Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 49 (1949)

Artikel: Der Einfluss der Parameter in der Formel von Gompertz-Makeham auf die Prämienreserve

Autor: Albers, Gunther / Pöttker, Werner

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555058

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Der Einfluss der Parameter in der Formel von Gompertz-Makeham auf die Prämienreserve

Von *Gunther Albers* und *Werner Pöttker*, Hamburg

I.

In seiner Dissertation hat Friedli [1]) diese Frage behandelt, sich aber im wesentlichen darauf beschränkt, den Einfluss auf die Prämienreserve der lebenslänglichen Versicherung auf den Todesfall zu zeigen. Friedli kommt dabei zu folgenden Ergebnissen: «Die Reserve einer Todesfallversicherung nimmt stets ab, wenn der Parameter g wächst.» «Wenn der Parameter c des Makehamschen Gesetzes vergrössert wird, so wird auch die Reserve ${}_tV_x$ der lebenslänglichen Todesfallversicherung vergrössert.» «Eine Erhöhung des Parameters s im Makehamschen Gesetz ist äquivalent einer Herabsetzung des Zinsfusses, hat also genau den gleichen Einfluss auf die Höhe der Versicherungswerte wie diese... Die Reserve nimmt zu, wenn der Parameter s zunimmt.» Weiter führt Friedli noch aus: «Es ist uns nicht gelungen, diese Untersuchung der relativen Schwankungen der Reserve auf gemischte Versicherungen auszudehnen; einzig für den Parameter s haben wir das Resultat auch auf die gemischten Versicherungen anwendbar gemacht. Eine Übertragung der auf ${}_tV_x$ angewendeten Methode führt aber voraussichtlich auf ähnliche Resultate.»

Den Einfluss auf die Prämienreserve der gemischten Versicherung hat Löer [2]) untersucht, das Ergebnis ist jedoch so unbestimmt, dass praktisch keine Folgerungen daraus gezogen werden können. Bezüglich einer Erhöhung des Parameters g schreibt Löer: «Je nachdem

[1]) «Reserve und Rentenbarwert als analytische Funktion», Bern 1918.

[2]) «Abhängigkeit der mathematischen Reserven von Sterblichkeit und Zins» in «Das Versicherungsarchiv» 1936, Heft 7/8.

wie n (gesamte Dauer) gewählt ist, kann $\left| \frac{d\mu(z)}{dg} \mathsf{a}(z, n) \right|$ zunächst noch wachsen, von einem gewissen z (erreichtes Alter) an muss der Ausdruck aber abnehmen und wird schliesslich 0. Unter diesen Voraussetzungen kann die Reserve anfänglich abnehmen, aber schliesslich nimmt sie doch zu.» Über eine Erhöhung des Parameters c führt Löer aus: «Die Reserve kann auch nicht dauernd zunehmen, sondern zum Schluss muss sie mindestens abnehmen, da $\frac{d\mu(z)}{dc} \mathsf{a}(z, n)$ schliesslich auch 0 wird; durch geeignete Wahl von n kann auch erreicht werden, dass die Reserve dauernd abnimmt, wenn der Parameter c wächst. Der Verlauf der Reserve der gemischten Versicherung hängt wesentlich von der Dauer n ab.»

Es soll nun durch geeignete Zerlegung des Versicherungsverhältnisses in Risiko- und Sparteil sowie näherungsweise Darstellung des Risikoteils der Prämienreserve eine präzisere Aussage über den Einfluss der Parameter g und c in der Formel von Gompertz-Makeham auf die Höhe der Prämienreserve gemacht werden. Als Sparteil des Versicherungsverhältnisses wird dabei — abweichend von der üblichen Darstellungsweise — der Vorgang angesehen, durch den bei einer Bank bei gleichbleibenden wiederkehrenden Einzahlungen ebenfalls nach n Jahren die Versicherungssumme vorhanden wäre. Diese Art der Zerlegung eines Versicherungsverhältnisses ermöglicht des öfteren einen besonderen Einblick in den Versicherungsvorgang und konnte auch bereits zu praktischen Verfahren verwertet werden, wie z. B. der Berechnung von Zuschlagprämien bei anomalen Risiken ohne besondere Ausscheideordnungen [1]).

II.

Wird das Versicherungsverhältnis in der beschriebenen Weise zerlegt, so erhält man für die gemischte Versicherung als Prämienreserve des Sparteils nach m Jahren

$$ {}_mV_{\overline{n}|} = 1 - \frac{\mathsf{a}_{\overline{n-m}|}}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}} \tag{1} $$

[1]) «Ein Beitrag zur Versicherung anomaler Risiken in der Lebensversicherung» in «Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung» 1942, S. 57.

und als Prämienreserve des Risikoteils entsprechend

$$ {}_mRV_{x\overline{n}|} = \frac{a_{\overline{n-m}|}}{a_{\overline{n}|}} - \frac{a_{x+m,\overline{n-m}|}}{a_{x\overline{n}|}} \tag{2} $$

also die Prämienreserve einer «Totenrente» in Höhe von $1 : a_{\overline{n}|}$. Da die natürliche Risikoprämie eines Versicherungsjahres das Produkt aus Sterbenswahrscheinlichkeit und riskiertem Kapital ist, wird die Prämienreserve des Risikoteils — im folgenden Risikoreserve genannt — positiv oder negativ sein, je nachdem, ob die Sterbenswahrscheinlichkeit schneller steigt als das riskierte Kapital fällt oder das Verhältnis umgekehrt ist. Jedenfalls wird die Risikoreserve durchweg klein sein gegenüber der zugehörigen Sparreserve, und es liegt daher nahe, die Prämienreserve näherungsweise zu berechnen, indem man zu der leicht zu ermittelnden Sparreserve einen Näherungswert der Risikoreserve addiert. Denn die Formel von Gompertz-Makeham ist so kompliziert, dass die genaue Berechnung der Prämienreserve aus den Parametern auf grosse Schwierigkeiten stösst.

Es handelt sich zunächst darum, ein geeignetes Näherungsverfahren für die Berechnung der Risikoreserve zu finden. Die Prämie für den Risikoteil ist

$$ RP_{x\overline{n}|} = \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \tag{3} $$

oder auch

$$ RP_{x\overline{n}|} = \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} \sum_{k=0}^{n-2} v\, q_{x+k} \cdot \frac{a_{x+k+1,\overline{n-k-1}|}}{a_{x\overline{n}|}} \cdot \frac{D_{x+k}}{D_x}. \tag{4} $$

Die Risikoreserve lautet dann entsprechend

$$ {}_mRV_{x\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-m-2} v q_{x+m+k} \cdot \frac{a_{x+m+k+1,\overline{n-m-k-1}|}}{a_{x\overline{n}|}} \cdot \frac{D_{x+m+k}}{D_{x+m}} - RP_{x\overline{n}|}\, a_{x+m,\overline{n-m}|}. \tag{5} $$

Folgt die Absterbeordnung der Formel von Gompertz-Makeham, so gilt

$$ p_x = s\, g^{c^x(c-1)}, \quad v\, p_x = v\, s\, g^{c^x(c-1)}. \tag{6} $$

Zieht man die Konstante s zum jährlichen Diskontierungsfaktor v, so ergibt sich

$$ v\, p_x = \tilde{v}\, \tilde{p}_x \quad \text{mit} \quad \tilde{v} = v\, s, \quad \tilde{p}_x = g^{c^x(c-1)}. \tag{7} $$

Die Benutzung des modifizierten Diskontierungsfaktors $\tilde{v}$, welcher einer Zinserhöhung gleichbedeutend ist, führt also in Verbindung mit der Gompertzschen Erlebenswahrscheinlichkeit $\tilde{p}_x$ zum gleichen Ergebnis. Diese kann für nicht zu hohe Alter in erster Annäherung gut wiedergegeben werden durch

$$\tilde{p}_x = 1 + c^x (c - 1) \lg, \quad \tilde{q}_x = - c^x (c - 1) \lg. \tag{8}$$

Aus (4) gewinnen wir für die Prämie des Risikoteils den Näherungswert:

$$\begin{aligned} R\tilde{P}_{x\overline{n}|} &= \frac{1 - \tilde{v}}{1 - \tilde{v}^n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{v}\, c^{x+k} (c - 1)(-\lg) \cdot \frac{1 - \tilde{v}^{n-k-1}}{1 - \tilde{v}^n} \cdot \tilde{v}^k \\ &= \tilde{v}(c - 1)(-\lg)\, c^x \cdot \frac{1 - \tilde{v}}{(1 - \tilde{v}^n)^2} \cdot \left(\frac{(\tilde{v}\, c)^n - 1}{\tilde{v}\, c - 1} - \tilde{v}^{n-1} \cdot \frac{c^n - 1}{c - 1} \right), \end{aligned} \tag{9}$$

wenn wir v durch $\tilde{v} = vs$, q_x durch $\tilde{q}_x = - c^x (c - 1) \lg$ und p_x in weiterer Vereinfachung durch 1 ersetzen. Einen entsprechenden Näherungswert erhalten wir aus (5) für die Risikoreserve

$$\begin{aligned} {}_mR\tilde{V}_{x\overline{n}|} &= \frac{\tilde{v}(c - 1)(-\lg)\, c^{x+m}}{1 - \tilde{v}^n} \cdot \left(\frac{(\tilde{v}\, c)^{n-m} - 1}{\tilde{v}\, c - 1} - \tilde{v}^{n-m-1} \cdot \frac{c^{n-m} - 1}{c - 1} \right) - \\ &- \frac{\tilde{v}(c - 1)(-\lg)\, c^x}{(1 - \tilde{v}^n)^2} \cdot \left(\frac{(\tilde{v}\, c)^n - 1}{\tilde{v}\, c - 1} - \tilde{v}^{n-1} \cdot \frac{c^n - 1}{c - 1} \right) (1 - \tilde{v}^{n-m}). \end{aligned} \tag{10}$$

Nach einigen Umformungen nimmt diese «Gompertzsche Risikoreserve» die Form an

$$\begin{aligned} {}_mR\tilde{V}_{x\overline{n}|} &= \frac{-\lg c^x}{(1 - \tilde{v}^n)(\tilde{r}^n - 1)} \cdot \\ &\cdot \left\{ [(c^n - 1)(\tilde{r}^m - 1) - (c^m - 1)(\tilde{r}^n - 1)] \cdot \frac{c - 1}{c - \tilde{r}} - [(c^n - \tilde{v}^n)(\tilde{r}^m - 1) - ((c\tilde{r})^m - 1)(1 - \tilde{v}^n)] \right\} \end{aligned} \tag{11}$$

Hier bedeutet $\tilde{r} = \dfrac{1}{\tilde{v}}$ den modifizierten Aufzinsungsfaktor.

Für die Parameter

$$\log c = 0{,}043 \quad \log s = -0{,}00125 \quad \log g = -0{,}000233,$$

für die ein vollständiges Tafelwerk [1]) zur Verfügung stand, wurden diese Gompertzschen Risikoreserven in Verbindung mit einem Zinsfuss von 3 % für verschiedene Alter und Dauern gerechnet und in Tabelle 1 zusammengestellt. Um die Brauchbarkeit des Näherungsverfahrens zu zeigen, wurden ferner zu diesen Risikoreserven die mit dem Diskontierungsfaktor vs gerechneten Sparreserven addiert und die Summe in Tabelle 2 den genau gerechneten Prämienreserven gegenübergestellt. Wie man sieht, sind bis zum Endalter 70 etwa die Abweichungen praktisch bedeutungslos, und auch später halten sie sich in mässigen Grenzen, da die genau gerechnete Sparreserve den Hauptteil der Prämienreserve ausmacht.

Die Risikoreserve muss für $m = 0$ und $m = n$ null sein, ferner ist sie für $m = n - 1$ stets negativ. Die Tabelle 1 zeigt, dass die Risikoreserve für kurze Dauern ständig negativ ist, für längere Dauern dagegen zunächst positiv und erst gegen Schluss der Dauer negativ, so dass hier eine weitere Nullstelle vorhanden sein muss. Die Lage dieser dritten Nullstelle ist

$n =$	10	15	20	25	30
$m \cong$	—	—	7,06	15,01	22,08

III.

Da die Sparreserve nur den Parameter s enthält, brauchen wir lediglich die Risikoreserve zu betrachten, wenn wir den Einfluss der Parameter g und c auf die Höhe der Prämienreserve untersuchen wollen.

Für den Parameter g sind keine weiteren Überlegungen erforderlich, denn er erscheint nur einmal in Form seines natürlichen Logarithmus als Faktor der gesamten Risikoreserve. Da g stets kleiner als 1 ist, kann man also sagen, *dass bei einem Wachsen von g sich die Risikoreserve der Null nähert. Bei einer positiven Risikoreserve wird demnach die Prämienreserve kleiner, bei einer negativen Risikoreserve dagegen grösser.* Dies stimmt auch mit dem Ergebnis von Friedli überein, denn für die lebenslängliche Todesfallversicherung sind die Risiko-

[1]) Aus diesen Parametern ergibt sich eine Ausscheideordnung, deren Sterbenswahrscheinlichkeiten sich von oben her sehr gut den Werten der allgemeinen deutschen Sterbetafel für die Jahre 1924—1926, männliches Geschlecht, annähern.

reserven jedenfalls bei den üblichen Eintrittsaltern positiv bis zu sehr hohen Altern.

Für die üblichen Versicherungsdauern kann man eine gute Faustregel aufstellen, indem man sagt: «*Wächst der Parameter g, so wächst oder fällt die Prämienreserve, je nachdem, ob m grösser oder kleiner als* $\frac{5}{3}(n-16)$ *ist.* Um die Abhängigkeit der Reserve vom Parameter c zu ermitteln, bilden wir die partielle Ableitung der «Gompertzschen Risikoreserve» nach c und erhalten dann aus (11) den Ausdruck

$$\frac{\partial\, {}_mR\tilde{V}_{\overline{xn}|}}{\partial c} = \frac{(-\lg)\, c^{x-1}}{(1-\tilde{v}^n)(\tilde{r}^n-1)(c-\tilde{r})^2} \cdot \Big\{ c^n\left[c(x+n-1)-\tilde{r}(x+n)\right](\tilde{r}-1)(\tilde{r}^m-1) -$$

$$-c^m\left[c^2(1-\tilde{v}^{n-m})-c\left(\frac{x+m+1}{x+m}\cdot(\tilde{r}-1)+2(1-\tilde{v}^{n-m-1})\right)+(1-\tilde{v}^{n-m-1})\,\tilde{r}\right](x+m)(\tilde{r}^n-1)+$$

$$+\left[c^2(1-\tilde{v}^n)-c\left(\frac{x+1}{x}(\tilde{r}-1)+2(1-\tilde{v}^{n-1})\right)+(1-\tilde{v}^{n-1})\,\tilde{r}\right]x(\tilde{r}^n-\tilde{r}^m)\Big\}, \qquad (12)$$

dessen Vorzeichen darüber entscheidet, ob die Reserve mit wachsendem c zunimmt oder abnimmt. Durch eingehendere Untersuchung ergibt sich, dass der Ausdruck (12) als Funktion von m ausser den Nullstellen $m_1 = 0$ und $m_2 = n$ eine weitere Nullstelle m_3, $0 \leqslant m_3 \leqslant n-1$ besitzt. Diese rückt mit wachsender Dauer n dem Werte $(n-1)$ immer näher. Für $x = 30$ ergeben sich die Werte

$n =$	10	15	20	25	30
$m_3 \cong$	0	2,3	10,5	18,9	24,0

Das Eintrittsalter x ist für die Lage der Nullstelle m_3 von untergeordneter Bedeutung. Es ergibt sich z. B. für $n = 20$

$x =$	30	40	50
$m_3 \cong$	10,5	10,0	9,6

Der Wert m_3 nimmt also bei festgehaltenem n mit wachsendem x nur unwesentlich ab. Es gilt nun die Regel: *Die Reserve wächst oder fällt mit zunehmendem c, je nachdem, ob m kleiner oder grösser als* m_3 *ist.*

Dass die Reserve spätestens für $m = n - 1$ mit wachsendem c abnehmen muss, erkennt man an der für diesen Zeitpunkt gültigen Reserveformel ${}_{n-1}V = v - P$, da die Prämie P mit wachsendem c zunimmt.

IV.

Das in Abschnitt II beschriebene Näherungsverfahren zur Berechnung von Prämienreserven kann auch dazu benutzt werden, um ohne Gruppenbildung die Prämienreserve eines Versicherungsbestandes zu ermitteln. Man braucht zu diesem Zweck nur analog dem in dieser Zeitschrift bereits beschriebenen Verfahren [1]) die Grösse m durch das Berechnungsjahr der Prämienreserve t und das Beginnjahr der Versicherung z auszudrücken mit Hilfe der Beziehung:

$$m = t - z. \tag{13}$$

Wenn man die während der Versicherungsdauer konstanten Hilfszahlen

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{\tilde{v}^z}{\tilde{r}^n - 1} \cdot \left\{ 1 + \frac{(-\lg) c^x}{1 - \tilde{v}^n} \cdot \left[(c^n - 1) \cdot \frac{c - 1}{c - \tilde{r}} - c^n + \tilde{v}^n \right] \right\} \\
H_2 &= - c^{-z} \cdot \frac{(-\lg) c^x}{1 - \tilde{v}^n} \cdot \frac{c - 1}{c - \tilde{r}} \\
H_3 &= \left(\frac{\tilde{v}}{c} \right)^z \cdot \frac{(-\lg) c^x}{\tilde{r}^n - 1} \\
H_4 &= \frac{1}{\tilde{r}^n - 1} \cdot \left\{ \left[(c^n - 1) - (c^n - \tilde{r}^n) \cdot \frac{c - 1}{c - \tilde{r}} \right] \cdot \frac{(-\lg) c^x}{1 - \tilde{v}^n} - 1 \right\}
\end{aligned} \tag{14}$$

für jede einzelne Versicherung ermittelt, kann man in einem beliebigen Jahr t die Prämienreserve des Versicherungsbestandes berechnen aus

$$\sum V = \tilde{r}^t \sum H_1 + c^t \sum H_2 + (c\tilde{r})^t \sum H_3 + \sum H_4. \tag{15}$$

---

[1]) Die Berechnung von Prämienreserven unter Benutzung der Formel von Gompertz-Makeham» 1948, S. 73.

Tabelle 1

Die «Gompertzsche Risikoreserve» ${}_{m}R\tilde{V}_{x\overline{n}|}$
für die Versicherungssumme 1.000

m \ x	20	30	40	50	60
			Dauer 10 Jahre		
5	—0,4561	—1,2277	—3,3043	—8,8937	—23,9377
			Dauer 15 Jahre		
5	—0,2978	—0,8015	—2,1572	—5,8061	—15,6273
10	—0,6990	—1,8813	—5,0635	—13,6286	—36,6818
			Dauer 20 Jahre		
5	0,1178	0,3170	0,8532	2,2964	6,1809
10	—0,3096	—0,8333	—2,2428	—6,0365	—16,2474
15	—0,8798	—2,3680	—6,3736	—17,1548	—46,1728
			Dauer 25 Jahre		
5	0,7566	2,0364	5,4810	14,7524	39,7065
10	0,7768	2,0907	5,6272	15,1458	40,7653
15	0,0027	0,0073	0,0198	0,0532	0,1431
20	—1,0028	—2,6990	—7,2646	—19,5528	—52,6271
			Dauer 30 Jahre		
5	1,6523	4,4473	11,9700	32,2177	86,7150
10	2,5281	6,8045	18,3145	49,2942	132,6769
15	2,2839	6,1471	16,5451	44,5317	119,8585
20	0,8279	2,2283	5,9977	16,1429	43,4492
25	—1,0239	—2,7558	—7,4173	—19,9639	—53,7334

Tabelle 2 Gegenüberstellung der exakten Prämienreserve ${}_mV_{x\overline{n}|}$ mit der angenähert berechneten Reserve ${}_m\tilde{V}_{x\overline{n}|}$ für die Versicherungssumme 1000

m \ x	V	$\tilde{V}$	V	$\tilde{V}$	V	$\tilde{V}$	V	$\tilde{V}$	V	$\tilde{V}$
	20		30		40		50		60	
					Dauer 10 Jahre					
5	459,09	459,09	458,32	458,31	456,25	456,24	450,77	450,65	436,51	435,60
					Dauer 15 Jahre					
5	280,66	280,66	280,17	280,16	278,87	278,80	275,63	275,15	268,59	265,33
10	610,69	610,69	609,52	609,51	606,38	606,33	598,18	597,76	577,79	574,71
					Dauer 20 Jahre					
5	192,95	192,95	193,16	193,15	193,79	193,68	195,83	195,12	203,15	201,31
10	419,31	419,30	418,81	418,78	417,59	417,37	415,11	413,57	413,24	403,36
15	685,45	685,44	683,98	683,96	680,12	679,95	670,42	669,17	649,03	640,15
					Dauer 25 Jahre					
5	141,62	141,62	142,91	142,90	146,39	146,35	155,78	155,62	179,24	180,57
10	307,31	307,31	308,66	308,62	312,42	312,16	323,23	321,68	353,12	347,30
15	501,38	501,37	501,45	501,37	501,94	501,39	505,01	501,42	520,83	501,22
20	729,52	729,51	727,88	727,81	723,72	723,25	714,26	710,96	699,18	677,88
					Dauer 30 Jahre					
5	108,61	108,61	111,37	111,41	118,61	118,93	136,54	139,18	172,89	193,68
10	235,28	235,29	239,53	239,56	250,79	251,07	279,10	282,05	337,16	365,44
15	383,00	382,99	386,90	386,85	397,50	397,25	425,55	425,24	486,79	500,56
20	555,55	555,53	557,10	556,93	561,79	560,70	577,00	570,84	619,30	598,15
25	758,33	758,31	756,74	756,58	753,08	751,92	746,99	739,37	746,79	705,60