Über eine Ungleichung und ihre Anwendung bei der Abschätzung des Deckungskapitals einer gemischten prämienpflichtigen Versicherung mit steigender Todesfallsumme

Autor(en): **Gruner, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **45 (1945)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-555367

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über eine Ungleichung und ihre Anwendung bei der Abschätzung des Deckungskapitals einer gemischten prämienpflichtigen Versicherung mit steigender Todesfallsumme

Von *W. Gruner*, Zürich

Einleitung

Die Aufgabe dieses Artikels soll darin bestehen, einen gewissen Einblick in den Verlauf des Deckungskapitals einer prämienpflichtigen gemischten Versicherung mit steigender Todesfallsumme zu gewinnen. Unsere Untersuchungen beschränken sich auf eine spezielle Art der gemischten Versicherung, bei welcher die Todesfallsumme gleichmässig von 0 % bis 100 % der Erlebensfallsumme ansteigt. Jede gemischte Versicherung mit gleichmässig steigender Todesfallsumme kann in eine derartige Versicherung und eine gewöhnliche gemischte Versicherung mit konstanter Todesfallsumme zerlegt werden. Das Deckungskapital einer gewöhnlichen gemischten Versicherung darf als leicht berechenbar und daher in der Praxis als bekannte Grösse angesehen werden, wogegen für gemischte Versicherungen mit steigender Todesfallsumme die Berechnung der notwendigen Hilfszahlen umständlicher ist.

Vom theoretischen Standpunkt gesehen, ist die prämienpflichtige gemischte Versicherung mit gleichmässig von 0 % bis 100 % der Erlebensfallsumme steigender Todesfallsumme deshalb interessant, weil sie — wie die gewöhnliche prämienfreie gemischte Versicherung — die Eigenschaft besitzt, dass der Verlauf ihres Deckungskapitals, wenn der Zinsfuss gleich Null gesetzt wird, auch von der andern Rechnungsgrundlage, der Sterblichkeit, nicht mehr abhängt. Dies lässt sich anhand der folgenden Überlegung leicht nachweisen:

Der Versicherte erhält im Todesfall $\frac{t}{n}$ der Erlebensfallsumme.

(Wir rechnen im folgenden stets netto und nach der kontinuierlichen

Methode.) Da keine Zinsen angesammelt werden, so wächst der Endwert der von jedem Versicherten einbezahlten Prämien ebenfalls linear an, ist also proportional der jeweils versicherten Todesfallsumme. Damit das Äquivalenzprinzip erfüllt ist, muss offenbar der Proportionalitätsfaktor $= 1$ sein. Jeder Versicherte erhält also im Todesfall, spätestens bei Ablauf, zurück, was er einzahlte. Das Dekkungskapital ist daher identisch mit der Summe der vom Versicherten einbezahlten Prämien, somit gleich der versicherten Todesfallsumme, d. h. $\frac{t}{n}$ der Erlebensfallsumme, unabhängig von irgendwelchen Annahmen über die Sterblichkeit.

Wir wollen den Verlauf des Deckungskapitals im zinslosen System im folgenden kurz als *Grundverlauf* bezeichnen. Für die uns interessierende Versicherungsform ist also der Grundverlauf linear und unabhängig von der Sterblichkeit. Der Verlauf des Deckungskapitals, wenn der Zinsfuss von Null verschieden ist, wird vom Grundverlauf mehr oder weniger abweichen. Es lässt sich nun vermuten, dass diese Abweichung um so grösser sein wird, je höher der Zinsfuss liegt, und dass sie überdies vom Verlauf der Sterblichkeit mehr oder weniger abhängen wird. Das Hauptziel unserer Untersuchung wird sein, eine obere Schranke der Abweichung vom Grundverlauf zu gewinnen. Es wird sich herausstellen, dass das Deckungskapital höchstens um $\delta \cdot \frac{n}{8}$ vom linearen Verlauf abweicht, wobei δ die Zinsintensität und n die Versicherungsdauer bedeuten (die Erlebensfallsumme $= 1$ gesetzt). Bezeichnet W_t [1]) das Deckungskapital, so können wir diese Abschätzung formelmässig schreiben:

$$\frac{t}{n} - W_t \leqq \delta \cdot \frac{n}{8}.$$

Diese Ungleichung gilt jedoch nicht vorbehaltlos. Wir müssen, abgesehen von gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen der vorkommenden Funktionen als für die Praxis einzig wesentliche Voraussetzung, eine *mit dem Alter nicht abnehmende Sterbeintensität* verlangen. Der

---

[1]) Die übliche Bezeichnung V_t für das Deckungskapital reservieren wir für das Deckungskapital einer anderen Versicherungsform.

Ausdruck $\frac{t}{n} - W_t$ kann auch als *Risikosumme* aufgefasst werden, da ja $\frac{t}{n}$ die Todesfallsumme darstellt. In diesem Sinne ergibt die obige Ungleichung direkt eine obere Schranke für die Risikosumme der betreffenden Versicherung.

Wir zeigen nun, dass der Ausdruck $\frac{t}{n} - W_t$ sich direkt als Dekkungskapital einer Rentenversicherung auffassen lässt. Dies lässt sich auf rein algebraischem Wege verifizieren. Wir wollen jedoch hier noch nicht den ganzen Formelapparat heranziehen, sondern diese Behauptung durch eine ähnliche rein gedankliche Überlegung, wie sie dem Beweis der Formel $\bar{A}_{x\overline{n}|} = 1 - \delta \bar{a}_{x\overline{n}|}$ zugrunde gelegt werden kann, erhärten. Wir denken uns, ein Versicherter schliesse eine Versicherung folgender Form ab: Er entrichte eine Prämie im Betrage von jährlich $\frac{1}{n}$. Der Versicherer vergütet die einbezahlten Prämien ohne Zins im Todesfall des Versicherten, spätestens bei Ablauf der Versicherung. Der Versicherte zahlt dann offenbar zuviel, da er der Zinsen auf den einbezahlten Prämien verlustig geht. Damit nun das Äquivalenzprinzip gewahrt bleibt, muss sich der Versicherer zudem verpflichten, dem Versicherten bei Lebzeiten die Zinsen auf den einbezahlten Prämien zu vergüten. Die Zinsen stellen aber nichts anderes dar als eine steigende Rente. Da nach t Jahren die Summe der einbezahlten Prämien $\frac{t}{n}$ beträgt, belaufen sich die Zinsen für das Zeitelement von t bis $t + dt$ auf $\delta \frac{t}{n} dt$. Zu Lebzeiten des Versicherten, spätestens bis zum Ablauf der Versicherung, erhält der Versicherte somit eine gleichmässig steigende temporäre Leibrente mit einer jährlichen Steigerung von $\delta \cdot \frac{1}{n}$. Das Deckungskapital der ganzen Versicherung ist $\frac{t}{n}$, da ja die Zinsen jeweils sofort dem Versicherten vergütet werden.

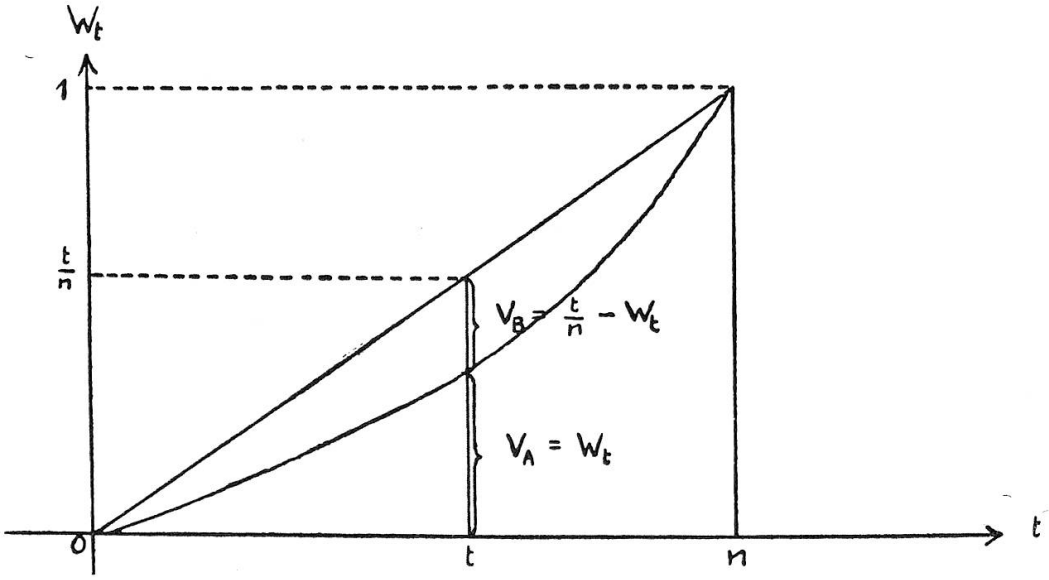
Wir zerlegen nun diese Versicherung fiktiv in eine Kapitalversicherung (Police A) und eine Rentenversicherung (Police B).

Police A: Kapitalversicherung. In die Kapitalversicherung werden die Todesfalleistung und die Erlebensfallsumme eingeschlossen. Für diese Versicherung zahlt der Versicherte nur einen der Versicherungsleistung dieser Police entsprechenden Teil P_A der jährlichen Prämie $\frac{1}{n}$ der Gesamtversicherung.

Police B: Rentenversicherung. In die Rentenversicherung ist die oben beschriebene steigende temporäre Rente eingeschlossen. Der Versicherte zahlt dafür eine Prämie P_B. Es gilt:

$$P_A + P_B = \frac{1}{n}.$$

Bezeichnen wir noch mit V_A das Deckungskapital der Police A und mit V_B dasjenige der Police B, so wird $V_A + V_B = \frac{t}{n}$ (vgl. nachstehende Figur).



Die Versicherung der Police A stellt nun gerade die Kapitalversicherung dar, für welche wir das Deckungskapital abschätzen wollen. Es ist also $V_A = W_t$. Der Ausdruck $\frac{t}{n} - W_t$ stellt dann offenbar gerade das Deckungskapital der Police B V_B dar.

Es ist für die weitere Verfolgung unserer Aufgabe zweckmässig, den jährlichen Steigerungsbetrag = 1 zu setzen. Wir bezeichnen dann

mit V_t das Deckungskapital einer durch jährliche Prämien finanzierten gleichmässig steigenden temporären Rente mit einer jährlichen Steigerung vom Betrage 1. Unsere Aufgabe reduziert sich dann dahin, zu beweisen:

$$V_t \leqq \frac{n^2}{8}.$$

Die Ungleichung

Für die mathematische Diskussion sehen wir in der Schreibweise von der versicherungsmathematischen Deutung der auftretenden Grössen zunächst ab. Bei der nachfolgenden Untersuchung soll indessen bei den einzelnen Schritten diese Deutung nicht völlig aus den Augen gelassen werden. Wir führen daher eine Funktion $f(t)$ ein, die in der versicherungsmathematischen Deutung der Grösse D_{x+t} entspricht. V_t lässt sich dann wie folgt schreiben:

$$V_t = \frac{1}{f(t)\int\limits_0^n f(\tau)\,d\tau}\left\{\int\limits_t^n \tau\cdot f(\tau)\,d\tau\cdot\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau - \int\limits_t^n f(\tau)\,d\tau\cdot\int\limits_0^t \tau\cdot f(\tau)\,d\tau\right\}.$$

Der Ungleichung $V_t \leqq \frac{n^2}{8}$ entspricht eine Ungleichung zwischen gewissen Integralen über die Funktionen $f(t)$ bzw. $t\cdot f(t)$, und die Voraussetzungen, die dem Beweis zugrunde liegen, entsprechen gewissen Eigenschaften der Funktion $f(t)$, die wir verlangen. Damit haben wir eine rein mathematische Formulierung der Ungleichung erreicht.

Es sei also $f(t)$ eine im abgeschlossenen Intervall $0 \leqq t \leqq n$ erklärte Funktion mit folgenden Eigenschaften:

I $f(t)$ *ist stetig,*

II $f(t) > 0$,

III $f(t)$ *ist monoton nicht zunehmend,*

IV $\log f(t)$ *ist konkav im weiteren Sinne,*

d. h. $\begin{vmatrix} 1 & t_1 & \log f(t_1) \\ 1 & t_2 & \log f(t_2) \\ 1 & t_3 & \log f(t_3) \end{vmatrix} \leqq 0$ *für* $t_1 \leqq t_2 \leqq t_3$ [1]).

[1]) Vgl. zu dieser Schreibweise: W. Wegmüller, Ausgleichung durch Bernstein-Polynome, «Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker», 36. Heft, S. 26.

Voraussetzung IV bedeutet bei zweimaliger Differenzierbarkeit der Funktion $f(t)$, dass $\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{f(t)}\frac{d}{dt}f(t)\right) \geqq 0$; diese Voraussetzung entspricht also der in der Einleitung erwähnten *Monotonie der Sterbeintensität.*

Unter diesen 4 Voraussetzungen gilt folgende Ungleichung für die Funktion $f(t)$:

$$\int_t^n \tau \cdot f(\tau)\,d\tau \cdot \int_0^t f(\tau)\,d\tau - \int_t^n f(\tau)\,d\tau \cdot \int_0^t \tau \cdot f(\tau)\,d\tau \leqq \frac{n^2}{8} \cdot f(t) \cdot \int_0^n f(\tau)\,d\tau. \quad (1)$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $f(t)$ eine Konstante und $t = \frac{n}{2}$ ist.

Beweis der Ungleichung

Wir setzen wie oben

$$V(t) = \frac{1}{f(t)\int_0^n f(\tau)\,d\tau}\left\{\int_t^n \tau f(\tau)\,d\tau \cdot \int_0^t f(\tau)\,d\tau - \int_t^n f(\tau)\,d\tau \cdot \int_0^t \tau \cdot f(\tau)\,d\tau\right\}. \quad (2)$$

Der Ausdruck für $V(t)$ lässt sich zunächst durch eine einfache Umformung auf folgende Form bringen:

$$V(t) = \frac{1}{f(t)\int_0^n f(\tau)\,d\tau}\left\{\int_t^n (\tau - t) f(\tau)\,d\tau \cdot \int_0^t f(\tau)\,d\tau + \int_t^n f(\tau)\,d\tau \int_0^t (t - \tau) f(\tau)\,d\tau\right\}. \quad (2a)$$

Aus dieser Form ist ohne weiteres ersichtlich,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{dass} & V(0) = 0 \\ & V(n) = 0 \\ \text{und} & V(t) > 0 \text{ für } 0 < t < n \end{array}\right\}. \quad (3)$$

Aus (3) folgt, dass $V(t)$ sein Maximum im Innern des Intervalls annimmt.

Aus (2) leiten wir eine Differentialgleichung ab, die bei einmaliger Differenzierbarkeit — was hier nicht vorausgesetzt wird — der Thieleschen Reservedifferentialgleichung entspricht.

Es folgt aus (2):

$$V(t)\cdot f(t) = \frac{1}{\int\limits_0^n f(\tau)\,d\tau}\left\{\int\limits_t^n \tau\cdot f(\tau)\,d\tau\cdot\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau - \int\limits_t^n f(\tau)\,d\tau\cdot\int\limits_0^t \tau f(\tau)\,d\tau\right\}.$$

Hieraus folgt, dass das Produkt $V(t)\cdot f(t)$ als ganze rationale Funktion von Integralen stetiger Funktionen differenzierbar ist.

Es ergibt sich: $$\frac{d}{dt}\left(V(t)\cdot f(t)\right) = f(t)\cdot(P-t) \tag{4}$$

wobei wir $$P = \frac{\int\limits_0^n \tau f(\tau)\,d\tau}{\int\limits_0^n f(\tau)\,d\tau}$$ setzen.

Wir bemerken noch, dass nach I $P > 0$ ist.

Den Beweis der Ungleichung (1) erledigen wir in drei Schritten.

1. Wir beweisen die Ungleichung (1) zunächst für *konstantes* $f(t)$. Die versicherungsmathematische Deutung dieser Annahme ist: Zins und Sterblichkeit $= 0$.
2. Beim zweiten Schritt nehmen wir an, $f(t)$ sei eine nicht konstante Exponentialfunktion, d. h. $\log f(t)$ *ist linear, aber nicht konstant.* Diese Annahme bedeutet im Hinblick auf das Anwendungsbeispiel, dass mit konstanter Zins- und Sterblichkeitsintensität gerechnet wird.
3. Der dritte Schritt umfasst den allgemeinen Fall: $\log f(t)$ weise einen *nichtlinearen Verlauf* auf.

1. Schritt: $f(t) = Const.$

Aus (2) folgt für $f(t) =$ Const. für beliebiges t:

$$V(t) = \frac{t\cdot(n-t)}{2} = \frac{n^2}{8} - \frac{1}{2}\left(t-\frac{n}{2}\right)^2.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar: $V(t) \leqq \frac{n^2}{8}$ und dann und nur dann $= \frac{n^2}{8}$, wenn $t = \frac{n}{2}$.

2. Schritt: $\log f(t)$ linear, aber nicht konstant.

Wir setzen $\log f(t) = -\varrho \cdot t + \log C$

und daher $f(t) = C \cdot e^{-\varrho t}$.

Es ist $\varrho > 0$ wegen Voraussetzung III. ϱ stellt in unserem Beispiel die Summe der konstanten Sterbe- und Zinsintensität dar. Diesen Ausdruck setzen wir in (2) ein und erhalten für $V(t)$ die Formel:

$$V(t) = \frac{1}{\varrho^2}\left[t\varrho - \frac{n\varrho}{e^{n\varrho}-1}(e^{t\varrho}-1)\right]. \tag{5}$$

Da $V(t)$ gemäss (3) sein Maximum im Innern des Intervalls annimmt, können wir das Maximum nach den üblichen Regeln der Differentialrechnung bestimmen: Wir schreiben für dieses Maximum (in seiner Abhängigkeit von ϱ) $M(\varrho)$ und erhalten

$$M(\varrho) = \frac{1}{\varrho^2}\left[-1 + \frac{n\varrho}{e^{n\varrho}-1} - \log\frac{n\varrho}{e^{n\varrho}-1}\right]. \tag{6}$$

Zu zeigen ist: $M(\varrho) < \frac{n^2}{8}$.

Zur Diskussion dieser Ungleichung ist es zweckmässig, die Grösse $z = n\varrho$ einzuführen.

Wir setzen $M(\varrho) = n^2 \cdot \varphi(z)$

mit
$$\varphi(z) = \frac{1}{z^2}\left[-1 + \frac{z}{e^z-1} - \log\frac{z}{e^z-1}\right]. \tag{7}$$

Wir wollen nun nicht nur beweisen, dass $M(\varrho) < \frac{n^2}{8}$ bzw. $\varphi(z) < \frac{1}{8}$ ist, für $z > 0$, sondern als Verschärfung $\frac{d\varphi(z)}{dz} < 0$ für

$z > 0$. Damit ist dann zugleich bewiesen, dass allgemein bei konstanter Sterblichkeit der Maximalbetrag mit zunehmendem Zinsfuss abnimmt.

Für die weitere Entwicklung setzen wir zunächst für $z > 0$:

$$\lambda(z) = \frac{1}{z^2}\left[-1 + \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1}\right]. \tag{8}$$

Wir versuchen nun, $\varphi(z)$ durch $\lambda(z)$ darzustellen:

Es ist $$\frac{\left(\frac{z}{e^z-1}\right)'}{\left(\frac{z}{e^z-1}\right)} = \frac{1}{z} - 1 - \frac{1}{z}\cdot\frac{z}{e^z-1} = -\frac{1}{2} - z\cdot\lambda(z).$$

Integrieren wir diese Gleichung von 0 bis z und schreiben als Integrationsvariable ξ statt z, so erhalten wir:

$$\log\frac{z}{e^z-1} = -\frac{z}{2} - \int_0^z \xi\cdot\lambda(\xi)\,d\xi$$

und daher

$$\varphi(z) = \lambda(z) + \frac{1}{z^2}\cdot\int_0^z \xi\cdot\lambda(\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

Die Funktionen $\varphi(z)$ und $\lambda(z)$ sind analytisch in der Umgebung von $z = 0$ und lassen sich daher in Potenzreihen nach z entwickeln. Der Konvergenzradius dieser Reihen ist 2π entsprechend den $z = 0$ nächstgelegenen Polen von $\frac{z}{e^z-1}$.

Es ist $$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}\cdot z^\nu.$$

Hiebei sind B_ν die Bernoullischen Zahlen, für welche bekanntlich gilt: $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_3 = B_5 = B_7 = \ldots = 0$.

B_2, B_4, B_6 ... etc. besitzen abwechselndes Vorzeichen.

Wir erhalten daher als Potenzreihe von $\lambda(z)$

$$\lambda(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} \cdot z^{2\nu-2} \tag{10}$$

und aus

$$\varphi(z) = \lambda(z) + \frac{1}{z^2} \int_0^z \xi \cdot \lambda(\xi)\, d\xi$$

für $\varphi(z)$ den Ausdruck:

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{2\nu} \cdot \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} \cdot z^{2\nu-2}. \tag{11}$$

Da $B_2 = \frac{1}{6}$, ergibt sich $\lambda(0) = \frac{1}{12}$ und $\varphi(0) = \frac{1}{8}$.

Wir wollen nun zeigen, dass $\lambda'(z) < 0$ für $z > 0$.

Wir bilden für $z \leqq 4$ die Potenzreihe für $\lambda'(z)$. Diese Reihe ist alternierend. Sind daher die Quotienten Q_ν der absoluten Beträge aufeinanderfolgender Reihenglieder < 1, so können wir schliessen, dass $\lambda'(z)$ immer negativ ist, für $z \leqq 4$, da das erste Glied der Reihe negativ ist.

Es ist
$$\lambda'(z) = \sum_{\nu=2}^{\infty} (2\nu - 2) \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} \cdot z^{2\nu-3}$$

und
$$Q_\nu = \frac{2\nu}{2\nu - 2} \cdot \frac{\dfrac{|B_{2\nu+2}|}{(2\nu+2)!}}{\dfrac{|B_{2\nu}|}{(2\nu)!}} \cdot z^2.$$

Zur weiteren Behandlung von Q_ν verwenden wir die von Euler stammende Relation:

$$\zeta(2\nu) = \frac{1}{2} \frac{|B_{2\nu}|}{(2\nu)!} (2\pi)^{2\nu},$$

wobei $\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots$ die Riemannsche Zetafunktion bedeutet.

Nun ist augenscheinlich $\zeta(2\nu+2) < \zeta(2\nu)$.

Da ferner $z \leqq 4$, $\nu \geqq 2$, also $\dfrac{2\nu}{2\nu-2} \leqq 2$,

so erhält man $Q_\nu \leqq \dfrac{32}{36} \cdot \dfrac{\zeta(2\nu+2)}{\zeta(2\nu)} \cdot \left(\dfrac{6}{2\pi}\right)^2 < 1$, da jeder der Faktoren kleiner ist als 1.

Hieraus folgt also $\lambda'(z) < 0$ für $0 < z \leqq 4$.

Ist nun $z > 4$, so bilden wir

$$\lambda'(z) = \left(\frac{1}{z(e^z-1)}\right)' - \frac{z-4}{2z^3}.$$

Es ist

$$\left(\frac{1}{z(e^z-1)}\right)' = -\frac{e^z-1+z\cdot e^z}{z^2(e^z-1)^2} < 0, \text{ da } e^z > 1.$$

Daher ist $\lambda'(z) < 0$ für $z > 4$ und daher allgemein für $z > 0$.

Schliesslich folgt daraus $\lambda(\xi) \geqq \lambda(z)$ für $\xi \leqq z$, also

$$\int_0^z \xi \cdot \lambda(\xi)\, d\xi \geqq \lambda(z) \cdot \int_0^z \xi\, d\xi = \frac{z^2}{2} \cdot \lambda(z).$$

Nun ist

$$\varphi'(z) = \lambda'(z) + \frac{\lambda(z)}{z} - \frac{2}{z^3} \int_0^z \xi\, \lambda(\xi)\, d\xi,$$

also

$$\varphi'(z) \leqq \lambda'(z) + \frac{\lambda(z)}{z} - \frac{\lambda(z)}{z} = \lambda'(z) < 0.$$

Damit haben wir bewiesen

$$\varphi'(z) < 0 \text{ für } z > 0. \tag{12}$$

Da nun $\varphi(0) = \dfrac{1}{8}$, so erhalten wir $\varphi(z) < \dfrac{1}{8}$ für $z > 0$, also

$$M(\varrho) < \frac{n^2}{8} \text{ für } \varrho > 0. \tag{13}$$

3. Schritt: $\log f(t)$ weise einen nichtlinearen Verlauf auf. Der Beweis dieses Falles wird sich wesentlich auf die bereits erledigten Spezialfälle stützen. Zu diesem Zwecke leiten wir noch für diese beiden Spezialfälle aus (4) eine Differentialgleichung II. Ordnung ab:

Es ist ja $f(t) = C \cdot e^{-\varrho t}$ mit $\varrho \geqq 0$ und daher

$$V'(t) = P - t + \varrho\, V(t).$$

Schliesslich
$$V''(t) = \quad -1 + \varrho\, V'(t). \tag{4a}$$

Daneben gelten die Randbedingungen $V(0) = V(n) = 0$. (4b)

Aus (4a) und (4b) ist umgekehrt $V(t)$ eindeutig bestimmt.

Wir formen nun Voraussetzung IV, die hier wesentlich wird, noch um:

Es seien $t_1 < t_2 < t_3$ 3 im übrigen beliebige voneinander verschiedene Stellen im Intervall $0 \leqq t \leqq n$.

Dann lässt sich die Ungleichung:

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & \log f(t_1) \\ 1 & t_2 & \log f(t_2) \\ 1 & t_3 & \log f(t_3) \end{vmatrix} \leqq 0$$

auf die Form bringen:

$$\frac{\log f(t_3) - \log f(t_2)}{t_3 - t_2} \leqq \frac{\log f(t_2) - \log f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Wie wir schon zu Beginn des Beweises allgemein feststellten, nimmt die Funktion $V(t)$ ihr Maximum im Innern des Intervalls an. T sei eine solche Stelle und t_1, t_2, t_3, t_4 4 weitere Stellen mit $t_1 < t_2 < T < t_3 < t_4$.

Es gilt dann:

$$\frac{\log f(t_4) - \log f(t_3)}{t_4 - t_3} \leqq \frac{\log f(t_3) - \log f(T)}{t_3 - T} \leqq \frac{\log f(T) - \log f(t_2)}{T - t_2} \leqq \frac{\log f(t_2) - \log f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Aus dieser Reihe von Ungleichungen folgt dann allgemein:

$$-\varrho_1 = \inf_{t_1 < t_2 \leq T} \frac{\log f(t_2) - \log f(t_1)}{t_2 - t_1} \geqq \sup_{T \leq t_3 < t_4} \frac{\log f(t_4) - \log f(t_3)}{t_4 - t_3} = -\varrho_2 .$$

Wir setzen

$$\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} = \varrho . \tag{14}$$

Bei differenzierbarem $f(t)$ ist $\varrho_1 = \varrho = \varrho_2$, und ϱ stellt die negative Intensität von $f(t)$ an der Stelle $t = T$ dar. In unserem Beispiel bedeutet also ϱ die Summe von Zins- und Sterbeintensität an der Stelle $t = T$.

Wir konstruieren nun eine Hilfsfunktion:

$$y(t) = e^{-\varrho(T-t)} \left\{ V(T) + \int_t^T e^{\varrho(T-\tau)} (\tau - P)\, d\tau \right\} . \tag{15}$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Funktion $\Phi(t) = V(t) - y(t) \geqq 0$ ist, und speziell $\Phi(0) = 0$ und $\Phi(n) = 0$ gleichzeitig dann und nur dann, wenn $\log f(t)$ einen linearen Verlauf aufweist.

Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst das Intervall $0 \leqq t \leqq T$.

Ist $t_1 < t_2 \leqq T$, so folgt aus der obigen Ungleichung:

$$\frac{\log f(t_2) - \log f(t_1)}{t_2 - t_1} \geqq -\varrho_1 \geqq -\varrho \geqq -\varrho_2 .$$

Hieraus folgt

$$\frac{e^{\varrho(T-t_1)}}{f(t_1)} \geqq \frac{e^{\varrho(T-t_2)}}{f(t_2)} . \tag{16}$$

Wir setzen nun $T - t = u$ und schreiben $y(t) = y^*(u)$, $V(t) = V^*(u)$, $\Phi(t) = \Phi^*(u)$, $f(t) = f^*(u)$ und $t - P = g^*(u)$.

Aus Ungleichung (16) folgt dann:

$$\frac{e^{\varrho u_1}}{f^*(u_1)} \geqq \frac{e^{\varrho u_2}}{f^*(u_2)} , \quad u_1 > u_2 .$$

Setzt man

$$\psi(u) = \frac{e^{\varrho u}}{f^*(u)},$$

so ist also $\psi(u)$ eine monoton nichtabnehmende Funktion von u. Für die weitere Berechnung ist nun noch die Differentialgleichung (4) für $V(t)$ heranzuziehen. Setzt man auch dort $T - t = u$, so erhält man die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{du}\left(V^*(u) f^*(u)\right) = f^*(u) \cdot g^*(u). \tag{4*}$$

Nun schreiten wir zur Darstellung von $\Phi^*(u)$.

Es ist zunächst

$$y^*(u) = e^{-\varrho u}\left\{V^*(0) + \int_0^u e^{\varrho\tau} g^*(\tau)\, d\tau\right\}.$$

Daher wird

$$\Phi^*(u) = V^*(u) - y^*(u) = e^{-\varrho u}\left\{V^*(u) f^*(u) \cdot \psi(u) - V^*(0) - \int_0^u e^{\varrho\tau} g^*(\tau)\, d\tau\right\} =$$

$$= e^{-\varrho u}\left\{V^*(u) f^*(u)\, \psi(u) - V^*(0) f^*(0)\, \psi(0) - \int_0^u f^*(\tau)\, g^*(\tau)\, \psi(\tau)\, d\tau\right\}.$$

Unter Berücksichtigung von (4*) können wir nun $\Phi^*(u)$ schreiben:

$$\Phi^*(u) = e^{-\varrho u}\left\{\left(V^*(u) f^*(u)\right) \cdot \psi(u) - \left(V^*(0) f^*(0)\right) \psi(0) - \int_0^u \frac{d}{d\tau}\left(V^*(\tau) f^*(\tau)\right) \psi(\tau)\, d\right.$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer liesse sich ohne weiteres partiell integrieren, wenn $\psi(\tau)$ differenzierbar wäre. Dies wurde jedoch nicht vorausgesetzt. Da indessen $\psi(\tau)$ monoton ist, lässt sich der obige Ausdruck für $\Phi^*(u)$ als Stieltjessches Integral schreiben:

$$\Phi^*(u) = e^{-\varrho u} \int_0^u V^*(\tau) f^*(\tau)\, d\psi(\tau). \tag{17}$$

Da $\psi(u)$ monoton nicht abnimmt, $f^*(u)$ im Intervall positiv ist (nach Voraussetzung II) und ebenso $V^*(\tau) \geqq 0$, so folgt $\Phi(t) = \Phi^*(u) \geqq 0$.

Nun ist noch zu untersuchen, in welchen Fällen $\Phi(t) = 0$ ist.

Es ist bekanntlich

$$\int_0^u V^*(\tau) f^*(\tau)\, d\psi(\tau) \geqq \underset{0 \leqq \tau \leqq u}{\mathrm{Min}}\, V^*(\tau) f^*(\tau)\, [\psi(u) - \psi(0)].$$

Es sei zunächst $\psi(u)$ nicht konstant.

Dann folgt aus der Monotonie $\psi(T) - \psi(0) > 0$. Wegen der Stetigkeit von $\psi(u)$ (Voraussetzung I) gibt es auch ein u_0 mit $u_0 < T$ und $\psi(u_0) - \psi(0) > 0$.

Da ferner im Intervall $0 \leqq \tau \leqq u_0$ nach (3) $V^*(\tau) > 0$ ist, so gilt

$$\int_0^{u_0} V^*(\tau) f^*(\tau)\, d\psi(\tau) > 0$$

und daher a fortiori $\displaystyle\int_0^T V^*(\tau) f^*(\tau)\, d\psi(\tau) > 0;$

d. h. $$\Phi^*(T) = \Phi(0) > 0.$$

Ist aber $\psi(u)$ im Intervall $0 \leqq u \leqq T$ konstant, dann folgt aus (17) $\Phi(o) = 0$. Ferner ist dann $\log f(t)$ im Intervall $0 \leqq t \leqq T$ linear und überdies, wegen $\psi(u) = \dfrac{e^{\varrho u}}{f^*(u)}$, $\varrho = \varrho_1$ und daher auch $\varrho = \varrho_2$.

Die analogen Rechnungen lassen sich auch für das Intervall $T \leqq t \leqq n$ durchführen. Man hat in diesem Fall $t - T = u$ zu setzen. Man findet ebenso, dass $\Phi(t) \geqq 0$ ist und $\Phi(n) = 0$ dann und nur dann, wenn $\log f(t)$ im Intervall $0 \leqq t \leqq n$ linear ist und $\varrho_1 = \varrho = \varrho_2$.

Wäre nun *sowohl* $\Phi(0)$ *als auch* $\Phi(n) = 0$, so müsste $\log f(t)$ in beiden Intervallen: $0 \leqq t \leqq T$ und $T \leqq t \leqq n$ linear verlaufen und der Differenzenquotient in beiden Fällen $\equiv \varrho$ sein. Hieraus würde jedoch folgen, dass $\log f(t)$ im ganzen Intervall $0 \leqq t \leqq n$ linear verliefe, ohne an der Stelle $t = T$ eine Ecke aufzuweisen, was nach Voraussetzung ausgeschlossen sein soll.

Nun können wir aus (15) eine Differentialgleichung für $y(t)$ ableiten:

$$\frac{dy}{dt} = P - t + \varrho y(t).$$

Durch nochmaliges Differenzieren erhalten wir

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -1 + \varrho \cdot \frac{dy}{dt}. \tag{18}$$

Betrachten wir nun die Funktion $F(t)$, welche der Differentialgleichung (18) genügt und ferner den Randbedingungen $F(0) = F(n) = 0$.

$F(t)$ erfüllt offenbar gerade die Bedingungen (4a) und (4b), und es gilt daher $F(t) \leqq \frac{n^2}{8}$.

$F(t)$ stellt also den Verlauf des Deckungskapitals dar, bei konstanter Zins- und Sterblichkeitsintensität, wobei diese Intensitäten denjenigen entsprechen, welche an der Stelle $t = T$ im allgemeinen Fall angenommen werden. Wir können die Aussage verschärfen, indem wir schreiben

$$F(t) \leqq n^2 \cdot \varphi(n\varrho). \tag{19}$$

Diese letztere Verschärfung ist zum Beweise der Ungleichung an sich nicht notwendig, jedoch erzielt man bei unseren Anwendungsbeispielen noch ein etwas besseres Resutat.

$y(t)$ lässt sich aus $F(t)$, $y(0)$ und $y(n)$ bestimmen, nach dem Grundsatz, dass die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Es sei also $y(t) = F(t) + C_1 e^{\varrho t} + C_2$. C_1 und C_2 bestimmen sich aus $y(0)$ und $y(n)$ eindeutig. Man findet schliesslich:

$$y(t) = F(t) + y(0)\left\{1 - \frac{e^{\varrho t} - 1}{e^{\varrho n} - 1}\right\} + y(n)\left\{\frac{e^{\varrho t} - 1}{e^{\varrho n} - 1}\right\}. \tag{20}$$

Nun sind die in die geschweiften Klammern gesetzten Ausdrücke > 0 für $0 < t < n$. Da ferner $V(0) = V(n) = 0$, so ist wegen $\Phi(0) \geqq 0$, $\Phi(n) \geqq 0$, $y(0) \leqq 0$ und $y(n) \leqq 0$

$$y(t) \leqq F(t).$$

Das Gleichheitszeichen kann aber nur gelten, wenn $y(0)$ und $y(n)$ zugleich verschwinden, d. h. aber $\Phi(0) = \Phi(n) = 0$, was wir ausschliessen konnten.

Es ist somit $$y(t) < F(t).$$

Setzen wir speziell $t = T$, so wird

$$\text{wegen} \quad V(T) = y(T)$$
$$V(T) < F(T).$$

Weil aber T eine Maximumstelle von $V(t)$ ist, so gilt daher allgemein

$$V(t) < F(T). \tag{21}$$

Speziell folgt also $$V(t) < \frac{n^2}{8}, \tag{22}$$

womit die Ungleichung (1) vollständig bewiesen ist. Ferner gilt sogar nach (19) bei nichtlinearem Verlauf von $\log f(t)$

$$V(t) < n^2 \cdot \varphi(n\varrho). \tag{23}$$

Anwendung der Ungleichung

Wir kehren damit zu unserem Beispiel zurück. Wir erhalten dann für das Deckungskapital W_t der eingangs beschriebenen Kapitalversicherung (Police A) die Ungleichung

$$\frac{t}{n} - W_t \leqq \frac{\delta}{n} \cdot \frac{n^2}{8} = \frac{\delta n}{8}, \tag{24}$$

oder schärfer gefasst:

$$\frac{t}{n} - W_t \leqq \frac{\delta}{n} \cdot n^2 \cdot \varphi(n\varrho).$$

Hiebei bedeutet ϱ die Summe der Sterbe- und Zinsintensität an der Stelle $t = T$ der maximalen Abweichung. Da wir diese Stelle, ohne die Berechnung durchzuführen, nicht kennen, nützt uns die Verschärfung der Ungleichung zunächst praktisch nichts. Berücksichtigen wir aber, dass die Funktion $\varphi(z)$ monoton fallend ist mit wachsendem z, so können wir schreiben

$$\frac{t}{n} - W_t \leqq \delta n \cdot \varphi(n\delta), \text{ wegen } \delta \leqq \varrho. \tag{25}$$

Hiebei ist

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^2}\left[-1 + \frac{z}{e^z - 1} - \log\frac{z}{e^z - 1}\right].$$

Für die Praxis ist es bequemer, solange δn nicht zu gross, die anfänglich stark konvergente Potenzreihe zu benützen:

$$\varphi(z) = \frac{1}{8} - \frac{1}{576}z^2 + \frac{1}{25920}z^4 - + \ldots .$$

Wir erhalten dann für die Abweichung des Deckungskapitals vom linearen Verlauf:

$$\frac{t}{n} - W_t \leqq \frac{1}{8}(n\delta) - \frac{1}{576}(n\delta)^3 + \frac{1}{25920}(n\delta)^5 - + \ldots .$$

Nachstehend haben wir für ein bestimmtes Beispiel diese Abweichung ausgerechnet. Als Sterblichkeitsgrundlagen wurden die Tafeln TMG/TFG 1938 gewählt, als technischer Zinsfuss 3 %. Damit jedoch die Rechnungen nach der kontinuierlichen Methode durchgeführt werden konnten, wurde innerhalb der einzelnen Jahre die Sterbeintensität als konstant angenommen. Es ist leicht nachzuweisen, dass dann innerhalb der gewählten Versicherungsdauer die Voraussetzungen, die wir von der Funktion $f(t) = D_{x+t}$ verlangt haben, erfüllt sind.

Beispiel: Eintrittsalter: $x = 30$, Versicherungsdauer: $n = 35$,

W_t: Deckungskapital der Kapitalversicherung.

Todesfallsumme steigend von 0 % bis 100 % der Erlebensfallsumme.

t	$x+t$	W_t	$\frac{t}{n}$	$\frac{t}{n} - W_t$
0	30	0,00000	0,00000	0,00000
5	35	0,09087	0,14286	0,05199
10	40	0,19526	0,28571	0,09045
15	45	0,31486	0,42857	0,11371
16	46	0,34077	0,45714	0,11637
17	47	0,36739	0,48571	0,11832
18	48	0,39473	0,51429	0,11956
19	49	0,42281	0,54286	0,12005
20	50	0,45165	0,57143	0,11978
25	55	0,60811	0,71429	0,10618
30	60	0,78822	0,85714	0,06892
35	65	1,00000	1,00000	0,00000

Das Maximum der Abweichung vom linearen Verlauf wird ca. im Alter 49 erreicht mit $\frac{t}{n} - W_t = 0{,}12005$. Anderseits beträgt die aufgestellte Schranke $\frac{\delta n}{8} = 0{,}12932$, die verfeinerte $\delta n \cdot \varphi(\delta n) = 0{,}12744$.

Die Schranke 0,12744 bedeutet eine Grenze, welche von speziellen Annahmen über die Sterblichkeit abgesehen von der Monotonie der Sterbeintensität unabhängig ist. Ist die Sterblichkeit Null, so wird diese Grenze an einer gewissen Stelle genau angenommen. Wie das obige Beispiel zeigt, ist auch bei von Null verschiedener Sterblichkeit der maximale Betrag der Abweichung nur wenig von der theoretischen Grenze entfernt. Die obige Schranke lässt sich daher auch für eine approximative Berechnung des Deckungskapitals einer gemischten Versicherung mit steigender Todesfallsumme verwenden.

Die Untersuchung dieses Problems wurde jedoch nicht nur deshalb unternommen, um dem Praktiker eine einfache Handhabe für seine Berechnungen zu bieten; es war zudem beabsichtigt, einen kleinen Beitrag zum allgemeinen Problem der Abhängigkeit des Deckungskapitals von seinen Rechnungsgrundlagen zu leisten. Offenbar ist es bei der hier diskutierten Versicherungsform mit der schon in der Einleitung erwähnten Eigenschaft, dass bei zinslosem System der Verlauf des Deckungskapitals auch unabhängig von der Sterblichkeit wird, leichter, allgemeine Schranken für das Deckungskapital aufzustellen als für andere einfachere Versicherungsformen.