n von derselben Ordnung unendlich werden. Während in diesem Falle für $\alpha_1 < \alpha_2$

$$\omega_1(z) = e^{-r_1 |z|^{\alpha_1}}$$

als Grenzfunktion entsteht, können durch passende Wahl des Verhältnisses von m zu n beliebig viele andere, nichtstabile Grenzfunktionen hervorgebracht werden. So wird für $n^{\alpha_1} : m^{\alpha_2} = c$

$$\omega(z) = e^{-r_1 |z|^{\alpha_1} - c^{\frac{1}{\alpha_1}} \cdot r_2 |z|^{\alpha_2}}.$$

Literaturverzeichnis

R. d'Addario

1. Sulla rappresentazione analitica delle curve di frequenza. Atti Ist. naz. Assicuranz. **8**, 95—136 (1936).

O. Anderson

1. Einführung in die mathematische Statistik. Wien 1935.

W. D. Baten

1. Frequency laws for the sum of n variables which are subject each to given frequency laws. Metron **10**, Nr. 3, 75—91 (1932).
2. The probability law for the sum of n independent variables, each subject to the law $\left(\frac{1}{(2h)}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\pi x}{(2h)}\right)$. Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 284—290 (1934).

A. Baumberger

1. Über Verteilungsfunktionen in der Kollektivmasslehre. Diss. phil. II. Bern 1938.
2. Beitrag zum Problem von Bernoulli. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforschg. **5**, 103—116 (1939).

G. M. Bavli

1. Eine Verallgemeinerung des Poissonschen Grenzwertsatzes. C. R. Acad. Sci. URSS **2**, 508—510 u. dtsch. Zusammenfassung 511 (1935) (Russisch).

S. Bochner

1. Vorlesungen über Fouriersche Integrale. Leipzig 1932.
2. Monotone Funktionen, Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse. Math. Ann. **108**, 378—410 (1933).
3. Stable laws of probability and completely monotone functions. Duke math. J. **3**, 726—728 (1937).

A. W. Brown

1. A note on the use of a Pearson type III function in renewal theory. Ann. math. Statist. **11**, 448—453 (1940).

V. Brun

1. Gauss' Verteilungsgesetz. Norsk mat. Tidskr. **14**, 81—92 (1932) (Norwegisch).

C. Carathéodory

1. Vorlesungen über reelle Funktionen. Leipzig u. Berlin 1918.

V. Castellano

1. Sulle relazioni tra curve di frequenza e curve di concentrazione e sui rapporti di concentrazione corrispondenti a determinate distribuzioni. Metron **10**, 3—60 (1933).

H. Cramér

1. Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion. Math. Z. **41**, 405—414 (1936).

2. Random variables and probability distributions (Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys., No. 36). Cambridge 1937.

A. Della Riccia

1. Courbes de fréquence et courbes de distribution. Une généralisation de la loi de Gauss. Ann. Soc. Sci. Bruxelles A **54**, 133—139 (1934).

C. E. Dieulefait

1. Bestimmung der Momente der gewöhnlichen hypergeometrischen Wahrscheinlichkeiten und Bestimmung der Momente für den Fall der Ansteckung. An. Soc. Ci. Argent. **127**, 108—117 (1939) (Spanisch).
2. Sui momenti delle distribuzioni ipergeometriche. Giorn. Ist. Ital. Attuari **10**, 221—224 (1939).

E. L. Dodd

1. Functions of measurements under general laws of error. Skand. Aktuarietidskrift **5**, 133—158 (1922).
2. Classification of sizes or measures by frequency functions. J. amer. statist. Assoc., N. s. **26**, Suppl.-H., 227—234 (1931).

W. Doeblin

1. Premiers éléments d'une étude systématique de l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 306—308 (1938).
2. Etude de l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 718—720 (1938).

G. Doetsch

1. Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin 1937.

D. Dugué

1. Sur quelques propriétés analytiques des fonctions caractéristiques. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 1778—1780 (1939).
2. Sur quelques exemples de factorisation de variables aléatoires. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 838—840 (1941).
3. Sur un nouveau type de courbe de fréquence. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 634—635 (1941).
4. Sur certaines composantes des lois de Cauchy. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 718—719 (1941).

F. Eggenberger

1. Die Wahrscheinlichkeitsansteckung. Mitt. Vereinig. schweiz. Vers.-Math. **19**, 31—143 (1924).

W. P. Elderton

1. Frequency curves and correlation. London 1927, S. 36—123. (Vgl. dazu auch Riebesell **1**, S. 27—35).

P. Erdös

1. On a family of symmetric Bernoulli convolutions. Amer. J. Math. **61**, 974—976 (1939).
2. On the smoothness properties of a family of Bernoulli convolutions. Amer. J. Math. **62**, 180—186 (1940).

H. Eyraud

1. Sur quelques lois d'erreurs analogues aux erreurs systématiques. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 763—764 (1934).

E. Feldheim

1. Etude de la stabilité des lois de probabilité. Diss. Paris 1937.

W. Feller

1. Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Z. **40**, 521—559 (1935).

B. de Finetti

1. Le funzioni caratteristiche di legge istantanea dotate di valori eccezionali. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. **14**, 259—265 (1931).

O. Fischer

1. Une remarque sur l'article de M. A. Guldberg: «On discontinuous frequency functions and statistical series». Aktuár. Vědy **4**, 169—174 (1934).

R. A. Fisher and L. H. C. Tippet

1. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. Proc. Cambridge Philos. Soc. **24**, 180—190 (1928).

L. Galvani

1. Contributi alla determinazione degli indici di variabilità per alcuni tipi di distribuzione. Metron **9**, 3—45 (1931).

L. Gårding

1. The distribution of the first and second order moments, the partial correlation coefficients and the multiple correlation coefficient in samples from a normal multivariate population. Skand. Aktuarietidskr. **24**, 185—202 (1941).

B. Gnedenko

1. On the domains of attraction of stable laws. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **24**, 640—642 (1939).

A. Guldberg

1. On discontinuous frequency-functions and statistical series. Skand. Aktuarietidskr. **14**, 167—187 (1931).
2. Eine Anwendung der Differenzengleichungen in der theoretischen Statistik. Aktuár. Vědy **5**, 116—128 (1935).

E. J. Gumbel

1. La plus grande valeur. Aktuár. Vědy **5**, 83—89 u. 133—160 (1935).
2. Les valeurs extrêmes des distributions statistiques. Ann. Inst. H. Poincaré **5**, 115—158 (1935).

H. Hadwiger

1. Natürliche Ausscheidefunktionen für Gesamtheiten und die Lösung der Erneuerungsgleichung. Mitt. Vereinig. schweiz. Vers.-Math. **40**, 31—39 (1940).
2. Eine analytische Reproduktionsfunktion für biologische Gesamtheiten. Skand. Aktuarietidskrift **23**, 101—113 (1940).

3. Eine Formel der mathematischen Bevölkerungstheorie. Mitt. Vereinig. schweiz. Vers.-Math. **41**, 67—73 (1941).
4. Wahl einer Näherungsfunktion für Verteilungen auf Grund einer Funktionalgleichung. Bl. Vers.-Math. **5**, 345—352 (1942).
5. Ein transzendentes Additionstheorem und die Neumannsche Reihe. Mitt. Vereinig. schweiz. Vers.-Math. **42**, 57—66 (1942).
6. Über die Funktionalgleichung der Poissonschen Verteilungsfunktion (unveröffentlichtes Manuskript).

H. Hadwiger und W. Ruchti

1. Über eine spezielle Klasse analytischer Geburtenfunktionen. Metron **13**, Nr. 4, 17—26 (1939).
2. Darstellung der Fruchtbarkeit durch eine biologische Reproduktionsformel. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforschg. **7**, 30—34 (1941).

G. Hamel

1. Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Math. Annalen **60**, 459—462 (1905).

G. H. Hansmann

1. On certain non-normal symmetrical frequency distributions. Biometrika **26**, 129—195 (1934).

P. Hartman and R. Kershner

1. The structure of monotone functions. Amer. J. Math. **59**, 809—822 (1937).
2. On the Fourier-Stieltjes transform of a singular function. Amer. J. Math. **60**, 459—462 (1938).

P. Hartman and A. Wintner

1. On the spherical approach to the normal distribution law. Amer. J. Math. **62**, 759—779 (1940).

H. Hess

1. Anwendungen der logistischen Funktion in der mathematischen Bevölkerungstheorie. Diss. phil. II. Bern 1938.

B. Hostinský

1. Sur l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI. s. **13**, 921—923 (1931).
2. Sur l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI. s. **14**, 326—331 (1931).
3. Sur l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI. s. **16**, 25—27 (1932).
4. Sur une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr. **156**, 1—36 (1932).

E. Jahnke und F. Emde

1. Funktionentafeln. Leipzig und Berlin 1933.

B. Jessen and A. Wintner

1. Distribution functions and the Riemann zeta function. Trans. Amer. Math. Soc. **38**, 48—88 (1935).

E. Kamke

1. Mengenlehre. Samml. Göschen Nr. 999, Berlin und Leipzig 1928.

T. Kawata

1. On symmetric Bernoulli convolutions. Amer. J. Math. **62**, 792—794 (1940).
2. On the division of a probability law. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 249—254 (1940).

R. Kershner

1. On singular Fourier-Stieltjes transforms. Amer. J. Math. **58**, 450—452 (1936).

A. Khintchine

1. Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Bd. 2, H. 4). Berlin 1933.
2. Sul dominio di attrazione della legge di Gauss. Giorn. Ist. Ital. Attuari **6**, 378—393 (1935).
3. Zur Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze. Rec. math. Moscou, N. s. **2**, 79—117 (1937).
4. Über Klassenkonvergenz von Verteilungsgesetzen. Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk **1**, 258—261 (1937).
5. Zur Kennzeichnung der charakteristischen Funktionen. Bull. Univ. Etat Moscou, Sér. Int., Sect. A: Math. et Mécan. **1**, Fasc. 5, 1—3 (1937).
6. Invariante Klassen von Verteilungsgesetzen. Bull. Univ. Etat Moscou, Sér. Int., Sect. A: Math. et Mécan. **1**, Fasc. 5, 4—5 (1937).

K. Kohler

1. Jährliche Ausfallsmenge eines Bestandes von Holzmasten. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforschg. **2**, 34—37 (1936).

A. Kolmogoroff

1. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann. **104**, 415—458 (1931).
2. Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozesse. Math. Ann. **108**, 149—160 (1933).

E. Kuznecov

1. La loi de probabilité d'un vecteur aléatoire. C. R. Acad. Sci. URSS **2**, 187—190 u. franz. Text 190—193 (1935) (Russisch).

P. Lévy

1. Théorie des erreurs. La loi de Gauss et les lois exceptionnelles. Bull. math. Soc. France **52**, 49—85 (1924).
2. Calcul des probabilités. Paris 1925.
3. Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires indépendantes ou enchaînées. J. Math. pures appl., IX. s. **14**, 347—402 (1935).
4. Lois quasi stables et quasi semistables dans la théorie des probabilités. C. R. Soc. Math. France année **1935**, 37—38 (1936).
5. L'arithmétique des lois de probabilité. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 80—82 (1937).
6. Théorie de l'addition des variables aléatoires. Paris 1937.

7. Sur les exponentielles de polynomes et sur l'arithmétique des produits de lois de Poisson. Ann. Ecole norm., III. s. **54**, 231—292 (1937).
8. Sur les propriétés de quelques lois indéfiniment divisibles. C. R. Acad. Sci., Paris **207**, 1368—1370 (1938).
9. Sur un problème de M. Marcinkiewicz. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 318—321 (1939).
10. Sur une loi de probabilité analogue à celle de Poisson et sur un sousgroupe important du groupe des lois indéfiniment divisibles. Bull. Sci. math., II. s. **63**, 247—268 (1939).

H. Liechti

1. Beitrag zum Erneuerungsproblem. Diss. phil. II. Bern 1942.

A. J. Lotka

1. The structure of a growing population. Human Biology **3**, No. 4 (1931).

R. Lüders

1. Die Statistik der seltenen Ereignisse. Biometrika **26**, 108—128 (1934).

M. Mathias

1. Über positive Fourier-Integrale. Math. Z. **16**, 103—125 (1923).

L. Maurer

1. Über die Mittelwerte der Functionen einer reellen Variabeln. Math. Annalen **47**, 263—280 (1896).

K. Mayr

1. Wahrscheinlichkeitsfunktionen und ihre Anwendungen. Mh. Math. Phys. **30**, 17—43 (1920).

A. T. McKay

1. A Bessel function distribution. Biometrika **24**, 39—44 (1932).

R. von Mises

1. Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Z. **4**, 1—97 (1919).
2. Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik. Bd. 1. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik. Leipzig und Wien 1931.
3. La distribution de la plus grande de n valeurs. Revue math. Union Interbalkan. **1**, 141—160 (1936).

H. Münzner

1. Das Fehlergesetz des mittleren Fehlers und seine Anwendung. Bl. Vers.-Math. **2**, 237—241 (1932).
2. Über die Bewertung der Potenzmomente. Mh. Math. Phys. **41**, 375—383 (1934).

K. Pearson

1. Experimental discussion of the (x^2, P) test for goodness of fit. Biometrika **24**, 351—381 (1932).

K. Pearson, G. B. Jeffery and E. M. Elderton

1. On the distribution of the first product moment-coefficient, in samples drawn from an indefinitely large normal population. Biometrika **21**, 164—193 (1929).

K. Pearson, S. A. Stouffer and F. N. David

1. Further applications in statistics of the $T_m(x)$ Bessel function. Biometrika **24**, 293—350 (1932).

O. Perron

1. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig und Berlin 1929.

H. Pollaczek-Geiringer

1. Über die Poissonsche Verteilung und die Entwicklung willkürlicher Verteilungen. Z. angew. Math. Mech. **8**, 292—309 (1928).

G. Pólya

1. Berechnung eines bestimmten Integrals. Math. Annalen **74**, 204—212 (1913).
2. Herleitung des Gaussschen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung. Math. Z. **18**, 96—108 (1923).

S. J. Pretorius

1. Skew Bi-variate Frequency Surfaces, examined in the light of numerical illustrations. Biometrika **22**, 109—223 (1930).

D. Raikov

1. On the decomposition of Poisson laws. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **14**, 9—11 (1937).
2. On the composition of analytic distribution functions. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **23**, 511—514 (1939).

P. Riebesell

1. Einführung in die Sachversicherungsmathematik. (Veröffentl. Dtsch. Ver. Vers.-Wissensch., H. 56.) Berlin 1936.
2. Die mathematischen Grundlagen der Sachversicherung. Ber. 12. internat. Kongr. Vers.-Math. Luzern 1940 **4**, 27—36 (1941).

R. Risser

1. De la dispersion afférente à n erreurs dans le cas où chacune des erreurs composantes est régie par une loi simple. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 435—437 (1932).

R. Risser et C. Traynard

1. Les principes de la statistique mathématique. Paris 1933.

H. von Schelling

1. Trefferwahrscheinlichkeit und Variabilität. Ein Versuch zur Deutung der Wirksamkeit von Antigenen. Naturwiss. **30**, 306—312 (1942).

R. Schmidt

1. Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen. Math. Z. **22**, 89—152 (1925).

E. Slutsky

1. Sur les fonctions aléatoires presque périodiques et sur la décomposition des fonctions aléatoires stationnaires en composantes (In: S. Bernstein, E. Slutsky et H. Steinhaus: Les fonctions aléatoires). Actualités scient. et industr. Nr. 738, Paris 1938, S. 33—55.

A. Sommerfeld

1. Eine besondere anschauliche Ableitung des Gaussischen Fehlergesetzes. Boltzmann-Festschrift S. 848—859, Leipzig 1904.

J. F. Steffensen

1. On the semi-normal distribution. Skand. Aktuarietidskr. **20**, 60—74 (1937).

L. A. Surico

1. Su una formula approssimata per il calcolo della probabilità di un dato scarto nello schema di Bernoulli, in casi di dissimmetria. Giorn. Ist. Ital. Attuari **3**, 376—390 (1932).

F. Tricomi

1. Über die Summe mehrerer zufälliger Veränderlichen mit konstanten Verteilungsgesetzen. Jber. Dtsch. Math.-Vereinig. **42**, 174—179 (1932).
2. Sulla media dei valori assoluti di errori seguenti la legge di Gauss. Giorn. Ist. Ital. Attuari **7**, 280—290 (1936).

S. Vianelli

1. Altersaufbau und Wachstum der Bevölkerung. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforschg. **3**, 215—234 (1937).

S. W. Wicksell

1. Nuptiality, fertility and reproductivity. Skand. Aktuarietidskrift **14**, 125—157 (1931).

A. Wintner

1. On the stable distribution laws. Amer. J. Math. **55**, 335—339 (1933).
2. On the addition of independent distributions. Amer. J. Math. **56**, 8—16 (1934).
3. On analytic convolutions of Bernoulli distributions. Amer. J. Math. **56**, 659—663 (1934).
4. On symmetric Bernoulli convolutions. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 137—138 (1935).
5. Gaussian distributions and convergent infinite convolutions. Amer. J. Math. **57**, 821—826 (1935).
6. On convergent Poisson convolutions. Amer. J. Math. **57**, 827—838 (1935).
7. On a class of Fourier transforms. Amer. J. Math. **58**, 45—90 (1936).

P. Yuan

1. On the logarithmic frequency distribution and the semi-logarithmic correlation surface. Ann. math. Statist. **4**, 30—74 (1933).

E. Zwinggi

1. Beiträge zu einer Theorie des Bevölkerungswachstums. Mitt. Vereinig. schweiz Vers.-Math. **24**, 95—166 (1929).

Inhaltsverzeichnis

Seite

I. Verteilungsfunktionen:
1. Definition der Verteilungsfunktion 97
2. Arten von Verteilungsfunktionen 98
3. Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitstheorie 100
4. Das Stieltjessche Integral 101
5. Beziehungen zwischen Verteilungsfunktionen 103
6. Zusammensetzung von Verteilungsfunktionen 104
7. Folgen von Verteilungsfunktionen 105
8. Bemerkung über mehrdimensionale Verteilungsfunktionen 106

II. Die charakteristischen Funktionen:
1. Definition der charakteristischen Funktion 107
2. Eigenschaften der charakteristischen Funktionen 107
3. Die Umkehrformel für charakteristische Funktionen 108
4. Das Darstellungsproblem 110
5. Abbildungseigenschaften der charakteristischen Funktionen . . . 111

III. Übersicht über die bekannten Verteilungsfunktionen 113
1. Tabellarische Zusammenstellung der Verteilungsfunktionen . . . 114
2. Zusatzbemerkungen zu den einzelnen Verteilungsfunktionen . . . 128

IV. Funktionalgleichungen:
1. Auswahl gewisser Funktionalgleichungen 136
2. Unterscheidung der Funktionalgleichungen nach Integrationsintervall und Art der Verteilungsfunktionen 136
3. Unterscheidung nach auftretenden Parametern 137
4. Allgemeinere Funktionalgleichungen 139
5. Transformation der Funktionalgleichungen 140

V. Die Lösungen der Funktionalgleichungen:
1. Einparametrige Lösungen 141
2. Zweiparametrige Lösungen 145
3. Lösungen mit mehreren Parametern 147
4. Spezielle Klassen von Verteilungsfunktionen 148
5. Unbeschränkt teilbare Verteilungsfunktionen 148

VI. Das asymptotische Verhalten der Potenzen von Verteilungsfunktionen 150
1. Definition des Attraktionsgebietes 151
2. Unterscheidung der Attraktionsgebiete 152
3. Ausnahmefälle 153

Literaturverzeichnis 155