Reserveberechnung auf Basis hyperbolischer Interpolation

Autor(en): **Jecklin, H. / Zimmermann, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **50 (1950)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966866

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Reserveberechnung auf Basis hyperbolischer Interpolation

Von *H. Jecklin* und *H. Zimmermann*, Zürich

Im folgenden soll eine neuartige sehr einfache Reserveberechnungsmethode beschrieben werden, welche sich sowohl für die Bestimmung der Einzelreserve als auch insbesondere zur Ermittlung des Reservetotals von Versicherungsgruppen gleichen Zugangsjahres eignet. Die Methode basiert auf der hyperbolischen Interpolation, weshalb vorerst letztere kurz in Erinnerung gerufen wird; in bezug auf Details sei auf eine vorgängige Publikation der Verfasser verwiesen («Eine praktische Interpolationsformel», Mitteilungen Bd. 48, Heft 2).

Bei einer gleichseitigen Hyperbel mit zu den Koordinatenachsen parallel gelagerten Asymptoten ist das Doppelverhältnis von vier Abszissenpunkten gleich dem Doppelverhältnis der zugehörigen Ordinatenpunkte. Sind also drei Punkte einer solchen Hyperbel bekannt, so kann zu einer beliebig gewählten Abszisse x aus dem Doppelverhältnis

$$\frac{(x_1 - x_3)\,(x_2 - x)}{(x_2 - x_3)\,(x_1 - x)} = \frac{(y_1 - y_3)\,(y_2 - y)}{(y_2 - y_3)\,(y_1 - y)}$$

der zugehörige Funktionswert y, d. h. ein vierter Kurvenpunkt bestimmt werden.

Sei

$$x_3 - x_1 = d_1, \quad x_2 - x_1 = d_2,$$
$$x_3 - x = d_3, \quad x - x_2 = d_4,$$
$$y_3 - y_1 = \Delta_1, \quad y_2 - y_1 = \Delta_2,$$

so ist

$$\frac{d_1\, d_4}{d_2\, d_3} = \frac{\Delta_1 (y - y_2)}{\Delta_2 (y_3 - y)},$$

also
$$y = \frac{y_2 d_2 d_3 \Delta_1 + y_3 d_1 d_4 \Delta_2}{d_2 d_3 \Delta_1 + d_1 d_4 \Delta_2}.$$

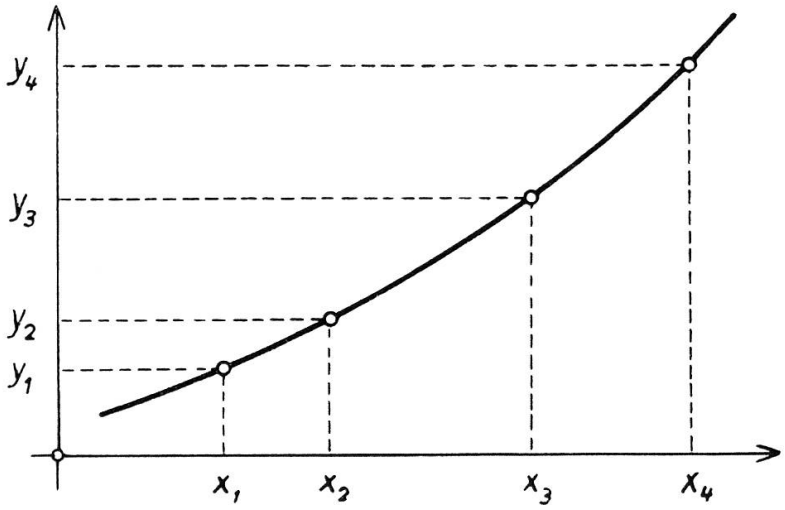


Fig. 1

Man kann leicht prüfen, ob eine vorliegende Kurve oder ein Teil einer solchen näherungsweise als Hyperbel genannter Art aufgefasst werden kann. Nimmt man vier äquidistante Abszissenwerte, so dass

$$x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = k,$$

so ist das Doppelverhältnis

$$\frac{(x_4 - x_1)\,(x_3 - x_2)}{(x_2 - x_1)\,(x_4 - x_3)} = \frac{k\,3k}{k\,k} = 3.$$

Bilden wir für die entsprechenden Funktionswerte das Doppelverhältnis, so sollte also dessen Wert ungefähr 3 betragen, wenn eine hyperbelähnliche Kurve vorliegt. In der zitierten Arbeit der Verfasser wurde gezeigt, dass sich bis zu ca. 20%iger Abweichung von diesem Wert immer noch gute Interpolationsresultate ergeben. Es wurde dort auch dargelegt, dass die hyperbolische Interpolation insbesondere bei gewissen versicherungstechnischen Funktionen gut anwendbar ist. Im vorliegenden Zusammenhange ist darauf hinzuweisen, dass die hyperbolische Interpolation beim Reserveverlauf der gemischten Versicherung und von Versicherungsarten mit ähnlicher Reservekurve (Gemischt auf verbundene Leben, Terme-fixe, Erlebensfall) ganz besonders gute Resultate zeitigt. Gewohnterweise sind Interpolationsresultate um so besser, je kleiner das Bezugsintervall ist.

Hier, d. h. bei der Reserveinterpolation, ergeben sich jedoch vielfach — auch wenn auf die ganze Versicherungsdauer als Interpolationsintervall abgestellt wird — so gute Resultate, dass durch Verkürzung des Intervalls eine praktisch ins Gewicht fallende Verbesserung weder nötig noch erreichbar ist. Eine Ausnahme machen Versicherungskombinationen mit hohem Endalter (etwa von 70 an aufwärts), wobei das Endalter und nicht die Versicherungsdauer präponderant ist. In diesen Fällen kann durch Verkürzung des Interpolationsintervalles eine wesentliche Resultatverbesserung erreicht werden. Im Anhang sind eine Anzahl Doppelverhältnisproben für die Reservekurven verschiedener Versicherungskombinationen und nach diversen Rechnungsgrundlagen beispielshalber aufgeführt.

Zwischen vier Punkten kann man bekanntlich sechs verschiedene Doppelverhältnisse bilden, die im folgenden Zusammenhange stehen:

$$D, \quad \frac{1}{D}, \quad D+1, \quad \frac{1}{D+1}, \quad \frac{D+1}{D}, \quad \frac{D}{D+1}.$$

Nehmen wir z. B. das Doppelverhältnis

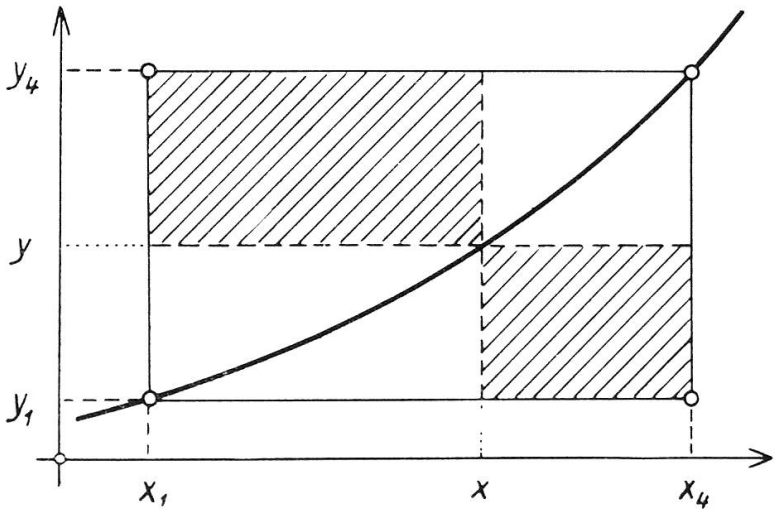
$$\frac{(x_3 - x_1)\,(x_4 - x_2)}{(x_4 - x_3)\,(x_2 - x_1)} = \frac{(y_3 - y_1)\,(y_4 - y_2)}{(y_4 - y_3)\,(y_2 - y_1)}$$

so folgt

$$\frac{(x_3 - x_1)\,(y_4 - y_3)}{(x_4 - x_3)\,(y_3 - y_1)} = \frac{(x_2 - x_1)\,(y_4 - y_2)}{(x_4 - x_2)\,(y_2 - y_1)}$$

was in folgender Weise interpretiert werden kann: Wenn wir das Rechteck mit den Eckpunkten $(x_1 y_1)$, $(x_1 y_4)$, $(x_4 y_1)$, $(x_4 y_4)$ fest-

Fig. 2



halten, d. h. die Werte x_1, x_4, y_1, y_4 unverändert lassen, und sich nun ein Punkt (x, y) zwischen $(x_1 y_1)$ und $(x_4 y_4)$ auf einer gleichseitigen Hyperbel bewegt, so ist der Quotient aus den beiden Flächen $(x - x_1)(y_4 - y)$ und $(x_4 - x)(y - y_1)$ konstant! Verschieben wir das Koordinatensystem so, dass sein Nullpunkt mit dem Punkt $(x_1 y_1)$ zusammenfällt, so ist dann also, wenn Punkt $(x_4 y_4)$ fest bleibt, das Doppelverhältnis

$$\frac{(y_4 - y)\,x}{(x_4 - x)\,y} = \text{konstant.}$$

Identifizieren wir nun die Hyperbel mit dem Reserveverlauf ${}_tV$ einer gemischten Versicherung, und setzen $x_4 = n =$ Versicherungsdauer, $y_4 = 1 =$ Erlebensfallsumme, so müsste demnach gelten:

$$\frac{(1 - {}_tV)\,t}{(n - t)\,{}_tV} = \text{konstant} = F.$$

Zur rechnerischen Bestimmung der Konstanten F muss zumindest eine Reserveposition ${}_tV$ für $0 < t < n$ bekannt sein. Es sei dies ${}_\alpha V$, dann ist

$$F = \frac{(1 - {}_\alpha V)\,\alpha}{(n - \alpha)\,{}_\alpha V}.$$

Für die Wahl von ${}_\alpha V$ setzt man vorteilhaft $\alpha = \frac{1}{2}n$, wenn n gerade, $\alpha = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$, wenn n ungerade. Es vereinfacht sich dann die Bestimmung von F

bei $\alpha = \frac{1}{2}n$ zu $\qquad F = \left(\frac{1}{{}_{n/2}V} - 1\right),$

bei $\alpha = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$ zu $\qquad F = \left(\frac{1}{{}_{n/2+1/2}V} - 1\right)\frac{(n+1)}{(n-1)}.$

Einmal F gegeben, erhält man durch Auflösung von

$$\frac{(1 - {}_tV)\,t}{(n - t)\,{}_tV} = F$$

nach ${}_tV$ die Reserveformel:

$$V = \frac{1}{1 + F\left(\frac{n}{t} - 1\right)}.$$

Man überzeugt sich empirisch leicht, dass die Formel nicht nur für die einfache gemischte Versicherung, sondern auch für die gemischte Versicherung verbundener Leben, für Terme-fixe- und Erlebensfall-Versicherung überraschend gute Resultate liefert. Einige beispielmässige Berechnungen sind im Anhang zu finden. Die Konstante F ist somit charakteristisch für Versicherungsart, Eintrittsalter, Versicherungsdauer und Rechnungsgrundlagen.

Es erhebt sich hier die naheliegende Frage, ob sich auf Basis parabolischer Interpolation, d. h. mit einer durch den Koordinaten-Nullpunkt gehenden und zur y-Achse parallel gelagerten Parabel, nicht auf einfachere Weise ebenso befriedigende Resultate erhalten lassen. Die in Frage kommende Interpolationsformel wäre in der Tat von der einfachen Gestalt:

$$ {}_tV = ta + t^2 b $$

und die beiden Konstanten a und b lassen sich, wenn eine Reserveposition ${}_\alpha V$ für $0 < \alpha < n$ bekannt ist, aus den Ansätzen

$$ {}_\alpha V = \alpha a + \alpha^2 b $$
$$ 1 = na + n^2 b $$

bestimmen als $a = \dfrac{1}{n} - bn$ und $b = \dfrac{\dfrac{\alpha}{n} - {}_\alpha V}{\alpha(n-\alpha)}$.

Man überzeugt sich aber anhand einiger numerischer Proben leicht, dass die hyperbolische Interpolation bedeutend bessere Resultate liefert. Nehmen wir als Beispiel die gemischte Versicherung mit $x = 30$ und $n = 20$, Sterbetafel S. M. 1931/41 zu 3 % und setzen $\alpha = 10$, mithin ${}_{10}V = 420{,}52\ ‰$; dann haben die beiden Konstanten der parabolischen Interpolation die Werte $a = 0{,}034104$, $b = 0{,}0007948$, und als Reserveformel ergibt sich

$$ {}_tV = 0{,}034104\,t + 0{,}0007948\,t^2, $$

während wir als Konstante F der hyperbolischen Interpolation aus dem Ansatz $F = \dfrac{1 - {}_{10}V}{{}_{10}V}$ den Wert $F = 1{,}37801$ und als Reserveformel

$$ {}_tV = \frac{t}{20F - t(F-1)} = \frac{t}{27{,}5602 - 0{,}37801\,t} \quad \text{erhalten.} $$

Die nachstehende kurze Aufstellung illustriert das Gesagte zur Genüge:

t	${}_tV$ genau ‰	${}_tV$ parabol. ‰	Fehler in ‰ der Reserve	${}_tV$ hyperbol. ‰	Fehler in ‰ der Reserve
3	112,99	109,47	— 31,09	113,52	+ 4,69
5	194,27	190,39	— 19,97	194,78	+ 2,63
8	325,77	323,70	— 6,35	326,05	+ 0,86
10	420,52	420,52	—	420,52	—
13	574,26	577,67	+ 5,94	574,05	— 0,37
15	685,35	690,39	+ 7,35	685,24	— 0,16
18	867,01	871,39	+ 5,05	867,22	+ 0,24
20	1000,—	1000,—	—	1000,—	—

Unsere hyperbolische Reserveformel können wir wie folgt umformen:

$$ {}_tV = \frac{1}{F\left(\frac{n}{t} - 1\right) + 1} = \frac{t}{Fn}\left(\frac{1}{1 - t\frac{F-1}{Fn}}\right) = $$

$$ = t\,\frac{1}{Fn} + t^2\,\frac{(F-1)}{(Fn)^2} + t^3\,\frac{(F-1)^2}{(Fn)^3} + t^4\,\frac{(F-1)^3}{(Fn)^4} + \ldots $$

Es ergibt sich somit die Möglichkeit der globalen Reserveberechnung nach Gruppen gleicher verflossener Dauer; denn es ist, wenn die Versicherungssumme der einzelnen Versicherung mit S_i, die einzelne charakteristische Konstante mit F_i und die t. Einzelreserve mit ${}_tV_i$ (pro Summeneinheit) bezeichnet werden:

$$ \sum_i S_i\,{}_tV_i = t\sum_i \frac{S_i}{F_i n} + t^2 \sum_i S_i \frac{(F_i - 1)}{(F_i n)^2} + t^3 \sum_i S_i \frac{(F_i - 1)^2}{(F_i n)^3} + \ldots, $$

oder, wenn wir folgende Bezeichnungen einführen

$$ \frac{S_i}{F_i n} = a_i, \quad \frac{F_i - 1}{F_i n} = b_i, $$

so wird

$$ \sum_i S_i\,{}_tV_i = \sum_i \frac{t a_i}{1 - t b_i} = t\sum_i a_i + t^2 \sum_i a_i b_i + t^3 \sum_i a_i b_i^2 + t^4 \sum_i a_i b_i^3 + \ldots $$

Über die Vorteile der Reserveberechnung nach Gruppen gleicher verflossener Dauer wurde im Zusammenhang mit der sogenannten t-Methode wiederholt berichtet. Die neue Methode weist gegenüber der t-Methode jedoch noch wichtige Vorteile auf. Ihre Anwendung ist nicht auf die gemischte Versicherung beschränkt. Sodann kann der Versicherungsbestand bezüglich Sterbetafel und technischem Zins ganz unterschiedlich zusammengesetzt sein.

Es wären demnach für die einzelne Versicherung als Hilfszahlen zu notieren

$$a_i, \quad a_i b_i, \quad a_i b_i^2, \quad a_i b_i^3, \quad \ldots,$$

und es ist nur noch die Frage offen, wie rasch die vorgenannte, das Reservetotal darstellende Reihe konvergiert, oder mit andern Worten, mit welchem Minimum an Hilfszahlen auszukommen ist, um ein Reservetotal von befriedigender Genauigkeit zu erhalten. Es zeigt sich, dass für gute Resultate bei höherem t zumindest vier Hilfszahlen benötigt werden, was die praktische Tauglichkeit der Methode doch sehr beeinträchtigen würde.

Durch einen kleinen Kunstgriff wird es jedoch ermöglicht, die Anzahl der Hilfszahlen auf *zwei* zu beschränken. Bekanntlich gilt für reelle Grössen die Ungleichung von Cauchy-Lagrange

$$\sum_i \alpha_i^2 \sum_i \beta_i^2 \geqslant (\sum_i \alpha_i \beta_i)^2.$$

In Verallgemeinerung gilt, wenn m gleich grosse Serien positiver Grössen vorliegen (s. «Inequalities» v. Hardy-Littlewood-Polya, Cambridge 1934, Seite 22)

$$\sum_i \alpha_i^m \sum_i \beta_i^m \sum_i \gamma_i^m \ldots \geqslant (\sum_i \alpha_i \beta_i \gamma_i \ldots)^m.$$

Setzen wir hier $\alpha_i^m = a_i b_i^m, \quad \beta_i^m = \gamma_i^m = \ldots = a_i,$

so folgt
$$(\sum_i a_i b_i^m)(\sum_i a_i)^{m-1} \geqslant (\sum_i a_i b_i)^m$$

oder
$$\sum_i a_i b_i^m \geqslant \frac{(\sum_i a_i b_i)^m}{(\sum_i a_i)^{m-1}}.$$

Sind insbesondere die a_i alle von ungefähr gleicher Grössenordnung, und die b_i ihrerseits ebenfalls, dann ist der Unterschied zwischen den beiden Seiten der Ungleichung nur klein und man kann setzen

$$\sum_i a_i b_i^m \sim \frac{(\sum_i a_i b_i)^m}{(\sum_i a_i)^{m-1}}.$$

Unter Benutzung dieser Beziehung können wir nun schreiben

$$\sum_i S_{i\,t}V_i = t\sum a_i + t^2\sum a_i b_i + t^3\sum a_i b_i^2 + t^4\sum a_i b_i^3 + \ldots$$

$$\sim t\sum a_i + t^2\sum a_i b_i + t^3\frac{(\sum a_i b_i)^2}{\sum a_i} + t^4\frac{(\sum a_i b_i)^3}{(\sum a_i)^2} + \ldots$$

$$= t\sum a_i\left[1 + t\frac{\sum a_i b_i}{\sum a_i} + t^2\left(\frac{\sum a_i b_i}{\sum a_i}\right)^2 + t^3\left(\frac{\sum a_i b_i}{\sum a_i}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= \frac{t\sum a_i}{1 - t\left(\frac{\sum a_i b_i}{\sum a_i}\right)} = \frac{t(\sum a_i)^2}{\sum a_i - t\sum a_i b_i}.$$

Zu diesem Resultat kann man auch auf anderem Wege gelangen. Wir suchen für die Reserveformel ein $\bar{b}$, das dem Ansatz genügt

$$\sum_i \frac{t a_i}{1 - t b_i} = \frac{t\sum a_i}{1 - t\bar{b}},$$

d. h. es sollen gewissermassen die b_i durch einen Mittelwert $\bar{b}$ ersetzt werden. Es folgt demnach

$$1 - t\bar{b} = (t\sum a_i) : \left(\sum \frac{t a_i}{1 - t b_i}\right) =$$

$$= (t\sum a_i) : (t\sum a_i + t^2\sum a_i b_i + t^3\sum a_i b_i^2 + t^4\sum a_i b_i^3 + \ldots)$$

$$= 1 - t\frac{\sum a_i b_i}{\sum a_i} - t^2\left[\frac{\sum a_i b_i^2}{\sum a_i} - \left(\frac{\sum a_i b_i}{\sum a_i}\right)^2\right] - \ldots.$$

Erwartungsgemäss werden die quadratischen und höheren Glieder letzterer Reihe nur relativ kleinen Wert haben, so dass man setzen kann

$$\sum_i S_{i\,t}V_i = \sum_i \frac{t a_i}{1 - t b_i} \sim \frac{t\sum a_i}{1 - t\frac{\sum a_i b_i}{\sum a_i}} = \frac{t(\sum a_i)^2}{\sum a_i - t\sum a_i b_i}.$$

Als besondere Eigenart unserer Reserveformel ist hervorzuheben, dass t nicht als Index, sondern als direkte Rechnungsgrösse auftritt.

Die Reserve ist dargestellt als linear gebrochene Funktion der abgelaufenen Zeit, und die Berechnung der t. Reserve einer Gruppe von Versicherungen gleichen Zugangsjahres gestaltet sich in kaum noch zu überbietender Einfachheit: Für die einzelne Versicherung sind die beiden Hilfszahlen $a_i = \frac{S_i}{F_i n}$ und $a_i b_i = \frac{S_i (F_i - 1)}{(F_i n)^2}$ notiert, und die t. Gruppenreserve ergibt sich, indem die Summen $\sum_i a_i$ und $\sum_i a_i b_i$ der beiden Hilfszahlen gebildet werden, und dann gemäss vorgenannter Formel das Reservetotal der Gruppe mit ganz geringem Rechenaufwand bestimmt wird. Mit einer modernen Rechenmaschine ist dies in einem Zuge möglich, indem z. B. zuerst die Differenz $\sum a_i - t \sum a_i b_i$ und dann der Quotient $\frac{\sum a_i}{\sum a_i - t \sum a_i b_i}$ gebildet wird, worauf noch mit $\sum a_i$ und schliesslich mit t zu multiplizieren ist. Auch in der Gestalt

$$\sum S_{i\,t} V_i = \frac{\sum a_i}{\frac{1}{t} - \frac{\sum a_i b_i}{\sum a_i}}$$

eignet sich die Formel gut für rasche maschinelle Auswertung.

Die im Anhang gegebenen numerischen Beispiele erhärten unseres Erachtens zur Genüge die Einfachheit und praktische Tauglichkeit der Methode. Diese Reserveberechnungsart kann hinsichtlich ihrer Genauigkeit noch verbessert werden, so z. B. indem man die Interpolation auf eine maximale Dauer von 10 Jahren beschränkt. Bei der ersten zehnjährigen Interpolationsperiode ist dann offenbar:

für Versicherungen mit $n \leqslant 10$: $a = \frac{S}{Fn}$, $b = \frac{F-1}{Fn}$,

wobei für gerades n: $F = \frac{1}{{}_{n/2}V} - 1$,

und für ungerades n: $F = \left(\frac{1}{{}_{n/2+1/2}V} - 1\right) \frac{(n+1)}{(n-1)}$;

für Versicherungen mit $n > 10$ dagegen wählt man als feste Interpolationspunkte $t = 0$, $t = 5$ und $t = 10$, und es ist dann, weil die

Reserve pro Summeneinheit am Ende der zehnjährigen Periode den Wert ${}_{10}V$ erreichen muss

$$a = \frac{S\,{}_{10}V}{10F}, \quad b = \frac{F-1}{10F}, \quad \text{mit} \quad F = \frac{{}_{10}V}{{}_{5}V} - 1.$$

Für Versicherungen mit einer Dauer $n > 10$ wird nach Ablauf der zehn Jahre eine neue Festsetzung der Hilfszahlen für weitere maximal 10 Jahre vorgenommen. Es ist dann:

für Versicherungen mit $n = 11$: $a = S, \quad b = 0,$

für Versicherungen mit $11 < n \leqslant 20$: $a = \dfrac{S(1-{}_{10}V)}{F(n-10)}, \quad b = \dfrac{F-1}{F(n-10)},$

$$\text{wobei für gerades } n\text{: } F = \frac{1-{}_{5+n/2}V}{{}_{5+n/2}V - {}_{10}V}$$

$$\text{und für ungerades } n\text{: } F = \frac{(1-{}_{5+n/2+1/2}V)\,(n-9)}{({}_{5+n/2+1/2}V - {}_{10}V)\,(n-11)},$$

für Versicherungen mit $n > 20$ ist einfach

$$a = \frac{S({}_{20}V - {}_{10}V)}{10F}, \quad b = \frac{F-1}{10F}, \quad \text{mit} \quad F = \frac{({}_{20}V - {}_{15}V)}{({}_{15}V - {}_{10}V)}.$$

Die Totalreserve für bezügliche Gruppen wäre offenbar

$$\sum_i S_i\,{}_tV_i = \sum_i S_i\,{}_{10}V_i + \frac{t\,(\sum_i a_i)^2}{\sum_i a_i - t\sum_i a_i b_i}.$$

Natürlich hat die Variable t am Anfang einer jeden Interpolationsperiode den Wert Null, kann also im vorliegenden Falle maximal den Wert 10 erreichen. Die Weiterführung und Ausdehnung des Verfahrens für Versicherungen mit $n > 20$ nach Ablauf von 20 Jahren ergibt sich sinngemäss leicht. Ein Vorteil solchen Vorgehens würde darin bestehen, dass ein ganzes Portefeuille für die Reserveberechnung im ganzen nur zehn Gruppen aufweisen würde. Ein gewisser Nachteil besteht allerdings darin, dass je nach Ablauf von zehn Jahren für die vorhandenen Versicherungen die Hilfszahlen neu bestimmt werden müssen, welche Arbeit aber zufolge natürlichen und vorzeitigen Abganges von Versicherungen dezimiert ist.

Es sei darauf hingewiesen, dass die Methode auch anwendbar ist für Versicherungsarten mit variabler Prämie oder veränderlicher Versicherungssumme, sofern nur der Reserveverlauf jenem der gemischten Versicherung ähnlich ist. Auch lässt sie sich ausbauen auf Reserveverlauf mit ${}_0V \neq 0$ (Versicherungen mit Einmaleinlage, prämienfrei reduzierte Versicherungen) durch Einbezug eines konstanten Zusatzgliedes in die Reserveformel. Vorgängig handelt es sich nur darum, die neue Methode in ihren Grundzügen darzustellen; Verfasser möchten sich vorbehalten, auf die Fragen der Eignungsprüfung, der Verfeinerung und des Ausbaues der Methode zu gegebener Zeit zurückzukommen.

Im Hinblick auf die Praxis sei insbesondere auf das numerische Beispiel anhand einer Gruppe von 135 Versicherungen im Anhang unter III, 2 verwiesen. Die Gruppe umfasst 114 gemischte, 6 Termefixe-, 3 Erlebensfall- und 12 zweilebige gemischte Versicherungen. Das durchschnittliche Eintrittsalter ist 34, die mittlere Dauer 28 Jahre. Es handelt sich also um eine Gruppe mit langer durchschnittlicher Dauer. Wie die Ergebnisse zeigen, gibt die Methode auch in diesem ungünstig gelagerten Falle Resultate, die bei Interpolation nach der ganzen Dauer n ungefähr der Güte der t-Methode in einfacher Anwendung gleichwertig sind und bei Begrenzung des Interpolationsintervalls auf 10 Jahre sich im Rahmen der Auf- und Abrundungsfehler der Einzelrechnung bewegen.

Anhang

I. Doppelverhältnisproben für Reservekurven

Als Interpolationsintervall ist die ganze Versicherungsdauer genommen.

Argumenten-Doppelverhältnis: $\dfrac{(n-0)\left(\frac{2}{3}n-\frac{1}{3}n\right)}{\left(\frac{1}{3}n-0\right)\left(n-\frac{2}{3}n\right)} = 3.$

Die Tabellen geben den Wert des zugehörigen Funktions-Doppelverhältnisses:

$$\frac{({}_nV - {}_0V)\,({}_{2n/3}V - {}_{n/3}V)}{({}_{n/3}V - {}_0V)\,({}_nV - {}_{2n/3}V)} = \frac{{}_{2n/3}V - {}_{n/3}V}{{}_{n/3}V\,(1 - {}_{2n/3}V)}.$$

1. Beurteilung nach der Versicherungsdauer bzw. nach Endalter

Versicherungsart: Gemischt. Grundlagen: S. M. 1921/30 zu $2^3/_4$ %

x \ n	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39
20	3,01	3,02	3,03	3,04	3,04	3,06	3,07	3,08	3,08	3,07
30	3,01	3,00	3,00	2,99	2,98	2,96	2,93	2,90	2,86	2,82
40	2,98	2,96	2,93	2,89	2,84	2,79	2,72			
50	2,94	2,89	2,83							
58	2,86									

2. Beurteilung nach Versicherungsart

$x = 40$. Grundlagen: S. M. 1921/30 zu $2^3/_4$ %

Versicherungsart \ n	12	18	24	30
Gemischt	2,98	2,93	2,84	2,72
Terme-fixe	2,99	2,97	2,94	2,91
Erlebensfall	2,98	2,93	2,87	2,78
Gemischt auf zwei gleichaltrige Leben	2,94	2,84	2,66	2,46

3. Beurteilung nach Rechnungsgrundlagen

$x = 40$. Versicherungsart: Gemischt

Grundlagen \ n	12	18	24	30
S. M. 1921/30 à $2^3/_4$ %	2,98	2,93	2,84	2,72
S. M. 1921/30 à 4 %	2,99	2,95	2,87	2,75
A. F. à $3^1/_2$ %	2,99	2,96	2,89	2,76
Allgemeine Deutsche St.T. 1924/26 Männer 3 %	2,99	2,97	2,92	2,83
6. Holländische Mannentafel 1921/30 à 3 %	3,00	2,98	2,93	2,86
American Men. 1900/15 à $3^1/_2$ %	2,99	2,97	2,90	2,79

4. Beispiele für die Quasi-Konstanz des Wertes $F = \dfrac{(1 - {}_tV)\,t}{{}_tV\,(n - t)}$

Grundlagen: 17 englische Gesellschaften zu $3\frac{1}{2}$ %

t	Gemischt $x = 40,\ n = 10$	t	Gemischt $x = 40,\ n = 20$	t	Erlebensfall $x = 40,\ n = 20$
1	1,252	2	1,520	2	1,805
2	1,251	4	1,516	4	1,806
3	1,250	6	1,514	6	1,809
4	1,249	8	1,516	8	1,812
5	1,248	10	1,519	10	1,816
6	1,248	12	1,525	12	1,820
7	1,248	14	1,532	14	1,825
8	1,248	16	1,541	16	1,830
9	1,248	18	1,552	18	1,835

Grundlagen: S. M. 1931/41 zu $2\frac{3}{4}$ %

t	Gemischt $x = 40,\ n = 10$	t	Gemischt $x = 40,\ n = 20$	t	Terme-fixe $x = 40,\ n = 20$
1	1,172	2	1,330	2	1,328
2	1,172	4	1,334	4	1,328
3	1,172	6	1,338	6	1,329
4	1,173	8	1,343	8	1,331
5	1,174	10	1,350	10	1,334
6	1,175	12	1,358	12	1,337
7	1,176	14	1,369	14	1,342
8	1,177	16	1,381	16	1,348
9	1,178	18	1,395	18	1,355

II. Beispiele für Einzelreserven nach hyperbolischer Interpolation

Die Tabellen geben die Reservewerte pro Versicherungssumme 1000

1. Interpolationsintervall identisch der Versicherungsdauer n

a = genaue Reservewerte,

b = approximative Reservewerte:

$$ {}_tV = \frac{t}{Fn - t(F - 1)}, \quad F = \frac{1 - {}_\alpha V}{{}_\alpha V}, \quad \alpha = \tfrac{1}{2}n. $$

Gemischte Versicherung

S. M. 1921/30 à $2^3/_4$ % $x = 35$, $n = 10$			T. M. G. 1939 à 3 % $x = 60$, $n = 10$			17 engl. Ges. à $3^1/_2$ % $x = 40$, $n = 30$		
t	a	b	t	a	b	t	a	b
2	175,88	175,81	2	166,14	163,61	5	107,77	105,76
4	362,62	362,58	4	344,32	342,82	10	231,36	228,21
6	561,31	561,38	6	538,35	539,96	15	371,58	371,61
8	773,20	773,40	8	754,00	757,86	20	533,68	541,86
10	1000,—	1000,—	10	1000,—	1000,—	25	730,85	747,27
	$F = 1{,}172$			$F = 1{,}278$			$F = 1{,}691$	

Grundlagen: S. M. 1921/30 zu $2^3/_4$ %

t	Gemischt $x = 30$, $n = 20$		Terme-fixe $x = 30$, $n = 20$		Erlebensfall $x = 30$, $n = 20$		Gemischt, 2 Leben $x = 30, y = 40, n = 20$	
	a	b	a	b	a	b	a	b
3	115,20	115,53	116,24	116,83	108,01	107,45	114,28	111,87
5	197,64	197,90	199,32	199,92	185,99	185,26	195,19	192,20
8	330,40	330,41	332,93	333,22	313,10	312,61	324,36	322,42
10	425,35	425,35	428,38	428,38	405,52	405,52	416,44	416,44
13	578,63	578,88	582,12	581,97	557,74	558,85	565,84	570,00
15	688,91	689,50	692,33	692,20	669,96	671,74	675,02	681,66
18	868,70	869,48	870,87	870,91	858,24	859,94	858,89	865,30
	$F = 1{,}351$		$F = 1{,}334$		$F = 1{,}466$		$F = 1{,}401$	

2. *Verbesserung durch Ansetzung des Interpolationsintervalls auf 10 Jahre*

a = genaue Reservewerte,

b = approximative Werte bei Interpolationsintervall = n (wie sub II, 1),

c = approximative Werte mit zehnjährigem Interpolationsintervall:

$$\text{für } t \leqslant 10: \; {}_tV = \frac{t\,{}_{10}V}{10F_1 - t(F_1 - 1)}, \quad F_1 = \frac{{}_{10}V - {}_5V}{{}_5V};$$

$$10 < t \leqslant 20: \; {}_tV = \frac{t({}_{20}V - {}_{10}V)}{10F_2 - t(F_2 - 1)} + {}_{10}V, \quad F_2 = \frac{{}_{20}V - {}_{15}V}{{}_{15}V - {}_{10}V};$$

$$20 < t \leqslant 30: \; {}_tV = \frac{t({}_{30}V - {}_{20}V)}{10F_3 - t(F_3 - 1)} + {}_{20}V, \quad F_3 = \frac{{}_{30}V - {}_{25}V}{{}_{25}V - {}_{20}V}.$$

Gemischte Versicherung. S. M. 1921/30 à $2^3/_4$ %

t	$x = 50,\ n = 20$			$x = 40,\ n = 30$		
	a	b	c	a	b	c
2	76,85	73,04	76,51	49,06	46,58	49,15
4	156,26	150,60	156,07	99,65	95,21	99,70
6	238,66	233,10	238,87	151,78	146,03	151,73
8	324,65	321,02	325,10	205,35	199,18	205,30
10	414,99	414,93	414,99	260,48	254,83	260,48
12	510,90	515,46	509,10	317,32	313,19	317,05
14	613,93	623,32	612,90	376,04	374,41	375,88
16	726,68	739,37	727,94	436,97	438,74	437,10
18	853,23	864,55	856,18	500,57	506,41	500,88
20	1000,—	1000,—	1000,—	567,37	577,70	567,37
22		$F = 1{,}410$	$F_1 = 1{,}106$	638,30	652,90	636,97
24			$F_2 = 1{,}304$	714,49	732,33	713,74
26				797,88	816,38	798,82
28				891,46	905,44	893,64
30				1000,—	1000,—	1000,—
					$F = 1{,}462$	$F_1 = 1{,}075$
						$F_2 = 1{,}106$
						$F_3 = 1{,}304$

III. Beispiele für Gruppenrechnung auf Basis hyperbolischer Interpolation

Die Rechnungen sind so durchgeführt, dass das vorgegebene Summentotal $\sum_i S_i$ als jeweiliger Gruppenbestand per Ende des t. Versicherungsjahres angenommen ist (wobei natürlich Versicherungen mit $n < t$ ausgeschieden werden).

1. Gruppe von 10 Versicherungen unterschiedlicher Grundlagen

Interpolationsintervall $= n$.

Für die Berechnung von F_i wurde

$$\alpha = \tfrac{1}{2} n \text{ bei geradem } n,$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2} n + \tfrac{1}{2} \text{ bei ungeradem } n \text{ gesetzt.}$$

Zusammensetzung der Gruppe

Versicherungsart	x	n	Versicherungssumme	Grundlagen	F_i	a_i	$a_i b_i$
Gemischt . .	35	20	10 000	M. und W. I 3½ % . .	1,533	326,158	5,670
Gemischt . .	30						
2 Leben. .	40	20	20 000	17 engl. Ges. 3½ % . .	1,634	612,000	11,873
Gemischt . .	30	15	15 000	Abel aggregat 4 %. . .	1,371	729,390	13,158
Gemischt . .	40	20	20 000	Deutschl. 24/26 M. 3 %	1,389	719,940	10,081
Erlebensfall .	35	20	15 000	Deutschl. 24/26 M. 3 %	1,522	492,780	8,451
Gemischt . .	30	25	10 000	S. M. 1921/30, 3½ %. .	1,568	255,100	3,696
Terme-fixe .	30	20	20 000	S. M. 1921/30, 3½ %. .	1,431	698,820	10,524
Gemischt . .	40	20	25 000	S. M. 1931/41, 3 %. . .	1,382	904,475	12,500
Gemischt . .	30	30	15 000	S. M. 1931/41, 3 %. . .	1,556	321,330	3,827
Gemischt . .	35	20	20 000	S. M. 1931/41, 2½ %. .	1,314	761,040	9,093

Rechenergebnisse für $\sum_i S_{i\,t} V_i$

t	Summe der Einzelreserven	$\frac{t(\sum a)^2}{\sum a - t \sum ab}$	Fehler in ‰ der Reserve
3	18 322	18 301	— 1,1
5	31 566	31 511	— 1,7
8	53 119	53 048	— 1,3
10	68 751	68 699	— 0,8
13	94 417	94 413	— 0,0
15	113 260	113 253	— 0,1
18	125 295	125 146	— 1,2
20	145 581	144 937	— 4,4
23	18 914	18 945	+ 1,6
25	21 376	21 390	+ 0,7
28	13 447	13 499	+ 3,9

2. Gruppe von 135 Versicherungen

Grundlagen: S. M. 1921/30 à $2^3/_4\,\%$

Verteilung der Versicherungssummen, Eintrittsalter und Dauern

S Tausend	Anzahl	S Tausend	Anzahl	x	Anzahl *	n	Anzahl
0,5	37	7,1–8,0	4	bis 20	9	bis 10	1
0,6–1,0	17	8,1–9,0	1	21–25	19	11–15	6
1,1–2,0	10	9,1–10	5	26–30	24	16–20	25
2,1–3,0	3	11–15	10	31–35	32	21–25	31
3,1–4,0	10	16–20	3	36–40	20	26–30	32
4,1–5,0	20	21–30	4	41–45	24	31–35	31
5,1–6,0	3	40	1	46–50	6	36–40	8
6,1–7,0	6	70	1	51–55	1	41–45	1

* Versicherungen auf zwei Leben sind mit dem mittleren Alter einfach gezählt

Die nachstehende Tabelle gibt einige Reservetotale der Gruppe.

A = Summe der Einzelreserven am Ende des t. Jahres,

B = approximatives Reservetotal, Interpolationsintervall = n:

$$\sum S\,{}_tV = \frac{t(\sum a)^2}{\sum a - t\sum ab}, \qquad t = 1, 2, \ldots n,$$

$$a = \frac{S}{Fn}, \qquad b = \frac{F-1}{Fn},$$

$$\text{wobei } F = \frac{1}{{}_{n/2}V} - 1 \text{ für gerades } n,$$

$$F = \left(\frac{1}{{}_{n/2+1/2}V} - 1\right)\frac{n+1}{n-1}, \text{ für ungerades } n.$$

C = approximatives Reservetotal, Interpolationsintervall maximal 10 Jahre.

α) $$t \leqslant 10: \quad \sum S_t V = \frac{t(\sum a)^2}{\sum a - t \sum ab}, \quad t = 1, 2, \ldots 10,$$

wobei für $n \leqslant 10$: a, b, F wie sub B vorhin,

und für $n > 10$: $a = \dfrac{S_{10}V}{10F}$, $b = \dfrac{F-1}{10F}$, $F = \dfrac{{}_{10}V}{{}_{5}V} - 1$.

β) $$10 < t \leqslant 20: \quad \sum S_t V = \sum S_{10}V + \frac{t(\sum a)^2}{\sum a - t \sum ab}, \quad t = 1, 2, \ldots 10,$$

wobei für $n = 11$: $a = S$, $b = 0$,

für $11 < n \leqslant 20$: $a = \dfrac{S(1 - {}_{10}V)}{F(n-10)}$, $b = \dfrac{F-1}{F(n-10)}$,

$$\text{mit } F = \frac{1 - {}_{5+n/2}V}{{}_{5+n/2}V - {}_{10}V}, \text{ wenn } n \text{ gerade,}$$

$$F = \left(\frac{1 - {}_{5+n/2+1/2}V}{{}_{5+n/2+1/2}V - {}_{10}V}\right)\frac{n-9}{n-11}, \text{ wenn } n \text{ ungerade,}$$

und für $n > 20$: $a = \dfrac{S({}_{20}V - {}_{10}V)}{10F}$, $b = \dfrac{F-1}{10F}$, $F = \dfrac{{}_{20}V - {}_{15}V}{{}_{15}V - {}_{10}V}$.

t	A	B	Fehler in ‰ der Reserve	C	Fehler in ‰ der Reserve
3	60 106	59 356	— 12,5	60 107	+ 0,02
6	124 531	123 390	— 9,2	124 500	— 0,25
9	193 731	192 681	— 5,4	193 655	— 0,39
12	262 053	261 686	— 1,4	261 853	— 0,76
15	338 645	339 324	+ 2,0	338 586	— 0,17
18	412 747	414 396	+ 4,0	412 806	+ 0,14