Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 49 (1949)

Artikel: Grundsätzliche Bemerkungen zur t-Methode

Autor: Jecklin, Heinrich

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555161

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Grundsätzliche Bemerkungen zur *t*-Methode

Von *Heinrich Jecklin*, Zürich

Durch verschiedene in letzter Zeit erschienene Arbeiten, die offenbar zum Teil dem Bestreben entsprungen sind, die *t*-Methode der Praxis dienstbar zu machen, ist diese Reserveberechnungsart etwas stärker ins Blickfeld gerückt worden.

Bei der Beurteilung der *t*-Methode muss man sich vor allem klar sein, dass sie — wie die Lidstonesche *Z*-Methode — nur approximierte Reservetotale liefern kann, im Gegensatz etwa zur Altenburgerschen Hilfszahlen-Methode. Man wird daher mit Vorteil die Gründe der Abweichung vom genauen Reservetotal, d. h. von der Summe der Individualreserven, näher studieren.

Es ist auch als ein gewisser Nachteil der *t*-Methode zu werten, dass sie nur anwendbar ist für Kollektive gemischter Versicherungen, temporärer und lebenslänglicher Todesfallversicherungen sowie von Erlebensfallversicherungen. Dagegen ist es ein kaum zu überschätzender Vorteil, dass die Versicherungen gleichen Zugangsjahres zu Berechnungsgruppen zusammengefasst werden, dass also die natürliche zeitliche Gruppierung der Policen zur kollektiven Reserveberechnung Verwendung finden kann und keine der Portefeuille-Entwicklung wesensfremde Aussortierung notwendig ist. Die *t*-Methode ist, in richtiger Anwendung, insbesondere eine geeignete Gruppenmethode für die Reserveberechnung der Volksversicherung, wo es sich um eine grosse Anzahl von nach Kombination und Summenhöhe nicht stark verschiedenen Versicherungen handelt.

Ausgehend von der Tatsache, dass bei gemischten Versicherungen gleicher Dauer die Reserven gleichen Versicherungsjahres nach dem Eintrittsalter nicht stark variieren, ist es naheliegend, der gruppen-

weisen Reserveberechnung ein Durchschnittsalter zugrunde zu legen. Sei gegeben ein Portefeuille von Versicherungen genannter Art (wobei die Dauer der Versicherungen ganz verschieden sein kann), und bedeute S_i die im Todesfall zu leistende Summe und P_i die Prämie der einzelnen Versicherung, so ist die Totalreserve für die Gruppe der Versicherungen mit gleicher verflossener Versicherungsdauer t nach der t-Methode gegeben durch

$$\sum_t V_i = \frac{N_{\bar{x}} - N_{\bar{x}+t}}{D_{\bar{x}+t}} \sum P_i - \frac{M_{\bar{x}} - M_{\bar{x}+t}}{D_{\bar{x}+t}} \sum S_i, \tag{1}$$

worin mit $\bar{x}$ ein geeignet berechnetes Durchschnittsalter bezeichnet ist.

Setzen wir $x + t = z$ bzw. $\bar{x} + t = \bar{z}$ und $(N_x - N_{x+t})/D_{x+t} = (N_{z-t} - N_z)/D_z = f(z, t)$, so scheint es am naheliegendsten, $\bar{z}$ (oder $\bar{x} = \bar{z} - t$) aus der Gleichsetzung zu bestimmen

$$f(\bar{z}, t) \sum^i S_i = \sum^i f(z_i, t) S_i,$$

d. h. explizit

$$\bar{z} = \varphi\left[\sum^i f(z_i, t) S_i / \sum^i S_i\right], \tag{2}$$

wenn φ die Umkehrfunktion von f ist. Es leuchtet aber alsbald ein, dass damit die erstrebte Einfachheit noch nicht gewonnen ist, indem die hier zur Bestimmung des Durchschnittsalters verwendete Funktion $f(z_i, t)$ nicht nur vom Alter z_i der versicherten Personen, sondern auch von der abgelaufenen Versicherungsdauer t abhängt, also mit jedem Rechnungsjahr ändert.

Verfasser hat daher seinerzeit vorgeschlagen, das mittlere Alter der Versicherten einer Gruppe $\bar{z} = \bar{x} + t$ einfach aus der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeit der Eintrittsalter zu bestimmen nach der Relation

$$q_{\bar{x}} = \sum q_{x_i} S_i / \sum S_i \tag{3}$$

und $q_{x_i} S_i$ während der ganzen Versicherungsdauer als Hilfsgrösse unverändert beizubehalten. Die hiezu führenden Überlegungen sind einfacher Natur. Man macht die Annahme, dass $f(z, t)$ darstellbar sei als lineare Funktion von $q_z = q_{x+t}$ in der Gestalt

$$f(z, t) = A_t + B_t q_z \tag{4}$$

wobei A_t und B_t nur von t abhängen, für gegebenes t also konstant sind. Es ist klar, dass es sich bei dieser Darstellung nur um eine

Näherung handeln kann. Fassen wir $f(z, t)$ als eine Funktion von q_z auf und denken uns die Potenzreihenentwicklung gegeben

$$f(z, t) = A_t + B_t q_z + C_t q_z^2 + D_t q_z^3 + \ldots, \tag{5}$$

so führt uns die Vernachlässigung der Glieder zweiter und höherer Ordnung auf die Darstellung (4), deren Güte also vom Einfluss dieser Vernachlässigung abhängig ist.

Setzen wir für die folgenden Überlegungen $S_i = 1$ und weiter $q_{\bar{z}} = \sum q_{z_i}/N$, wobei N die Anzahl der Versicherungen einer Gruppe ist, so haben wir gemäss (5):

$$\begin{aligned} f(\bar{z}, t) &= A_t + B_t q_{\bar{z}} + C_t q_{\bar{z}}^2 + D_t q_{\bar{z}}^3 + \ldots \\ &= A_t + B_t \sum q_{z_i}/N + C_t (\sum q_{z_i}/N)^2 + D_t (\sum q_{z_i}/N)^3 + \ldots, \end{aligned}$$

und es ergibt sich als Differenz

$$\begin{aligned} \Delta(z_i, \bar{z}, t) &= \sum{}^i f(z_i, t) - N f(\bar{z}, t) = \\ &= C_t [\sum q_{z_i}^2 - N(\sum q_{z_i}/N)^2] + D_t [\sum q_{z_i}^3 - N(\sum q_{z_i}/N)^3] + \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Es hängt also die Differenz $\Delta(z_i, \bar{z}, t)$ nur von den Reihengliedern zweiter und höherer Ordnung ab. Nun soll aber das Durchschnittsalter $\bar{z}$ nicht jedes Jahr aus den $q_{z_i} = q_{x_i+t}$ bestimmt werden, sondern es soll $\bar{x}$ gemäss (3) jährlich aus den ein für allemal als Hilfsgrösse notierten Werten $q_{x_i} S_i$ berechnet und dann $\bar{z} = \bar{x} + t$ für die globale Reservebestimmung benutzt werden. Sofern eine Sterbetafel nach Makeham ausgeglichen ist, gilt bekanntlich das Gesetz des gleichmässigen Alterns, d. h. es ist dann $q_{\overline{x+t}} = q_{\bar{x}+t}$, wenn wir definieren $\sum q_x = N q_{\bar{x}}$ und entsprechend $\sum q_{x+t} = N q_{\overline{x+t}}$.

Denn es gilt unter Voraussetzung Makehamscher Ausgleichung $q_x = a + b c^x$, also ist dann $\sum q_x = N q_{\bar{x}}$ dasselbe wie

$$\sum (a + b c^x) = N(a + b c^{\bar{x}}) \quad \text{oder} \quad \sum c^x = N c^{\bar{x}}.$$

Anderseits ist dann

$$\begin{aligned} \sum q_{x+t} = \sum (a + b c^{x+t}) = N a + b c^t \sum c^x = N a + b c^t N c^{\bar{x}} = \\ = N(a + b c^{\bar{x}+t}) = N q_{\bar{x}+t}. \end{aligned}$$

Ist dagegen die verwendete Sterbetafel nicht nach Makeham ausgeglichen, so ist $q_{\overline{x+t}} \neq q_{\bar{x}+t}$.

Setzen wir nun bei der Differenzenbildung (6): $z_i = x_i + t$, bzw. $\bar{z} = \bar{x} + t$, so erhalten wir:

$$\sum f(x_i + t, t) - N f(\bar{x} + t, t) =$$
$$= B_t(\sum q_{x+t} - N q_{\bar{x}+t}) + C_t(\sum q^2_{x+t} - N(\sum q_{\bar{x}+t}/N)^2) + \dots \quad (7)$$

Liegt Makehamsche Ausgleichung vor, so ist $q_{\bar{x}+t} = q_{\overline{x+t}} = \sum q_{x+t}/N$, und der Klammerausdruck bei B_t wird null, andernfalls jedoch nicht.

Setzen wir für den Moment eine nach Makeham ausgeglichene Tafel voraus, so haben wir

$$f(z, t) = \sum_{-t}^{-1}{}_k p_z v^k = \sum_{-t}^{-1}{}^k v^k s^k \exp.\ c^z (c^k - 1) \ln g,$$

oder wenn $c^z = \zeta$ und $(c^k - 1) \ln g = \beta_k$

$$f(z, t) = \sum_{-t}^{-1}{}^k v^k s^k e^{\zeta \beta_k} = \sum_{-t}^{-1}{}^k v^k s^k (1 + \zeta \beta_k + (\zeta \beta_k)^2/2! + (\zeta \beta_k)^3/3! + \dots).$$

Es ist dann die Differenz

$$\Delta(z_i, \bar{z}, t) = \sum f(z_i, t) - N f(\bar{z}, t) =$$
$$= \sum_{-t}^{-1}{}^k v^k s^k \left[\frac{\beta_k^2}{2!} \left(\sum_1^N{}^i \zeta_i^2 - N \left(\sum_1^N{}^i \zeta_i/N \right)^2 \right) + \frac{\beta_k^3}{3!} \left(\sum_1^N{}^i \zeta_i^3 - N \left(\sum_1^N{}^i \zeta_i/N \right)^3 \right) + \dots \right]. \quad (8)$$

ζ_i ist eine positive Grösse, zufolgedessen ζ_i^l, l positiv ganz, eine positive konvex steigende Funktion, und es gilt nach Jensen

$$\sum \zeta_i^l/N \geqslant (\sum \zeta_i/N)^l \quad \text{d. h.} \quad \sum \zeta_i^l - N(\sum \zeta_i/N)^l \geqslant 0.$$

Die Differenzen in den runden Klammern bei (8) sind demnach alle positiv. Was die Grössen $\beta_k = (c^k - 1) \ln g$ anbelangt, so ist erfahrungsgemäss $g < 1$, also $\ln g$ negativ, und $c > 1$, also $(c^k - 1)$ ebenfalls negativ, weil für k nur negative Werte in Betracht fallen. Infolgedessen ist β_k positiv, und demnach $\Delta(z_i, \bar{z}, t)$ stets positiv, was besagt, dass $f(\bar{z}, t) \leqslant \sum f(z_i, t)/N$. Da $f(z, t)$ eine mit z steigende Funktion ist, folgt, dass aus der Mittelung mit Hilfe von q_x, statt mit $f(x + t, t)$, ein zu kleiner Wert für $\bar{z} = \bar{x} + t$ resultiert.

Aus Vorstehendem geht hervor, dass nach Makeham ausgeglichene Sterbetafeln insofern für die t-Methode geeigneter erscheinen als andere Tafeln, als auf Grund theoretischer Überlegungen eine

Aussage gemacht werden kann über die Richtung der Abweichung des mit den q_x berechneten Durchschnittsalters von seinem genauen Wert in bezug auf die in Rechnung stehenden versicherungstechnischen Funktionen. Da bei anders ausgeglichenen Tafeln das Gesetz des gleichmässigen Alterns nicht spielt, sind Aussagen über besagte Differenz nur auf Grund hypothetischer Annahmen oder durch empirische Untersuchungen zu gewinnen. Es heisst dies aber in keiner Weise, dass solche Tafeln sich nicht für die Anwendung der t-Methode eignen. Ausgangspunkt unserer Darlegungen war einzig die Voraussetzung einer gut genäherten Darstellbarkeit von $f(z, t)$ in der Gestalt $f(z, t) = A_t + B_t q_z$, was bezüglich der Tafelausgleichung a priori keine besondere Forderung darstellt.

Dagegen spielt die Art der Tafelausgleichung indirekt doch eine wesentliche Rolle, weil der Verlauf der Kurve der q_x mit Bezug auf die Mittelbildung nicht beliebig sein darf. Es ist dies ein äusserst wichtiger Punkt, den wir noch nicht tangiert haben. Eine quasi-arithmetische Mittelbildung von reellen Grössen x_i nach einer Funktion $f(x_i)$, d. h. die Ermittlung des Mittelwertes $\bar{x}$ aus der Gleichsetzung

$$f(\bar{x}) = \sum^i f(x_i)\, k_i / \sum^i k_i\,, \tag{9}$$

wobei k_i positive Gewichte bedeuten, ist eindeutig nur möglich, wenn die Funktion $f(x)$ in dem zu mittelnden Intervall reell, eindeutig, stetig, endlich und streng monoton ist. Für Tafelintervalle, die nach Makeham ausgeglichen sind, ist q_x eine Funktion, die diese Bedingungen erfüllt. Dagegen ist bekannt, dass bei modernen Ausgleichsverfahren, die auf den Charakter des Sterblichkeitsverlaufs vermehrte Rücksicht nehmen, die Kurve der q_x sehr oft, auch nach Ausschluss des sinkenden Astes der ersten Lebensjahre, keinen monotonen Verlauf zeigt. So weisen beispielsweise die neuesten Tafeln S. M. für die q_x im Intervall zwischen $x = 15$ und $x = 30$ einen Höcker auf, der die quasi-arithmetische Mittelbildung nach q_x als unzulässig und damit die Güte der t-Methode auf dieser Basis als recht zweifelhaft erscheinen lässt.

Man könnte daran denken, dem Übel einfach dadurch zu steuern, dass man die Kurve der q_x im Intervall des Höckers durch eine monoton steigende Hilfskurve ersetzt. Damit ist wohl eine eindeutige Bestimmung eines mittleren Alters aus den zum Teil behelfsmässigen q_x gewährleistet, dagegen bleibt fraglich, ob der Voraussetzung (4) aus-

reichend Genüge geleistet ist. H. Ruch hat deshalb in Bd. 48, 2 dieser Mitteilungen vorgeschlagen, als Hilfsfunktion für die Bestimmung eines mittleren Alters die Funktion $f(z, t)$ selbst zu verwenden, unter Beschränkung auf einen festgelegten Wert für t (er setzt $t = 20$). Die Mittelbildung würde demnach nach Relation (2) mit $t =$ konst. erfolgen. Nachdem die quasi-arithmetische Mittelbildung invariant ist gegenüber additiven und multiplikativen Konstanten, kann man die Funktion $f(z, \tau) = f(x + \tau, \tau)$, wenn wir mit τ den als konstant gewählten t-Wert bezeichnen, zwecks Erreichung von für die Rechnung bequemeren Werten ersetzen durch

$$g(x, \tau) = a_\tau f(z, \tau) + b_\tau, \tag{10}$$

wobei a_τ und b_τ positive oder negative Konstanten. Es ist dann also

$$f(z, \tau) = -b/a + g(x, \tau)/a = A_\tau + B_\tau g(x, \tau), \tag{11}$$

womit eine zu (4) analoge Darstellung gegeben ist, nur dass $g(x, \tau)$ nicht mit q_z identisch zu sein braucht.

Ausgehend von den gegebenen Funktionswerten $f(z, \tau)$ können wir in (11) die Konstanten A_τ und B_τ so bestimmen, dass $g(x, \tau)$ für zwei Argumente x_1 und x_2 vorgeschriebene Werte annimmt. Insbesondere können wir z. B. setzen $g(x_1, \tau) = q_{x_1}$, $g(x_2, \tau) = q_{x_2}$, so dass sich A_τ und B_τ aus den zwei Bestimmungsgleichungen

$$f(x_1 + \tau, \tau) = A_\tau + B_\tau q_{x_1}$$

$$f(x_2 + \tau, \tau) = A_\tau + B_\tau q_{x_2}$$

ergeben zu

$$A_\tau = \frac{f(x_2)\, q_{x_1} - f(x_1)\, q_{x_2}}{q_{x_1} - q_{x_2}}, \qquad B_\tau = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{q_{x_1} - q_{x_2}}. \tag{12}$$

Nunmehr können wir die Werte der Hilfsfunktion für das ganze Intervall der in Frage kommenden Alter x nach der Relation

$$g(x, \tau) = a_\tau f(x + \tau, \tau) + b_\tau = (f(x + \tau, \tau) - A_\tau)/B_\tau \tag{13}$$

unter verschiedenen Annahmen für τ berechnen. Wenn wir die beiden frei gewählten Werte $g(x_1, \tau)$ und $g(x_2, \tau)$ ein für allemal festhalten, so ergibt sich durch Variation von τ eine tabellarische Vergleichsmöglichkeit für die Abhängigkeit der Hilfsfunktion $g(x, \tau)$ von der Wahl des t-Wertes für τ. In der beigefügten Tabelle I ist $f(x + \tau, \tau) = (N_x - N_{x+\tau})/D_{x+\tau}$ für eine Anzahl durch 5 teilbarer Werte von x

und τ zusammengestellt, und zwar auf Basis S. M. 1933/37 zu $2\frac{3}{4}\%$. Tabelle II gibt die entsprechenden, gemäss (13) bestimmten Funktionswerte $g(x, \tau)$, wobei für die Festlegung der Konstanten in (12) die Wahl $q_{x_1} = q_{30}$ und $q_{x_2} = q_{40}$ getroffen wurde. In Tabelle II sind vergleichsweise die Werte von q_x beigestellt, und es zeigt sich, dass die Abweichung der $g(x, \tau)$ voneinander bedeutend geringer ist, als ihre Abweichung von q_x. Wie ersichtlich, wird die Amonotonie der q_x auf $g(x, \tau)$ bei Wahl eines kleinen Wertes für τ übertragen, so dass man in der Festlegung des τ für die Hilfsfunktion $g(x, \tau)$ nicht freie Hand hat. Es zeigt sich auch, dass für $\tau = 15$ mittlere Werte von $g(x, \tau)$ vorliegen, welche sich als zu wählende Hilfsfunktion für die t-Methode eignen dürften. In Tabelle III sind daher die Werte dieser Hilfsfunktion welche man — nachdem τ fixiert ist — kurz mit $g(x)$ bezeichnen kann, für $x = 15$ bis $x = 60$ zusammengestellt.

Herr Ruch hatte die grosse Freundlichkeit, zu den in seiner Arbeit beispielmässig berechneten Reserven eines effektiven Portefeuilles ein weiteres Beispiel nach vorstehendem Vorschlag durchzurechnen. Die Resultate sind die folgenden, wozu wir in Erinnerung rufen, dass als technische Grundlagen S. M. 1933/37 zu $2\frac{3}{4}\%$ Verwendung fanden und für die t-Methode die Reserveformel gilt

$$\sum {}_tV_i = \frac{N_{\bar{x}} - N_{\bar{x}+t}}{D_{\bar{x}+t}} \sum P_i - \frac{M_{\bar{x}} - M_{\bar{x}+t}}{D_{\bar{x}+t}} \sum S_i$$

wobei $\bar{x}$ ermittelt ist aus der Gleichsetzung

$$g(\bar{x}) = \sum g(x_i) S_i / \sum S_i$$

mit den Hilfswerten $g(x)$ nach Tabelle III hiernach.

t	$\sum S_i$	$g(\bar{x})$	$\bar{x}$	$\sum {}_tV_i$		Abweichung	
				genau	t-Methode	absolut	‰
5	5.611.000	3,75	32,44	730.931	733.706	2.775	3,80
10	4.658.500	3,69	32,04	1.290.992	1.289.576	— 1.416	— 1,10
15	3.637.500	3,66	31,87	1.608.794	1.589.938	—18.856	—11,72
20	2.865.500	3,44	30,11	1.686.506	1.665.410	—21.096	—12,51
25	1.796.000	3,07	26,20	1.218.676	1.207.264	—11.412	— 9,36
30	1.062.500	2,92	23,58	843.407	837.603	— 5.804	— 6,88

Es sind dies Ergebnisse, die im Hinblick darauf, dass es sich um eine Approximationsmethode handelt, wohl als gut taxiert werden dürfen. Die Abweichungen zwischen den genauen Resultaten und jenen der t-Methode sind übrigens von der Grössenordnung, wie sie sich bei Ruch nach der von ihm als Variante I bezeichneten Berechnungsart ergeben haben. Es ist dies nicht verwunderlich, indem es sich in beiden Fällen grundsätzlich um die gleiche Hilfsfunktion $g(x, \tau)$ für die Berechnung des mittleren Alters handelt, nur mit dem Unterschied, dass bei Ruch $\tau = 20$ und im vorliegenden Beispiel $\tau = 15$ fest gewählt wurde.

Ruch hat auch beispielmässig erhärtet, dass die Ergebnisse der t-Methode erheblich verbessert werden können, wenn in der Reserveformel (1) für den Endwert der Prämienleistungen und den Endwert der Versicherungsleistungen verschiedene Durchschnittsalter verwendet werden, also

$$\sum {}_tV_i = \frac{N_{\bar{x}_1} - N_{\bar{x}_1+t}}{D_{\bar{x}_1+t}} \sum P_i - \frac{M_{\bar{x}_2} - M_{\bar{x}_2+t}}{D_{\bar{x}_2+t}} \sum S_i, \qquad (14)$$

worin $\bar{x}_1$, bzw. $\bar{x}_2$ zu bestimmen sind aus

$$g(\bar{x}_1) = \frac{\sum g(x_i) P_i}{\sum P_i}, \text{ wobei } g(x) = a_\tau \frac{N_x - N_{x+\tau}}{D_{x+\tau}} + b_\tau, \quad \tau = \text{konst.}$$

$$h(\bar{x}_2) = \frac{\sum h(x_i) S_i}{\sum S_i}, \text{ wobei } h(x) = c_\tau \frac{M_x - M_{x+\tau}}{D_{x+\tau}} + d_\tau, \quad \tau = \text{konst.}$$

Zwecks Aufmunterung zu weiteren praktischen Erprobungen der t-Methode haben wir daher in Tabelle III neben der Hilfsfunktion $g(x)$ auch Werte für $h(x)$ beigefügt, bei deren Berechnung wieder $\tau = 15$ gesetzt und die Wahl der Konstanten c_τ und d_τ so vorgenommen wurde, dass $h(30) = g(30) = q_{30}$ und $h(40) = g(40) = q_{40}$.

Tabelle I

$$f(x+\tau, \tau) = (N_x - N_{x+\tau})/D_{x+\tau}$$

x \ τ	5	10	15	20	25
15	5,4717	11,8613	19,3007	28,0187	38,3676
20	5,4860	11,8744	19,3516	28,2034	38,8914
25	5,4841	11,8934	19,4571	28,5490	39,8376
30	5,4930	11,9511	19,6727	29,1905	41,5214
35	5,5094	12,0553	20,0530	30,3010	44,3297
40	5,5403	12,2872	20,7049	32,1297	49,0871
45	5,5920	12,5444	21,7550	35,1783	57,5801
50	5,6776	13,0252	23,4749	40,5362	74,1518
55	5,8073	13,7980	26,4436	50,7825	113,6838

Tabelle II

$$g(x, \tau) = (f(x+\tau, \tau) - A_\tau)/B_\tau$$

x \ τ	5	10	15	20	25	ϱx
15	2,50	2,88	2,68	2,61	2,57	1,73
20	3,12	2,96	2,79	2,74	2,71	3,26
25	3,04	3,07	3,00	2,98	2,97	3,47
30	3,43	3,43	3,43	3,43	3,43	3,43
35	4,15	4,07	4,19	4,21	4,20	4,33
40	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50
45	7,76	7,08	7,60	7,65	7,83	7,86
50	11,51	10,05	11,05	11,42	12,37	11,67
55	17,18	14,80	17,01	18,63	23,20	17,47

Tabelle III

x	$g(x)$	$h(x)$	x	$g(x)$	$h(x)$	x	$g(x)$	$h(x)$
15	2,68	2,67	30	3,43	3,43	45	7,60	7,72
16	2,70	2,72	31	3,55	3,55	46	8,16	8,32
17	2,72	2,77	32	3,68	3,69	47	8,77	8,99
18	2,74	2,81	33	3,84	3,83	48	9,45	9,73
19	2,76	2,84	34	4,00	4,00	49	10,21	10,56
20	2,79	2,87	35	4,19	4,18	50	11,05	11,49
21	2,82	2,90	36	4,40	4,39	51	11,99	12,53
22	2,85	2,93	37	4,64	4,62	52	13,04	13,70
23	2,89	2,96	38	4,89	4,88	53	14,22	15,02
24	2,94	2,99	39	5,18	5,17	54	15,54	16,51
25	3,00	3,03	40	5,50	5,50	55	17,01	18,20
26	3,06	3,08	41	5,84	5,86	56	18,66	20,11
27	3,14	3,15	42	6,22	6,26	57	20,53	22,31
28	3,22	3,23	43	6,64	6,70	58	22,68	24,85
29	3,32	3,32	44	7,10	7,18	59	25,18	27,82
						60	28,11	31,34