Über eine Erweiterung des Ausgleichungsverfahrens von Karup

Autor(en): **Kreis, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **49 (1949)**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-555040

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über eine Erweiterung des Ausgleichungsverfahrens von Karup

Von *H. Kreis*, Winterthur

Die Erweiterung des von *Karup* angewendeten Interpolationsverfahrens [1] führt zu der allgemeinen Ausgleichungsformel

$$(n) = \frac{f(n)}{d} + \sum_{1}^{d-1}{}_t \frac{1}{d} P\left(\frac{t}{d}\right)[f(n+t) + f(n-t)] + \sum_{d+1}^{2d-1}{}_t \frac{1}{d} N\left(\frac{t}{d}\right)[f(n+t) + f(n-t)]. \tag{1}$$

Es bedeuten

$f(n)$; $f(n \pm 1)$; $f(n \pm 2)$; ..... die Beobachtungsfolge;

d, eine beliebige positive ganze Zahl;

$$P(x) = 1\frac{1}{2}x^3 - 2\frac{1}{2}x^2 + 1; \tag{2}$$

$$N(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 4x + 2; \tag{3}$$

$\bar{f}(n)$, den statt $f(n)$ zu nehmenden ausgeglichenen Wert.

Die neue Formel enthält insbesondere für den speziellen Wert $d = 5$ die bekannte Ausgleichungsformel von *Karup*.

Zur Ableitung des Ausdruckes (1) betrachten wir eine beliebige Zusammenstellung von vier gleich weit auseinander liegenden Beobachtungswerten

$$f(x) = f(a); \quad f(a+d); \quad f(a+2d); \quad f(a+3d)$$

und ordnen den Argumenten derselben die symmetrische arithmetische Folge

$$\xi = -1\frac{1}{2}; \quad -\frac{1}{2}; \quad +\frac{1}{2}; \quad +1\frac{1}{2}$$

mit Hilfe der Substitution

$$\xi = \frac{x-a}{d} - 1\frac{1}{2} \tag{4}$$

zu. Umgekehrt folgt aus dieser

$$f(x) = f\left(a + 1\frac{1}{2}d + d\xi\right) \equiv g(\xi)$$

und

$$f(a) = g\left(-1\frac{1}{2}\right); \quad f(a+d) = g\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$f(a+2d) = g\left(+\frac{1}{2}\right); \quad f(a+3d) = g\left(+1\frac{1}{2}\right).$$

Unter den verschiedenen Interpolationskurven, welche durch die Punkte

$$P_0 : \xi = -1\frac{1}{2}; \qquad y = g\left(-1\frac{1}{2}\right);$$

$$P_1 : \xi = -\frac{1}{2}; \qquad y = g\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$P_2 : \xi = +\frac{1}{2}; \qquad y = g\left(+\frac{1}{2}\right);$$

$$P_3 : \xi = +1\frac{1}{2}; \qquad y = g\left(+1\frac{1}{2}\right)$$

bestimmt werden können, zeichnet sich diejenige kubische Parabel aus, die die quadratische Parabel $P_0 P_1 P_2$ im mittleren Punkte P_1 und die Parabel $P_1 P_2 P_3$ im mittleren Punkte P_2 berührt.

Es seien

$$\left.\begin{aligned} C_1 : y &= \varphi_1(\xi); \\ C_2 : y &= \varphi_2(\xi), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wenn

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= f(a) + \binom{\xi + 1\frac{1}{2}}{1} \Delta f(a) + \binom{\xi + 1\frac{1}{2}}{2} \Delta^2 f(a), \\ \varphi_2(\xi) &= f(a+h) + \binom{\xi + \frac{1}{2}}{1} \Delta f(a+h) + \binom{\xi + \frac{1}{2}}{2} \Delta^2 f(a+h), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

die Gleichungen der Parabeln $P_0 P_1 P_2$ und $P_1 P_2 P_3$.

Anderseits stellt die Gleichung

$$C_3 : \frac{y - \varphi_1(\xi)}{\xi - \lambda_1} = \frac{y - \varphi_2(\xi)}{\xi - \lambda_2}$$

oder

$$C_3 : (\lambda_1 - \lambda_2)\, y = (\xi - \lambda_2)\, \varphi_1(\xi) - (\xi - \lambda_1)\, \varphi_2(\xi) \tag{7}$$

die allgemeine Parabel dritten Grades dar, die durch die Schnittpunkte P_1, P_2 der Parabeln C_1, C_2 hindurchgeht.

Soll die Kurve C_3 die Parabeln C_1, C_2 in P_1, P_2 berühren, so sind die Parameter λ_1, λ_2 so zu bestimmen, dass in den Punkten P_1, P_2 von C_3 y' gleich $\varphi_1'\left(-\frac{1}{2}\right)$ bzw. $\varphi_2'\left(+\frac{1}{2}\right)$ ist. Aus diesen Forderungen ergibt sich

$$\left(\lambda_1 + \frac{1}{2}\right)\left[\varphi_1'\left(-\frac{1}{2}\right) - \varphi_2'\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 0,$$

$$\left(\lambda_2 - \frac{1}{2}\right)\left[\varphi_1'\left(+\frac{1}{2}\right) - \varphi_2'\left(+\frac{1}{2}\right)\right] = 0.$$

Da im allgemeinen

$$\varphi_1'\left(-\frac{1}{2}\right) \neq \varphi_2'\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ und } \varphi_1'\left(+\frac{1}{2}\right) \neq \varphi_2'\left(+\frac{1}{2}\right) \text{ ist,}$$

muss
$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = +\frac{1}{2}$$

sein, so dass die Gleichung von C_3 lautet:

$$C_3 : y = \left(\frac{1}{2} - \xi\right) \varphi_1(\xi) + \left(\frac{1}{2} + \xi\right) \varphi_2(\xi).$$

Durch die erhaltene Parabel C_3 wird folgende Interpolationsfunktion dritten Grades definiert

$$\Phi(\xi) = \left(\frac{1}{2} - \xi\right) \varphi_1(\xi) + \left(\frac{1}{2} + \xi\right) \varphi_2(\xi). \tag{8}$$

In den Ausdrücken $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$ (6) können die Differenzen Δf und $\Delta^2 f$ durch lineare Funktionen der Grundwerte $f(a)$; $f(a+d)$; $f(a+2d)$; $f(a+3d)$ ersetzt werden, so dass $\Phi(\xi)$ sich auch folgendermassen darstellen lässt

$$\Phi(\xi) = \Phi_0(\xi) f(a) + \Phi_1(\xi) f(a+d) + \Phi_2(\xi) f(a+2d) + \Phi_3(\xi) f(a+3d). \tag{9}$$

Zur Berechnung dieser Polynome dritten Grades $\Phi_i(\xi)$ wählen wir passende Zahlenwerte für $f(a)$; $f(a+d)$; $f(a+2d)$; $f(a+3d)$, berechnen nach den Formeln (6) $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$ und nach der Formel (8) $\Phi(\xi)$.

Berechnung von $\Phi_0(\xi)$:

$$f(a) = 1; \; f(a+d) = f(a+2d) = f(a+3d) = 0.$$

$$\varphi_1(\xi) = 1 - \binom{\xi + 1\frac{1}{2}}{1} + \binom{\xi + 1\frac{1}{2}}{2};$$

$$\varphi_2(\xi) = 0.$$

$$\Phi_0(\xi) = \Phi(\xi) = \frac{1}{16}(-8\xi^3 + 4\xi^2 + 2\xi - 1). \tag{10}$$

Berechnung von $\Phi_1(\xi)$:

$$f(a+d) = 1;\ f(a) = f(a+2d) = f(a+3d) = 0.$$

$$\varphi_1(\xi) = \binom{\xi + 1\frac{1}{2}}{1} - 2\binom{\xi + 1\frac{1}{2}}{2};$$

$$\varphi_2(\xi) = 1 - \binom{\xi + \frac{1}{2}}{1} + \binom{\xi + \frac{1}{2}}{2}.$$

$$\Phi_1(\xi) = \Phi(\xi) = \frac{1}{16}(24\xi^3 - 4\xi^2 - 22\xi + 9). \tag{11}$$

Berechnung von $\Phi_2(\xi)$:

$$f(a+2d) = 1;\ f(a) = f(a+d) = f(a+3d) = 0.$$

$$\varphi_1(\xi) = \binom{\xi + 1\frac{1}{2}}{2};$$

$$\varphi_2(\xi) = \binom{\xi + \frac{1}{2}}{1} - 2\binom{\xi + \frac{1}{2}}{2}.$$

$$\Phi_2(\xi) = \Phi(\xi) = \frac{1}{16}(-24\xi^3 - 4\xi^2 + 22\xi + 9). \tag{12}$$

Berechnung von $\Phi_3(\xi)$:

$$f(a+3d) = 1;\ f(a) = f(a+d) = f(a+2d) = 0.$$

$$\varphi_1(\xi) = 0;$$

$$\varphi_2(\xi) = \binom{\xi + \frac{1}{2}}{2}.$$

$$\Phi_3(\xi) = \Phi(\xi) = \frac{1}{16}(8\xi^3 + 4\xi^2 - 2\xi - 1). \tag{13}$$

Durch die Resultate (10) bis (13) ist die Interpolationsfunktion $\Phi(\xi)$ vollständig bestimmt.

Zwischen den Koeffizienten $\Phi_i(\xi)$ bestehen folgende Beziehungen

$$\Phi_0(\pm\,\xi) = \Phi_3(\mp\,\xi);$$
$$\Phi_1(\pm\,\xi) = \Phi_2(\mp\,\xi).$$

Es bedeuten nun n irgendein festes Argument der Grundfolge und d irgendeine feste natürliche Zahl. Wir können das Anfangsargument a stets so wählen, dass

$$a + d < n < a + 2d$$

oder

$$n - 2d < a < n - d$$

ist, so dass $a = n - 2d + \tau$, $\tau = 1; 2; \ldots\ldots d - 1$ gesetzt werden kann. Für $x = n$; $a = n - 2d + \tau$ folgt aus der Gleichung (4)

$$\xi = \frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}.$$

Die Formel (8) liefert uns den dem Argument $x = n$ entsprechenden Funktionswert

$$\Phi\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}\right) = \Phi_0\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}\right) f(n - 2d + \tau) + \Phi_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}\right) f(n - d + \tau) +$$
$$+ \Phi_2\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}\right) f(n + \tau) + \Phi_3\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}\right) f(n + d + \tau). \qquad (14)$$

Indem wir nacheinander $\tau = 1; 2; \ldots\ldots d - 1$ einsetzen, ergeben sich $d - 1$ interpolierte Werte für $f(n)$, so dass wir mit dem Beobachtungswert $f(n)$ selbst über d Werte verfügen. Bildet man aus diesen das arithmetische Mittel, so findet man

$$(n) = \frac{f(n)}{d} + \sum_{1}^{d-1}{}_{\tau} \frac{1}{d}\left[\Phi_0\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}\right) f(n - 2d + \tau) + \Phi_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}\right) f(n - d + \tau) +\right.$$
$$\left. + \Phi_2\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}\right) f(n + \tau) + \Phi_3\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}\right) f(n + d + \tau)\right]. \qquad (15)$$

Der Übersichtlichkeit wegen wollen wir die Glieder nach dem Abstand t der Argumente $n \pm t$ vom festen Argument n ordnen. Der *Abstand t der Argumente $n \pm t$ vom Index n ist kleiner als d, also das Verhältnis $\frac{t}{d}$ kleiner als 1.*

In der Gleichung (15) setzen wir entweder

$$n + \tau = n + t, \quad \text{d. h.} \quad \tau = t$$

und erhalten als Koeffizienten von $f(n + \tau) = f(n + t)$:

$$\Phi_2\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}\right) = \Phi_2\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{d}\right) = \Phi_1\left(-\frac{1}{2} + \frac{t}{d}\right),$$

oder

$$n - d + \tau = n - t, \quad \text{d. h.} \quad \tau = d - t.$$

Wir bekommen als Koeffizienten von $f(n - d + \tau) = f(n - t)$:

$$\Phi_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}\right) = \Phi_1\left(-\frac{1}{2} + \frac{t}{d}\right).$$

Hieraus folgt, dass die Koeffizienten von $f(n + t)$ und $f(n - t)$ übereinstimmen. Der gemeinsame Wert beträgt nach der Gleichung (11)

$$\Phi_1\left(-\frac{1}{2} + \frac{t}{d}\right) = 1\frac{1}{2}\frac{t^3}{d^3} - 2\frac{1}{2}\frac{t^2}{d^2} + 1 = P\left(\frac{t}{d}\right).$$

Der Abstand t der Argumente $n \pm t$ vom Index n ist grösser als d, also das Verhältnis $\frac{t}{d}$ grösser als 1.

In der Gleichung (15) setzen wir entweder

$$n + d + \tau = n + t, \quad \text{d. h.} \quad \tau = t - d$$

und finden als Koeffizienten von $f(n + d + \tau) = f(n + t)$:

$$\Phi_3\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}\right) = \Phi_3\left(1\frac{1}{2} - \frac{t}{d}\right) = \Phi_0\left(-1\frac{1}{2} + \frac{t}{d}\right),$$

oder

$$n - 2d + \tau = n - t, \quad \text{d. h.} \quad \tau = 2d - t.$$

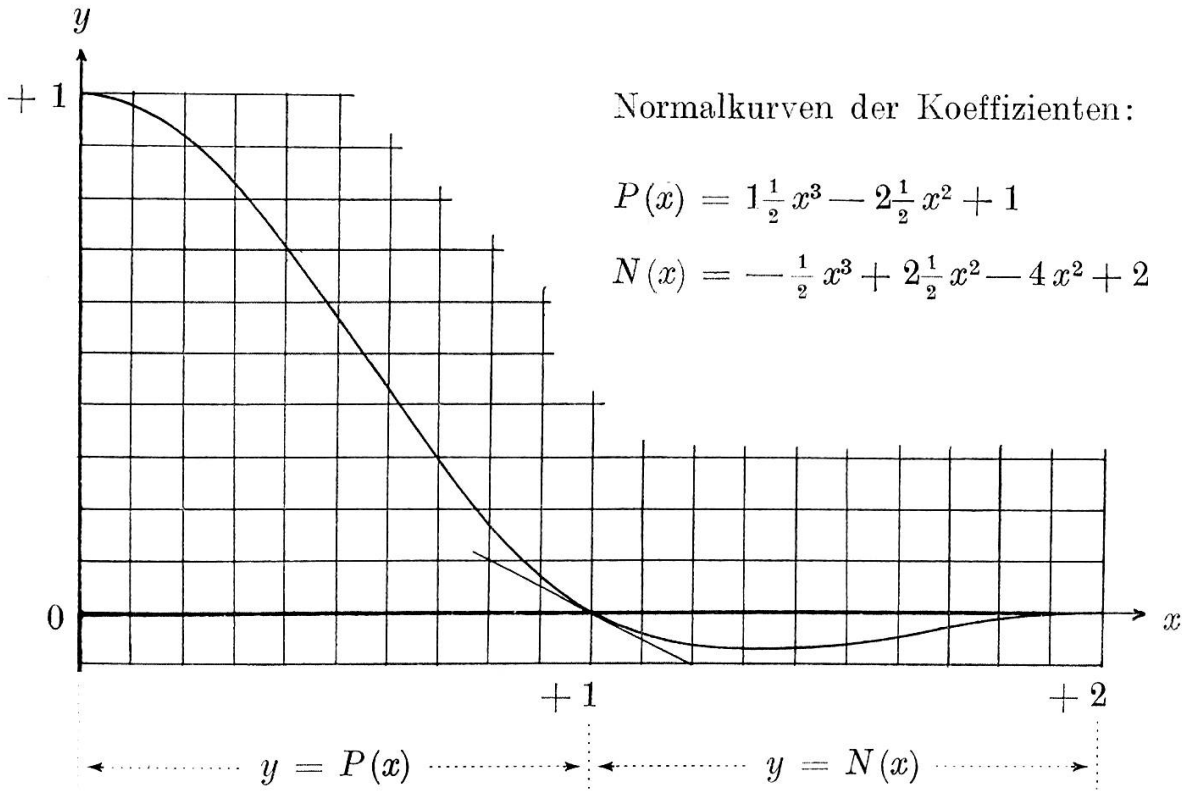
Wir erhalten als Koeffizienten von $f(n - 2d + \tau) = f(n - t)$:

$$\Phi_0\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{d}\right) = \Phi_0\left(-1\frac{1}{2} + \frac{t}{d}\right).$$

Demzufolge stimmen die Koeffizienten von $f(n + t)$ und $f(n - t)$ überein. Der gemeinsame Wert beträgt nach der Gleichung (10)

$$\Phi_0\left(-1\frac{1}{2} + \frac{t}{d}\right) = -\frac{1}{2}\frac{t^3}{d^3} + 2\frac{1}{2}\frac{t^2}{d^2} - 4\frac{t}{d} + 2 = N\left(\frac{t}{d}\right).$$

Indem man daher in der Gleichung (15) die Glieder nach dem Abstand des Argumentes von dem Index n ordnet, resultiert schliesslich die eingangs angegebene Formel (1).



Normalkurven der Koeffizienten:

$P(x) = 1\frac{1}{2}x^3 - 2\frac{1}{2}x^2 + 1$

$N(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 4x^2 + 2$

Die *Normalfunktion* der Koeffizienten

$$P(x) = 1\frac{1}{2}x^3 - 2\frac{1}{2}x^2 + 1$$

ist in dem in Betracht kommenden Intervall $x = 0$ bis 1 stets *positiv* und fällt von 1 bis 0. Im Punkte (0; 1) ist die Tangente parallel zur x-Achse und im Punkte (1; 0) hat die Tangente die Richtungszahl $-\frac{1}{2}$.

Hingegen ist die *Normalfunktion* der Koeffizienten

$$N(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$$

in dem entsprechenden Intervall $x = 1$ bis 2 stets *negativ*. Sie fällt von 0 bis zu dem Minimum $N(1\frac{1}{3}) = -0{,}074$ und wächst dann bis zu dem Maximum $N(2) = 0$.

Die beiden kubischen Parabeln $y = P(x)$ und $y = N(x)$ berühren sich im Punkte (1; 0) und sind durch die beiden Punkte (0; 1) und (1; 0) bzw. (1; 0) und (2; 0) und die erwähnten zugehörigen Tangenten bestimmt.

Charakteristisch für die Ausgleichungsformel ist das Überwiegen der *positiven* Koeffizienten oder *Gewichte*. Bezeichnen $S_1(d)$ und $S_2(d)$ die Summen der positiven und negativen Gewichte der Formel (1), so findet man

$$S_1(d) = \frac{1}{d} + 2\sum_{1}^{d-1}{}_{\tau}\frac{1}{d}P\left(\frac{\tau}{d}\right) = 1\frac{1}{12} - \frac{1}{12d^2},$$

$$S_2(d) = 2\sum_{d+1}^{2d-1}{}_{\tau}\frac{1}{d}N\left(\frac{\tau}{d}\right) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{12d^2}.$$

Aus den beiden Ergebnissen gehen die Kontrollbeziehungen hervor:

$$S_1(d) + S_2(d) = 1$$

$$S_1(d) : |S_2(d)| = 13 + \frac{12}{d^2 - 1}.$$

Lässt man die Äquidistanz d *unendlich gross* werden, so erhält man als Grenzwerte

$$S_1(\infty) = 1\frac{1}{12}; \quad S_2(\infty) = -\frac{1}{12}$$

und

$$S_1(\infty) : |S_2(\infty)| = 13.$$

Zu denselben Ergebnissen gelangt man durch die Integrationen

$$S_1(\infty) = 2\int_0^1 P(x)\,dx = \left(\frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x\right)_0^1 = 1\frac{1}{12},$$

$$S_2(\infty) = 2\int_1^2 N(x)\,dx = \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 4x^2 + 4x\right)_1^2 = -\frac{1}{12}.$$

Bei der Ausgleichung sind ausser $f(n)$ $2d-2$ Beobachtungswerte mit positiven und ebenso viele mit negativen Gewichten also $4d-3$ Werte heranzuziehen. Da die Funktionen $P\left(\frac{t}{d}\right)$ und $N\left(\frac{t}{d}\right)$ für $\frac{t}{d} = 1$ verschwinden, fallen die beiden Grundwerte $f(n+d)$ und $f(n-d)$ bei der Summation weg.

Sieht man vom trivialen Fall $d = 1$; $4d-3 = 1$ Glied also $\bar{f}(n) = f(n)$ ab, so erhalten wir für $d = 2$ bis 6 die folgenden Spezialformeln:

$d = 2$; $4d-3 = 5$ Glieder; $S_1(d) = 1\frac{1}{16} = 1{,}0625$;

$$S_2(d) = -\tfrac{1}{16} = -0{,}0625; \quad S_1(d) : |S_2(d)| = 17.$$

$$\bar{f}(n) = 0{,}5 f(n) + 0{,}28125\,[f(n+1) + f(n-1)] - 0{,}03125\,[f(n+3) + f(n-3)].$$

$d = 3$; $4d-3 = 9$ Glieder; $S_1(d) = 1\frac{2}{27} = 1{,}07407$;

$$S_2(d) = -\tfrac{2}{27} = -0{,}07407; \quad S_1(d) : |S_2(d)| = 14{,}5.$$

$$\begin{aligned}\bar{f}(n) = 0{,}33333 f(n) &+ 0{,}25926\,[f(n+1) + f(n-1)]\\ &+ 0{,}11111\,[f(n+2) + f(n-2)]\\ &- 0{,}024691\,[f(n+4) + f(n-4)]\\ &- 0{,}012346\,[f(n+5) + f(n-5)].\end{aligned}$$

$d = 4$; $4d-3 = 13$ Glieder; $S_1(d) = 1\frac{5}{64} = 1{,}07813$;

$$S_2(d) = -\tfrac{5}{64} = -0{,}07813; \quad S_1(d) : |S_2(d)| = 13{,}8.$$

$$\begin{aligned}\bar{f}(n) = 0{,}25 f(n) &+ 0{,}21680\,[f(n+1) + f(n-1)]\\ &+ 0{,}140625\,[f(n+2) + f(n-2)]\\ &+ 0{,}056606\,[f(n+3) + f(n-3)]\\ &- 0{,}017578\,[f(n+5) + f(n-5)]\\ &- 0{,}015625\,[f(n+6) + f(n-6)]\\ &- 0{,}005859\,[f(n+7) + f(n-7)].\end{aligned}$$

$d = 5$ (Karupsche Formel); $4d - 3 = 17$ Glieder; $S_1(d) = 1\frac{2}{25} = 1{,}08$;

$$S_2(d) = -\frac{2}{25} = -0{,}08; \quad S_1(d) : |S_2(d)| = 13{,}5 .$$

$$\begin{aligned}\bar{f}(n) = 0{,}2 f(n) &+ 0{,}1824 [f(n+1) + f(n-1)] \\ &+ 0{,}1392 [f(n+2) + f(n-2)] \\ &+ 0{,}0848 [f(n+3) + f(n-3)] \\ &+ 0{,}0336 [f(n+4) + f(n-4)] \\ &- 0{,}0128 [f(n+6) + f(n-6)] \\ &- 0{,}0144 [f(n+7) + f(n-7)] \\ &- 0{,}0096 [f(n+8) + f(n-8)] \\ &- 0{,}0032 [f(n+9) + f(n-9)] .\end{aligned}$$

$d = 6$; $4d - 3 = 21$ Glieder; $S_1(d) = 1\frac{35}{432} = 1{,}08102$;

$$S_2(d) = -\frac{35}{432} = -0{,}08102; \quad S_1(d) : |S_2(d)| = 13{,}34 .$$

$$\begin{aligned}\bar{f}(n) = 0{,}16667 f(n) &+ 0{,}15625 [f(n+1) + f(n-1)] \\ &+ 0{,}12963 [f(n+2) + f(n-2)] \\ &+ 0{,}09375 [f(n+3) + f(n-3)] \\ &+ 0{,}05556 [f(n+4) + f(n-4)] \\ &+ 0{,}02199 [f(n+5) + f(n-5)] \\ &- 0{,}00965 [f(n+7) + f(n-7)] \\ &- 0{,}01235 [f(n+8) + f(n-8)] \\ &- 0{,}01042 [f(n+9) + f(n-9)] \\ &- 0{,}00617 [f(n+10) + f(n-10)] \\ &- 0{,}00193 [f(n+11) + f(n-11)] .\end{aligned}$$

Literaturnachweis

[1] *Karup, J.:* Über eine neue mechanische Ausgleichungsmethode. Transactions of the Second international actuarials Congress, London 1898.

[2] *Rosmanith, G.:* Mathematische Statistik der Personenversicherung, Leipzig 1930.

[3] *Simonett, J.:* Beiträge zur Ausgleichung von Massenerscheinungen nach der Methode von King, Mitteilungen, Band 28, 1933.

[4] *Zwinggi, E.:* Versicherungsmathematik, Basel 1945.