Zur mathematischen Darstellung wachsender Gesamtheiten

Autor(en): **Nolfi, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **45 (1945)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-555278

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Zur mathematischen Darstellung wachsender Gesamtheiten

Von *P. Nolfi*, Zürich

Im Heft 19 dieser Mitteilungen erschien im Jahre 1924 eine grössere Abhandlung, verfasst von Herrn Dr. F. Eggenberger, über die Wahrscheinlichkeitsansteckung. Der Verfasser zeigt anhand zahlreicher Beispiele, wie überraschend gut sich das von Prof. Pólya erdachte Urnenschema für die Darstellung statistischer Erscheinungen eignet.

Eggenberger bezeichnet als Hauptziel seiner Arbeit die Aufstellung eines einfachen Schemas, welches gestattet, die statistischen Erscheinungen, die durch Verkettung und Ansteckung hervorgerufen werden, zu erfassen. Dazu stellt er folgende, sehr lehrreiche Überlegungen an: Haben wir ein bestimmtes Schema, das einfach ist und von dem wir vermuten, dass es Vorgänge der Wirklichkeit in der Hauptsache gut wiedergibt, so ist es dann einzig und allein Sache der Erfahrung und damit der Statistik, den Beweis zu erbringen, dass jene Sätze, die wir aus unserem Schema herleiten, auch wirklich brauchbar sind. Trifft das zu, dann haben wir mehr gewonnen, als wenn wir für bestimmte beobachtete Ereignisse eine möglichst einfache Funktion gefunden haben, die uns dieselben mit der gewünschten Genauigkeit wiedergibt. In der Tat entspricht das Urnenschema der Struktur der Ereignisse. Von den Funktionen können wir aber nichts weiteres aussagen, als dass sie innerhalb der in Betracht kommenden Grenzen die Erfahrungsresultate wiedergeben.

Tatsächlich ermöglicht das Urnenschema der Chancenvermehrung nicht nur eine mathematische Beschreibung zahlreicher Vorgänge aus der Statistik, wie die Darstellung der Todesfälle an Infektionskrankheiten usw., sondern gleichzeitig auch das Verständnis für das Zustandekommen dieser Vorgänge zu fördern. Das Urnenschema entspricht, wie sich Eggenberger ausdrückt, der Struktur der Ereignisse. Es ist in der Tat ein ausgezeichnetes Beispiel für eine gedankliche

Konstruktion der Wirklichkeit und bestätigt die auf Grund allgemeiner Überlegungen von Prof. Gonseth gewonnene Erkenntnis, wonach unser Wissen über das wirkliche Geschehen durch abstrakte schematische Darstellungen bereichert und vertieft werden kann.

Es liegt im Wesen einer gedanklichen Konstruktion, dass sie, ähnlich wie eine physikalische Theorie, auf Grund neuer Erfahrungstatsachen ausgebaut, verfeinert und ergänzt werden kann oder Anlass gibt zur Aufstellung einer neuen Theorie, die dem wirklichen Geschehen näher kommt. So zeigt es sich, dass das Urnenschema der Chancenvermehrung durch ein anderes ergänzt werden kann, das in mancher Hinsicht als leistungsfähiger bezeichnet werden darf.

In seiner Abhandlung über «Wahrscheinlichkeit unstetiger Vorgänge bei kontinuierlich wirkenden Ursachen» (Commentarii Mathematici Helvetici vol. 15 fasc. 1) hat der Verfasser dieser Zeilen gezeigt, dass man mit Hilfe eines Urnenschemas die statistischen Vorgänge, wie sie sich in offenen Gesamtheiten zeigen, in sehr allgemeiner Weise darstellen kann. Es zeigt sich, dass das gleiche Urnenschema, wie es dort verwendet wurde, in entsprechender Weise sich auch auf einseitig geschlossene Gesamtheiten übertragen lässt. Unter *einseitig geschlossenen* Gesamtheiten verstehen wir entweder solche, die keinen Zugang an Mitgliedern aufweisen und daher nur durch deren Ausscheiden sich vermindern, oder solche, die keinen Abgang, wohl aber einen Zugang von Mitgliedern zu verzeichnen haben. Die ersteren werden als *geschlossene* Gesamtheiten schlechthin bezeichnet und spielen besonders in der Versicherungsmathematik eine grosse Rolle, Ein Beispiel für eine solche Gesamtheit bildet die Gesamtzahl der Bürger eines Landes, die im gleichen Kalenderjahr geboren wurden. Gesamtheiten, die nur einen Zugang haben, heissen *wachsende* Gesamtheiten. Ein Beispiel für eine solche bildet die Zahl der seit Beginn unseres Jahrhunderts in der Schweiz an Scharlach gestorbenen Personen.

Es zeigt sich, dass man auf Grund des soeben erwähnten Urnenschemas zu verschiedenen Wahrscheinlichkeitsgesetzen gelangt, je nachdem man die Vorgänge in einer offenen, geschlossenen oder wachsenden Gesamtheit zur Darstellung bringt. Im Falle der offenen Gesamtheit wird man zu einer allgemeinen Form der Poissonschen Verteilung geführt. Im Falle der geschlossenen Gesamtheit erhält man eine zweidimensionale Schar von Bernoullischen Verteilungen

und damit eine einwandfreie und übersichtliche Darstellung verschiedener Sätze der Versicherungsmathematik. Die Übertragung des gleichen Urnenschemas auf wachsende Gesamtheiten, wie solche durch Ansteckung oder allgemein durch Vermehrung entstehen, führt zu einer zweidimensionalen Schar von Pascalschen Verteilungen und damit zu einer Verallgemeinerung der Theorie der Wahrscheinlichkeitsansteckung. Das soll im folgenden gezeigt werden.

Das Urnenschema, von dem wir ausgehen, ist sehr einfach. Es besteht aus einer einzigen Urne, die weisse und schwarze Lose in einem bestimmten Mischungsverhältnis enthält, so dass die Wahrscheinlichkeit, ein weisses Los zu ziehen, gleich v und die Wahrscheinlichkeit, dass ein schwarzes Los erscheint, gleich $v_0 = 1 - v$ ist. Nun nehmen wir an, ein bestimmtes Individuum sei Träger einer ansteckenden Krankheit und es sei die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Individuum an einem bestimmten Zeitpunkt ein weiteres ansteckt, gleich der Wahrscheinlichkeit v, aus der vorgelegten Urne ein weisses Los zu ziehen.

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass das Individuum während der Zeit t ein anderes ansteckt. Dabei wollen wir vorderhand annehmen, dass eine Ansteckung nur in m bestimmten Zeitpunkten erfolgen kann und dass der Entscheid, ob eine solche Übertragung tatsächlich eintritt oder nicht, jedesmal durch Ziehung eines Loses aus der Urne gefällt wird. Offenbar ist unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit, dass durch das betrachtete Individuum insgesamt s Ansteckungen eintreten, gleich:

$$w_m = \binom{m}{s} v_0^{m-s} v^s . \tag{1}$$

Die Zahl der zu erwartenden Ansteckungen ist gleich $m \cdot v$. Sie ist zu vergleichen mit der Zahl der tatsächlich erfolgten Ansteckungen und kann aus der Statistik gewonnen werden. Wir setzen sie gleich $\mu \cdot t$. Damit ist $mv = \mu t$. Hieraus lässt sich v und damit auch v_0 berechnen. Es ist $v = \frac{\mu \cdot t}{m}$ und $v_0 = 1 - \frac{\mu \cdot t}{m}$. Setzt man diese Werte in (1) ein, so wird damit der Erwartungwert μt nicht verändert, dieser ist vielmehr unabhängig von der Wahl von m. Mit m haben wir die Zahl der Zeitpunkte bezeichnet, in denen voraussetzungsgemäss während der Zeit t eine Ansteckung möglich sein soll. In Wirklichkeit

ist es nun so, dass im allgemeinen eine Ansteckung durch einen Krankheitsträger jederzeit erfolgen kann. In diesen Fällen wird m unendlich gross. Man erhält aus (1) für die entsprechende Wahrscheinlichkeit den Ausdruck:

$$\lim_{\text{für } m=\infty} w_m = w = \frac{(\mu \cdot t)^s}{s!} e^{-\mu t}. \tag{2}$$

Formel (2) stellt den exakten Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit dar, dass während der Zeit 0 bis t insgesamt s Ansteckungen durch den anfänglich vorhandenen Krankheitsträger erfolgen. Es handelt sich um eine zweiparametrige Poissonsche Verteilung. Der Erwartungswert ist, wie man sich leicht überzeugen kann, unverändert geblieben und gleich $\mu \cdot t$.

Mit Hilfe von (2) kann die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass ein im Zeitpunkt $t = 0$ vorhandener Krankheitsträger während der Zeit t zu s Ansteckungen Anlass gibt. Allgemein interessiert es den Mathematiker nicht, allein diese Wahrscheinlichkeiten berechnen zu können, er möchte vielmehr auch die Grundlagen kennenlernen, nach denen die Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit vor sich geht, unter Beachtung der Tatsache, dass die vom ersten Krankheitsträger angesteckten Individuen ihrerseits ebenfalls zu neuen Ansteckungen Anlass geben. Auf Grund des Urnenschemas lässt sich auch für diesen allgemeinen Fall eine entsprechende Formel finden. Um sie in möglichst anschaulicher Weise herleiten zu können, nehmen wir vorderhand wieder an, die Ansteckung könne während der Zeit $0 - t$ nur an m bestimmten Zeitpunkten eintreten. Wir berechnen zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass überhaupt keine Ansteckung erfolgt. Diese ist offenbar gleich der Wahrscheinlichkeit, aus der vorgelegten Urne m Mal nacheinander ein schwarzes Los zu ziehen, also gleich $v_0{}^m$, woraus man gestützt auf die oben eingeführte Substitution bei Übergang zur Grenze $m = \infty$

$$w_{1;0} = e^{-\mu \cdot t} \tag{3}$$

erhält. Wie oben dargelegt, bedeutet $\mu \cdot t$ die Zahl der Ansteckungen, die bei gleicher Ansteckungswahrscheinlichkeit durch einen Krankheitsträger während der Zeit 0 bis t zu erwarten sind.

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass während der Zeit 0 bis t *nur eine Ansteckung* erfolgt, ist zu berücksichtigen, dass es nicht

gleichgültig ist, wann diese Ansteckung stattfindet. Je früher sie eintritt, um so grösser ist die Gefahr, dass ein weiteres Individuum bis zum Ablauf des Zeitintervalles angesteckt wird. Es ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Ansteckung im ersten Zeitpunkt erfolgt und nachher keine mehr, gleich $v \cdot v_0^{2(m-1)}$, nämlich gleich der Wahrscheinlichkeit v, dass in diesem ersten Zeitpunkt eine Ansteckung tatsächlich stattfindet, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, dass in den folgenden Zeitpunkten keine Ansteckung weder durch den ursprünglich vorhandenen noch durch den neu entstandenen Krankheitsträger erfolgt, also mit $v_0^{2(m-1)}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Ansteckung im zweiten Intervall eintritt, ist entsprechend zu berechnen. Sie ist gleich

$$v_0 \cdot v v_0^{2(m-2)}.$$

In ähnlicher Weise lassen sich die Wahrscheinlichkeiten einer Ansteckung für die folgenden Zeitpunkte berechnen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit für eine Ansteckung während des ganzen Zeitintervalles ist offenbar gleich der Summe dieser Einzelwerte:

$$w_{1m} = v v_0^{2m-2} + v v_0^{2m-3} + \ldots + v v_0^{m-1} = v_0^{m-1}(1 - v_0^m).$$

Wenn wir wieder zur Grenze übergehen, so erhalten wir endgültig

$$w_{1;1} = e^{-\mu t}(1 - e^{-\mu t}). \tag{4}$$

In gleicher Weise kann man fortfahren und die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass insgesamt s Ansteckungen während der Zeit 0 bis t erfolgen. Man erhält dafür den folgenden Ausdruck:

$$\underline{w_{1;s} = e^{-\mu t}(1 - e^{-\mu t})^s.} \tag{5}$$

Bei grösseren Werten von s zeigt es sich, dass die Ableitung dieser Formel nach dem soeben für $s = 0$ und $s = 1$ dargelegten Verfahren ziemlich umständlich wird, weil die zu bildenden Ausdrücke in v und v_0 immer grösser und unübersichtlicher werden. Die Gültigkeit von (5) lässt sich, nachdem sie für $s = 0$ und $s = 1$ erwiesen ist, einfach durch den Schluss von s auf $s + 1$ bestätigen. Es ist nämlich, wie aus (3) und (4) folgt, die Wahrscheinlichkeit, dass während eines Zeitintervalles dt eine Ansteckung erfolgt, gleich $\mu \cdot dt$. Damit

erhält man für die Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitpunkt τ eine weitere und letzte Ansteckung erfolgt, nachdem bereits $s+1$ Krankheitsträger vorhanden sind, den Ausdruck:

$$(s+1)\, e^{-\mu\tau}\,(1-e^{-\mu\tau})^s\, \mu\, e^{-\mu(t-\tau)(s+2)}\, d\tau\,.$$

Da τ einen beliebigen Wert zwischen 0 und t annehmen kann, haben wir über diesen Ausdruck zu integrieren. Das ergibt:

$$w_{1;s+1} = (s+1)\, e^{-\mu t(s+2)} \int_0^t (e^{\mu\tau}-1)^s\, e^{\mu\tau}\, \mu\, d\tau$$

$$w_{1;s+1} = e^{-\mu t}\,(1-e^{-\mu t})^{s+1}$$

in Übereinstimmung mit der allgemeinen Formel (5). Formel (5) stellt eine zweidimensionale Schar von Verteilungen dar, da sowohl μ als auch t alle Werte zwischen 0 und ∞ annehmen können. Man überzeugt sich leicht, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten gemäss (5) für alle möglichen Werte von s gleich eins wird. — Wie im folgenden gezeigt werden soll, lässt (5) noch wesentliche Erweiterungen zu.

Erweiterung auf n Merkmalträger

Formel (5) gibt die Wahrscheinlichkeiten an für eine bestimmte Ausbreitung einer Krankheit oder sonst eines Merkmales, unter der Annahme, dass im Zeitpunkt 0 nur *ein* Träger dieses Merkmales vorhanden ist. Ganz allgemein ist es wünschenswert, zu wissen, wie die Ausbreitung erfolgt, wenn zu Beginn der Untersuchung bereits mehrere Träger vorhanden sind. Wir nehmen also an, dass zurzeit 0 statt nur ein insgesamt n ansteckungs- bzw. vermehrungsfähige Individuen vorhanden sind, und suchen die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass während der Zeit 0 bis t wieder insgesamt s Ansteckungen erfolgen. Bezeichnet man mit s_i die Zahl der Ansteckungen, die durch das i-te Individuum erfolgen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass insgesamt gerade $s_1+s_2+\ldots+s_n=s$ Übertragungen stattfinden, gemäss (5) offenbar gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten

$$e^{-\mu t}\,(1-e^{-\mu t})^{s_1}\cdot e^{-\mu t}\,(1-e^{-\mu t})^{s_2}\ldots e^{-\mu t}\,(1-e^{-\mu t})^{s_n}$$

oder gleich $$e^{-n\mu t}\,(1-e^{-\mu t})^s\,.$$

Nun kann aber dieses Ereignis auf soviel Arten zustande kommen, als man Ausdrücke der angegebenen Gestalt in verschiedener Weise bilden kann. Ihre Anzahl ist $\binom{n+s-1}{s}$, so dass sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit wie folgt darstellen lässt:

$$w_{n;s} = \binom{n+s-1}{s} e^{-n\mu t} (1 - e^{-\mu t})^s. \tag{6}$$

Eine einfache Bestätigung für die Richtigkeit dieser Formel erhält man wie folgt:

In ähnlicher Weise wie bei der Bernoullischen Verteilung lassen sich auch hier alle möglichen Fälle aus der nachstehenden Darstellung berechnen:

$$(e^{-\mu t} + z e^{-\mu t} (1 - e^{-\mu t}) + z^2 e^{-\mu t} (1 - e^{-\mu t})^2 + \ldots)^n.$$

Nach den allgemeinen Multiplikationssätzen für geometrische Reihen erhält man tatsächlich für den Koeffizienten vom z^s den mit Formel (6) gegebenen Ausdruck.

Erweiterung auf zeitlich veränderliche Ansteckungswahrscheinlichkeiten

Es zeigt sich, dass (6) noch einer wesentlichen Verallgemeinerung fähig ist. Bis anhin wurde angenommen, der Erwartungswert für die durch einen Krankheitsträger zu erwartenden Ansteckungen sei eine lineare Funktion der Zeit, nämlich gleich $\mu \cdot t$. In Wirklichkeit ist es jedoch so, dass die Ansteckungswahrscheinlichkeiten sich mit der Zeit ändern, so dass auch der betrachtete Erwartungswert im allgemeinen eine Funktion von t ist, die wir mit $u(t)$ bezeichnen wollen. Wir werden nun zeigen, dass (6) auch dann noch gilt, wenn an Stelle von $\mu \cdot t$ der Ausdruck $u(t)$ tritt. Zunächst nehmen wir an, die Konstante μ erfahre nach Ablauf der Zeit t_1 eine einmalige Änderung und nehme bis zum Zeitpunkt t den konstant bleibenden Wert ν an. Es ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass während des ersten Zeitintervalles $t_1; s_1$, während des zweiten $t_2 = t - t_1; s_2$ insgesamt $s_1 + s_2 = s$ Ansteckungen erfolgen, gemäss (6) gleich

$$w(t)_{n;s_1;s_2} = \binom{n+s_1-1}{s_1} e^{-n\mu t_1} (1 - e^{-\mu t_1})^{s_1} \binom{n+s_1+s_2-1}{s_2} e^{-(n+s_1)\nu t_2} (1 - e^{-\nu t_2})^{s_2}.$$

Da s_1 und s_2 der einzigen Bedingung, dass ihre Summe gleich s ergeben muss, unterliegen, haben wir alle Werte $w(t)_{n;s_1;s_2}$, bei denen die Bedingung $s_1 + s_2 = s$ erfüllt ist, zusammenzuzählen. Dafür erhält man

$$w(t)_{n;s} = \sum_{s_1+s_2=s} w(t)_{n;s_1;s_2} = \binom{n+s-1}{s} e^{-n(\mu t_1+\nu t_2)} (1 - e^{-(\mu t_1+\nu t_2)})^s .$$

Wie man sieht, bleibt (6) formal unverändert. Im Exponent erscheint der gesamte Erwartungswert, der sich nunmehr aus zwei Summanden zusammensetzt. Man kann also sagen, dass das durch (6) gegebene Grundgesetz auch bei einer zeitlichen Veränderung der Ansteckungswahrscheinlichkeiten erhalten bleibt. Dieses Resultat lässt aber auch unmittelbar erkennen, dass man einer mehrmaligen Veränderung der Grösse μ durch entsprechende Einteilung des Intervalles Rechnung tragen kann. Die Form des Ausdruckes bleibt gegenüber solchen Änderungen invariant. Wird schliesslich μ überhaupt eine Funktion der Zeit, so kann durch fortgesetzte Unterteilung des Intervalles 0 bis t den Veränderungen von $\mu(t)$ mit beliebiger Genauigkeit Rechnung getragen werden. In diesem Falle ist für den Erwartungswert in (6) an Stelle von $\mu \cdot t$ der Wert $u(t) = \int_0^t \mu(\tau)\,dt$ einzusetzen. Als einzige Bedingung muss vorausgesetzt werden, dass $\mu(\tau)$ integrabel bleibt. Die Formel (6) nimmt damit folgende allgemeine Gestalt an:

$$w(t)_{n;s} = \binom{n+s-1}{s} e^{-nu(t)} (1 - e^{-u(t)})^s . \tag{7}$$

Dieser Ausdruck gestattet, für jede Zeitstrecke und bei zeitlich beliebig veränderlichem Erwartungswert die Wahrscheinlichkeiten für den Eintritt einer bestimmten Anzahl von Ansteckungen zu berechnen. Allgemein gesprochen stellt (7) eine zweidimensionale Schar von *Pascalschen* Verteilungen dar. Für jeden Wert von t sind unendlich viele Werte von $u(t)$ möglich.

Erwartungswert und Streuung

Aus Formel (7) lässt sich nun die zu erwartende Zahl der Merkmalträger — bei ansteckenden Krankheiten die zu erwartende Zahl der Erkrankungen — am Ende des Zeitintervalles t berechnen. Man hat dazu den Ausdruck

$$a(t) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+n)\, w(t)_{n;s}$$

auszuwerten. Um die Berechnung bequem durchführen zu können, bemerken wir, dass die mit (7) gegebenen Werte aus der Entwicklung des folgenden Ausdruckes in eine binomische Reihe erhalten werden können. Es ist

$$(8) \qquad (e^{u(t)} + z(1-e^{u(t)}))^{-n} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{n+s-1}{s} e^{-nu(t)} (1-e^{-u(t)})^s \cdot z^s .$$

Die formale Übereinstimmung des Ausdruckes links des Gleichheitszeichens in (8) mit der üblichen Darstellung der Bernoullischen Verteilung mit Hilfe einer stochastischen Veränderlichen ist augenfällig.

Aus (8) lassen sich durch Differenzieren nach z in bekannter Weise sowohl der Erwartungswert als auch die Streuung berechnen. Bezeichnen wir den ersteren mit $a(t)$ und den zweiten mit $\sigma(t)$, so erhält man dafür:

$$(9) \qquad a(t) = n e^{u(t)} = a(0)\, e^{u(t)}$$

und ebenso

$$(10) \qquad \sigma^2(t) = n e^{u(t)} (e^{u(t)} - 1) .$$

Betrachtet man die Grössen $e^{u(t)}$ und $1-e^{u(t)}$, so wie sie in (8) eingehen, als die «Wahrscheinlichkeiten» einer Bernoullischen Verteilung, so erkennt man, dass der Erwartungswert und die Streuung sich in gleicher Weise zusammensetzen, wie wenn es sich tatsächlich um eine Bernoullische Verteilung handeln würde.

Gleichung (9) zeigt, wie die Zahl der Merkmalträger sich entwickelt, wenn ihre anfängliche Zahl $a(0)$ ist. Ihre Ähnlichkeit mit der entsprechenden Formel für geschlossene Gesamtheiten ist augenfällig. Der Unterschied besteht bloss darin, dass der Exponent hier positiv, dort negativ ist. Sofern die erste Ableitung von $u(t)$ existiert, erhält man für die Intensität der Zunahme von $a(t)$ die Darstellung

$$(11) \qquad \frac{a'(t)}{a(t)} = u'(t) = \mu(t) .$$

Die Grösse $\mu(t)$ ist somit die Intensität der Vermehrung und berechnet sich in gleicher Weise wie z. B. die Sterblichkeitsintensität bei geschlossenen Gesamtheiten, nur erscheint sie hier positiv, dort aber negativ.

Man sieht aus diesen wenigen Andeutungen, dass zwischen der mathematischen Theorie der geschlossenen und der wachsenden Gesamtheiten eine weitgehende und sehr interessante Dualität besteht.

Die Verteilung von Eggenberger-Pólya

Setzt man für $u(t)$ in (7) einen konstanten Wert ein, nämlich $u(t) = ln(1 + d)$, so erhält man folgenden Spezialfall:

$$p_{n;s} = \binom{n+s-1}{s} \frac{d^s}{(1+d)^{n+s}}. \tag{12}$$

Abgesehen von der Bezeichnungsweise stellt dieser Ausdruck genau die von Eggenberger in der eingangs erwähnten Abhandlung mitgeteilten und in der Literatur als Verteilungsfunktion für die Wahrscheinlichkeitsansteckung bekannt gewordene Formel dar. (Vgl. auch Haller, Verteilungsfunktionen, Band 45, dieser Mitteilungen.)

Anwendungsgebiet

Anhand eines grossen statistischen Materials hat Eggenberger gezeigt, dass es mit Hilfe der aus dem Urnenschema der Chancenvermehrung abgeleiteten Verteilungsfunktion (12) möglich wird, statistische Erscheinungen zu erfassen und darzustellen, die sich durch die üblichen bekannten Verteilungsfunktionen nicht in befriedigender Weise beschreiben lassen. Da die durch (7) mitgeteilte Verteilungsfunktion auch die Zeit als Variable enthält und damit einen Freiheitsgrad mehr besitzt, dürfte sie in manchen Fällen eine engere Anpassung an die tatsächlichen Verhältnisse und damit eine nicht unwesentliche Verfeinerung der Theorie ermöglichen.

Zu erwähnen ist, dass mit der unter (7) angegebenen allgemeinen Verteilungsformel nicht nur die verschiedenartigen Probleme der Ansteckung untersucht werden können, sondern auch die verschiedenen Erscheinungen der Vermehrung. In der Tat können die Vorgänge

des Wachstums auf Fortpflanzung von Lebewesen durch Befruchtung und Teilung zurückgeführt werden, d. h. auf Vorgänge, die sich im Prinzip von der Ausbreitung eines Merkmals durch Ansteckung nicht unterscheiden. Formel (9) zeigt auch, dass derartige Erscheinungen exponential vor sich gehen, entsprechend der allgemeinen Auffassung über die biologischen Gesetze des Wachstums.

Eine besondere Erscheinung des Wirtschaftslebens, die ein typisches Beispiel für eine wachsende Gesamtheit darstellt, ist die Kapitalbildung. Tatsächlich gibt in unserer Wirtschaft jede Kapitaleinheit in der Regel Anlass zu einer Vermehrung durch Verzinsung. Inwieweit Formel (7) für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit einer unternormalen oder überdurchschnittlichen Verzinsung verwendet werden kann, müsste noch gezeigt werden. In diesem Zusammenhang begnügen wir uns, darauf hinzuweisen, dass durch (9) auch das Gesetz der Kapitalbildung bei kontinuierlicher Verzinsung und veränderlichen Zinsintensitäten wiedergegeben wird.