Die Risikotheorie und ihre Bedeutung für die Versicherungsmathematik

Autor(en): **Wyss, Hans**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **53 (1953)**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-550871

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

B
Wissenschaftliche Mitteilungen

Die Risikotheorie und ihre Bedeutung für die Versicherungsmathematik [1]

Von *Hans Wyss*, Zürich

Die Theorie des Versicherungsrisikos hat ihren Niederschlag gefunden in zerstreuten Abhandlungen verschiedener Fachschriften [2] und auf den letzten Seiten der Lehrbücher, vergleichbar dem sprichwörtlichen Blümchen, das im Verborgenen blüht. Jedenfalls hat das Versicherungswesen seine erfolgreiche Entwicklung und innere Festigung erreicht, ohne grundlegende Beanspruchung der Risikotheorie. Diesem Umstand entspringen wohl auch die verbreiteten Zweifel an ihrer Bedeutung für die Versicherungspraxis. Aber gerade diese Unklarheit legt dem Versicherungsmathematiker die Pflicht auf, sich klar zu machen, was die Risikotheorie zu bieten vermag. Kann der Praktiker etwas damit anfangen? Kann der Theoretiker darin eine Stütze finden zur Begründung oder zur Vertiefung der Versicherungsmathematik? Soll sich der Versicherungsmathematiker ernstlich damit befassen?

Wenn im folgenden versucht wird, diese Fragen zu klären, so dürfen selbstverständlich von der Risikotheorie nicht Ergebnisse erwartet werden, die über die Natur des Problems hinausreichen. Zum vornherein beschränkt sie sich auf die zufallsbedingten Belastungen aus Versicherungsfällen und will sich nicht mit den Risiken geschäftlicher Art befassen, die der Versicherungsträger ebenfalls auf sich nimmt und die für sein Schicksal unter Umständen noch bedeutungsvoller sein können als das Schadenrisiko.

Die derart abgegrenzten Probleme kann man auf verschiedene Weise mathematisch erfassen. Bisher sind zwei Wege bekannt geworden: man pflegt sie als «individuelle Risikotheorie» und «kollektive Risikotheorie» zu unterscheiden. Eine Schilderung dieser beiden Lösungen in ihren

[1] Nach dem an der Jahresversammlung vom 12. Okt. 1952 gehaltenen Vortrag.
[2] Literaturhinweise am Schlusse.

Hauptzügen mag vielleicht zu einer Klärung der an die Spitze gestellten Fragen beitragen.

Zur Veranschaulichung wird jeweilen ein ganz einfaches Beispiel aus der Lebensversicherung benützt. Doch sei betont, dass sich die gleichen Betrachtungen ohne weiteres ausdehnen liessen auf alle anderen komplizierteren Formen der Lebensversicherung – mit positivem oder negativem Risiko – und ebenso auf andere Versicherungszweige.

I. Modell der Versicherungsmathematik

1.

Ein Hinweis auf die vertraute Technik der Versicherungsmathematik soll einige Begriffe in Erinnerung rufen; er mag zugleich hervortreten lassen, wie die Risikotheorie die gleiche Betrachtungsweise ausweitet.

Als Ausgangspunkt diene die elementare Aufgabe der Versicherungsmathematik, eine Prämie zu bestimmen. Für das Beispiel einer lebenslänglichen Todesfallversicherung mit fester Summe für einen x-jährigen Versicherten bietet eine Hypothese über die Häufigkeit der Todesfälle die notwendige Grundlage. Im Sinne der neueren Wahrscheinlichkeitstheorie wird die Altersverteilung der Sterbefälle dargestellt durch die Frequenzfunktion

$$f(t) = p(x,t)\,\mu(x+t)\,.$$

Daraus ergibt sich die Verteilungsfunktion

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{t} p(x,\tau)\,\mu(x+\tau)\,d\tau\,,$$

weil im vorliegenden Fall der negative Ast der Verteilungsfunktion null ist. Der einfacheren Schreibweise wegen wird das Integralzeichen benützt. Im Sinne des Integralbegriffes von *Lebesgue* ist in dieser Darstellung ohne weiteres auch der Fall eingeschlossen, wo die Frequenz nicht durch eine stetige Funktion, sondern durch eine diskrete Zahlenfolge gegeben ist, zum Beispiel durch

$$f(t) = {}_{t|}q_x = \frac{d_{x+t}}{l_x}\,,$$

die aufsummiert wird zur Verteilungsfunktion:

$$F(t) = \frac{1}{l_x}\sum_{\tau=0}^{t-1} d_{x+\tau} = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x}\,.$$

In unserem Beispiel besitzt also die Frequenzfunktion die vertraute Gestalt der Zahlen der Gestorbenen, wie sie in Zeichnung 1 dargestellt ist. Die Verteilungsfunktion ist nichts anderes als das in Zeichnung 1 ebenfalls dargestellte Spiegelbild der Absterbeordnung, wobei der Maßstab so normiert ist, dass $F(\infty) = 1$ wird.

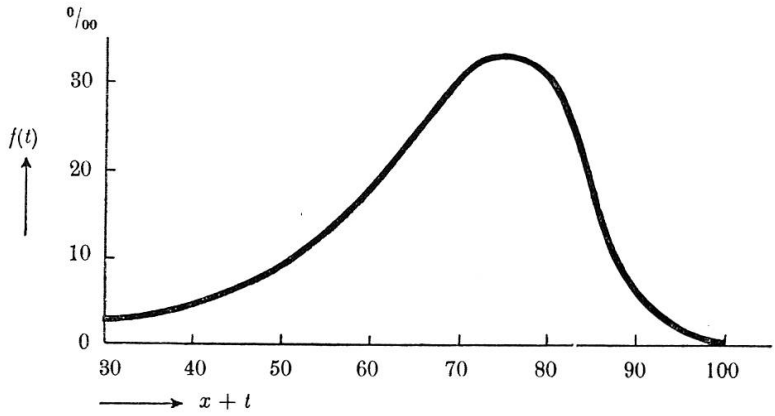
Zeichnung 1

Altersverteilung der Schadenfälle
bei einer lebenslänglichen Versicherung auf den Todesfall

(SM 1939/1944)

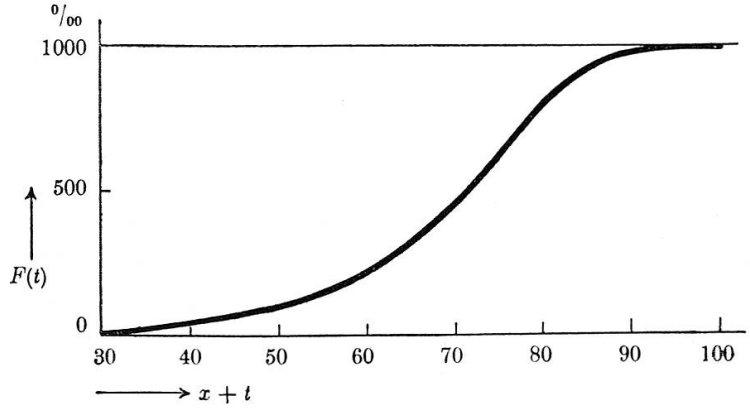
a) Frequenzfunktion

$$f(t) = \frac{d_{x+t}}{l_x} \qquad (\text{für } x = 30)$$



b) Verteilungsfunktion

$$F(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} f(\tau) = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} \qquad (\text{für } x = 30)$$



2.

Zur Bestimmung der Einmalprämie für die lebenslängliche Todesfallversicherung sind die verschiedenen Möglichkeiten in Betracht zu ziehen, dass der x-jährige Versicherte entweder im ersten oder zweiten oder in einem der folgenden Versicherungsjahre sterben kann; auszuzahlen ist in jedem Fall die Summe 1; der Barwert der Versicherungsleistung beträgt also entweder v oder $v^2 \ldots$ oder v^t. Die in Betracht zu ziehenden Möglichkeiten sind nicht alle gleich häufig; ihr Eintreten ist erfasst durch die Frequenzfunktion $f(t)$, mit der alle in Betracht fallenden Zahlungen zu wägen sind für die Berechnung des Durchschnittes. In kontinuierlicher Darstellung beträgt der Erwartungswert

$$A_x = \int_0^\infty v^t f(t)\, dt = \int_0^\infty v^t p(x,t)\, \mu(x+t)\, dt.$$

Das ist die Einmaleinlage für die lebenslängliche Todesfallversicherung des x-jährigen, aus der sich mit ähnlichen Überlegungen die periodische Prämie ableiten lässt.

3.

Dieses einfache Beispiel charakterisiert die Versicherungsmathematik und deutet an, wie sie sich aus der Wahrscheinlichkeitstheorie aufbauen lässt. Ebensogut liesse sie sich unmittelbar aus dem mathematischen Modell der Absterbeordnung ableiten. Innerhalb dieses Modells entsteht sie, und nur innerhalb dieses Modells gilt sie. Stillschweigend pflegt man für die Ableitung aller Formeln der Versicherungsmathematik anzunehmen, es handle sich um einen sehr grossen Versicherungsbestand, für den die tatsächlichen Ereignisse übereinstimmen mit den berechneten Durchschnittswerten. Nur unter dieser Voraussetzung fallen die Gesamtleistungen des Versicherers und diejenigen der Versicherten im Barwert gleich hoch aus. Man weiss allerdings, dass praktisch diese Voraussetzung kaum je erfüllt ist, und deshalb bildet streng genommen das Aequivalenzprinzip keine geeignete Grundlage für die praktische Prämienberechnung. Es liesse sich sogar nachweisen, dass ein Versicherungsträger, der sich genau an das Aequivalenzprinzip hielte, früher oder später zusammenbrechen müsste. Tatsächlich wird dieses Prinzip denn auch bei der Gewährung wirklicher Risikodeckungsgarantien nie in reiner Form angewandt; vielmehr werden stets in irgendeiner Weise Sicherheitszuschläge in Rechnung gestellt.

Die Anwendung des versicherungsmathematischen Formelapparates auf wirkliche Versicherungsbestände, die der idealen Grundvoraussetzung des Modells nicht gerecht werden, gehört in den allgemeinen Fragenkomplex der Übertragung von Ergebnissen aus einem mathematischen Modell auf die Wirklichkeit; ein Problem, das für die Anwendung aller Theorien aus der Mathematik und Physik von Bedeutung ist. Im Gebiete der Versicherungsmathematik tritt aber ein besonderer Umstand hinzu, nämlich der stochastische (zufallsartige) Charakter der Vorgänge, die den Gegenstand ihrer Berechnungen bilden. Innerhalb des Modells spielt diese Besonderheit keine Rolle. Dort wird mit festen Durchschnittswerten gerechnet, wie unter Ziffer 2 im Beispiel der Einmaleinlage. Aber für die Gegenüberstellung mit der Wirklichkeit müssen das versicherungsmathematische Modell und seine Ergebnisse gewissermassen mit einer elastischen Toleranzzone umkleidet werden, die der stochastischen Natur der Versicherungsereignisse gerecht wird. Das ist die Aufgabe der Risikotheorie.

II. Modell der individuellen Risikotheorie

1.

Die individuelle Risikotheorie geht – wie die Versicherungsmathematik – von der einzelnen Versicherung (oder einer Generation gleicher Versicherungen) aus. Als Beispiel wird wiederum die lebenslängliche Todesfallversicherung benützt. Es werde dafür eine feste Prämie P (bei kontinuierlicher Betrachtung $P\,dt$) bezahlt. Stirbt der Versicherte zur Zeit t, so weist die Rechnung der Gesellschaft im Barwert einen Einnahmenüberschuss auf von

$$g(t) = \int_0^t v^\tau P\,dt - v^t,$$

wobei für $g(t)$ auch das negative Vorzeichen eingeschlossen ist, falls die Ausgabe überwiegt.

Der Sterbefall kann zu jeder Zeit t eintreten. Der Erwartungswert ergibt sich, wenn jedes mögliche Ergebnis $g(t)$ mit dem Gewicht seiner Häufigkeit versehen und das Mittel gebildet wird:

$$E_x[g(t)] = \int_0^\infty g(t)\,f(t)\,dt = \int_0^\infty g(t)\,p(x,t)\,\mu(x+t)\,dt = 0\,.$$

Es lässt sich formelmässig zeigen – und liegt auch anschaulich auf der Hand –, dass dieses erste Moment der betrachteten Verteilung der Einnahmenüberschüsse verschwindet, sofern die Prämie P auf Grund der gleichen Frequenzfunktion $f(t)$ bestimmt worden ist. Die Barwerte der positiven und negativen Abweichungen vom Mittelwert heben sich auf. Dieses Verschwinden des ersten Momentes ist nichts anderes als der risikotheoretische Ausdruck des Aequivalenzprinzipes.

An dieser Stelle ist die individuelle Risikotheorie mit der Versicherungsmathematik verwachsen. Man kann den Zusammenhang auch analytisch nachweisen. Beispielsweise führt *Berger* in seinem Lehrbuch einen ganz allgemein gehaltenen Ansatz für risikotheoretisch betrachtete Verlusterwartungen in die *Thiele*sche Differentialgleichung des Deckungskapitals über, aus der die ganze Versicherungsmathematik abgeleitet werden kann. Er benötigt dabei als zusätzliche Hypothese nur das Aequivalenzprinzip. Damit benützt er die angedeutete Brücke zwischen Risikotheorie und Versicherungsmathematik.

2.

Für die weitere Betrachtung ist festzuhalten, dass der Erwartungswert über sämtliche Abweichungen vom Prämienmodell keine Aussage über das Ausmass der Verlustgefahr für den Versicherungsträger zulässt.

Wie bei anderen Messungen können die Abweichungen vom Erwartungswert nicht anhand des ersten Momentes der Verteilung beurteilt werden; man pflegt dafür zwei andere Masszahlen zu benützen, bei denen der Einfluss des Vorzeichens von $g(t)$ ausgeschaltet ist.

A. Naheliegend ist das absolute erste Moment, das heisst die gewogene Summe der absolut eingenommenen Einnahmenüberschüsse

$$M_a = \int_0^\infty f(t)\,|g(t)|\,dt.$$

Weil für das betrachtete Problem nur die Verluste interessieren und weil deren Barwert gleich ist dem Barwert der Gewinne, gibt für die betrachtete Versicherung der Ausdruck

$$D = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty f(t)\,|g(t)|\,dt$$

ein brauchbares Mass für das ihr innewohnende Verlustrisiko. Man

nennt diese Masszahl das *durchschnittliche Risiko.* Es stellt gewissermassen die Einmalprämie dar, die der Erstversicherer einem Rückversicherer zahlen müsste, damit ihm dieser alle Schwankungsverluste abnimmt.

Diese Masszahl lässt sich für jede Versicherungsform ziemlich leicht berechnen und ermöglicht Aussagen darüber, ob beispielsweise das durchschnittliche Risiko bei der einen Versicherungsart grösser ist als bei der anderen.

B. Eine andere – für die mathematische Statistik noch wichtigere – Masszahl ist das zweite Moment der Verteilung, die *Streuung:*

$$M^2 = \int_0^\infty f(t)\, g^2(t)\, dt.$$

In der Risikotheorie nennt man diese Zahl das Quadrat des *mittleren Risikos;* ähnlich wie man in der Fehlertheorie vom mittleren Fehler spricht. Auch diese Masszahl lässt sich für die einzelne Versicherung ziemlich einfach berechnen, besonders wenn man ein System von Kommutationszahlen mit v^{2x} anstatt mit v^x benützt. Die Ergebnisse erlauben ähnliche Aussagen wie das durchschnittliche Risiko.

3.

Die individuelle Risikotheorie arbeitet ausschliesslich mit den beiden angegebenen Masszahlen, vornehmlich mit dem mittleren Risiko. Dieses benützte schon *Laplace,* der vor 140 Jahren in seiner «Théorie analytique des probabilités» unter anderem das Risiko einer Leibrente untersuchte. Von klassischen Lehrbüchern, die im angedeuteten Sinne die Risikotheorie behandeln, seien erwähnt: *Czuber, Broggi, Landré, Berger.* Den Höhepunkt ihrer Entwicklung erreichte diese Theorie wohl am Wiener Kongress der Versicherungsmathematiker 1909, wo «das Problem des mathematischen Risikos; die Sicherheitsreserven bei Versicherungsanstalten und Pensionsfonden» als Kongressfrage behandelt wurde. Von den Abhandlungen dieser Kongressberichte sei besonders die umfassende Darstellung von *Bohlmann* erwähnt. Seither ist diese Theorie nicht mehr stark entwickelt worden. Allerdings wurde das Thema noch zweimal von Internationalen Kongressen aufgenommen (Stockholm 1930 und Luzern 1940), und die betreffenden Denkschriften enthalten interessante Untersuchungen über Sonderfragen mit Hilfe der individuellen Risikotheorie.

4.

Die theoretischen Ergebnisse der individuellen Risikotheorie beschränken sich nicht auf die Bestimmung einer Masszahl für das von der Gesellschaft übernommene Verlustrisiko aus den stochastischen Schwankungen im Verlauf der Versicherungsereignisse. Sie gestatten auch tiefere Einblicke; wichtig ist zum Beispiel die Erfassung der Zusammenhänge zwischen der Grösse des Versicherungsbestandes, der Sicherheitsreserve (oder der Sicherheitszuschläge) und der Wahrscheinlichkeit eines Verlustes oder (wie *Gürtler* anschaulicher sagt) der Häufigkeit von Verlustjahren. Wenn man beispielsweise die Zahl der Verlustjahre unter einer bestimmten Grenze halten will, so kann der für einen bestimmten Bestand benötigte Sicherheitszuschlag zur Prämie berechnet werden. Ferner lassen sich die Stabilität eines Versicherungsbestandes, die Höhe des Selbstbehaltes und ähnliche Fragen abklären.

Als Hinweis auf solche praktische Anwendungen enthält Tabelle 1 in der oberen Hälfte ein Zahlenbeispiel. Es soll andeuten, dass die Wahrscheinlichkeit von Verlusten – oder die Häufigkeit von Verlustjahren – stark abnimmt. sobald der Versicherungsbestand von grösserem Umfang ist. Die Verteilung unter lit. *a)* bezieht sich auf den Fall eines Bestandes mit durchwegs gleichen Risikosummen, der sich mit Hilfe der individuellen Risikotheorie darstellen lässt. Der allgemeinere Fall unter *b)*, für den verschieden hohe Risikosummen angenommen werden, liesse sich praktisch mit den bisher geschilderten Masszahlen nicht hinreichend genau darstellen aus den Gründen, auf die im folgenden Abschnitt hingewiesen wird.

5.

Für einzelne Versicherungen (oder Generationen von gleichen Versicherungen) liefert die individuelle Risikotheorie wohl einfache brauchbare Masszahlen. Für die praktische Anwendung kommt aber der Behandlung von ganzen Beständen, die aus verschiedenen Versicherungen zusammengesetzt sind, weit grössere Bedeutung zu. Bei der Anwendung der individuellen Risikotheorie auf solche beliebige Bestände ergeben sich jedoch ernste Schwierigkeiten. Um diese anzudeuten, genügt es, einen Bestand von nur zwei stochastisch unabhängigen Versicherungen zu behandeln. Die Frequenzfunktion des Gesamtschadens lässt sich dann bestimmen aus den – im allgemeinen Fall

Tabelle 1

Jahres-belastung B in % der Risikoprämie	Relative Häufigkeit von Geschäftsjahren mit einer Jahresbelastung B, für einen Versicherungsbestand, aus dem 100 Versicherungsfälle pro Jahr zu erwarten sind	1000 Versicherungsfälle pro Jahr zu erwarten sind	10 000 Versicherungsfälle pro Jahr zu erwarten sind
	a) Alles gleich grosse Risikosummen		
%	%	%	%
0– 60	0		
61– 70	0,2		
71– 80	2,1	0	
81– 90	13,6	0,1	0
91–100	34,1 [1])	49,9	50
101–110	34,1 [1])	49,9	50
111–120	13,6 [2])	0,1	0
121–130	2,1 [2])	0	
131–140	0,2 [2])		
141 u. mehr	0		
	b) Ungleiche Risikosummen (Verteilung nach Beobachtungen bei der Rentenanstalt) Zahlen in ( ) bei einem Selbstbehalt von 50 000		
%	%	%	%
0– 60	1,3 (0,4)		
61– 70	4,7 (2,7)	0	
71– 80	12,8 (8,3)	0,2 (0)	
81– 90	19,8 (17,7)	8,5 (3,2)	0 (0)
91–100	17,6 (23,3)	43,3 (47,6)	50,6 (50,2)
101–110	14,4 (21,2)	37,8 (45,0)	49,4 (49,8)
111–120	10,3 (13,6)	8,9 (4,2)	0 (0)
121–130	7,5 (7,6)	1,3 (0)	
131–140	4,7 (3,3)	0	
141–150	2,9 (1,4)		
151 u. mehr	4,0 (0,5)		

[1]) 68,2% aller Geschäftsjahre bringen eine Belastung von 91 bis 110% der erwarteten.

[2]) Bei einer Prämie mit einem Sicherheitszuschlag von 10% sind von 100 Geschäftsergebnissen 15,9 verlustbringend.

ungleichen – Frequenzfunktionen für die einzelnen Versicherungen mit Hilfe des Faltungsintegrals

$$_{1,2}f(z) = \int {}_1f(z-z_2)\, {}_2f(z_2)\, dz_2 .$$

Analytisch bedeutet somit der Übergang von einzelnen Versicherungen auf einen grösseren Versicherungsbestand die Vornahme zahlreicher Faltungen dieser Art.

Es lässt sich allerdings zeigen, dass die ersten zwei (oder sogar drei) Momente der Frequenzfunktion des Bestandes durch einfache Summierung der entsprechenden Momente der Frequenzfunktionen für die einzelnen Versicherungen berechnet werden können. Ein so einfacher Zusammenhang besteht nicht für das absolute Moment. Daher ist die erste erwähnte Masszahl – das Durchschnittliche Risiko – für die Untersuchung von Versicherungsbeständen zum vornherein kaum brauchbar. Dagegen kann das Quadrat des mittleren Risikos für den Bestand gebildet werden als Summe der Quadrate der mittleren Risiken für jede einzelne Versicherung:

$$M^2_{a,\,b,\,c,\,\ldots} = M^2_a + M^2_b + M^2_c + \ldots .$$

In bezug auf die praktische Anwendung dieses Ergebnisses müssen aber zwei Vorbehalte angebracht werden.

1) Schon für einen verhältnismässig kleinen Versicherungsbestand verlangt die Bestimmung des mittleren Risikos für jede einzelne Versicherung eine mühsame, praktisch bald nicht mehr durchführbare Rechenarbeit, die sich zudem nicht lohnen würde.

2) Eine zweite tiefergehende Schwierigkeit liegt darin begründet, dass im allgemeinen die Kenntnis des 2. Momentes die Verteilung noch nicht hinreichend bestimmt. Dies wäre allerdings der Fall für die wohlbekannte Verteilung von *Gauss*. Aber erst unendlich viele Faltungen von beliebigen Verteilungen führen zur *Gauss*schen Verteilung. Das ist der Inhalt des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitstheorie, den Professor *Saxer* kürzlich in den «Elementen der Mathematik» erläutert hat. Durch diesen Grenzübergang würde allerdings die Aufgabe mathematisch übersichtlich, weil sich die Behandlung von der Masse der Einzelfälle löst. Aber gerade für diesen Extremfall verliert das Problem des Risikos seine praktische Bedeutung, weil im unendlich grossen Versicherungsbestand die relativen Abweichungen vom Erwartungswert verschwinden.

Leider liegen die tatsächlichen Versicherungsbestände von Gesellschaften oder Versicherungskassen recht fern von den beiden Extremlagen, die sich leicht auswerten lassen: einerseits von der einzelnen Versicherung; anderseits vom Bestand mit unendlich vielen Versicherungen. Will man aber das für den theoretischen Grenzfall ermittelte Ergebnis auf einen konkreten, nicht ausserordentlich grossen Bestand übertragen, so handelt es sich dabei stets um eine mehr oder weniger grobe Approximation, über deren Genauigkeit man gewöhnlich nicht genügende Anhaltspunkte besitzt.

6.

Es fehlt allerdings nicht an Versuchen, die angedeuteten Schwierigkeiten für die praktische Anwendung der individuellen Risikotheorie auf Versicherungsbestände zu überbrücken. Als Beispiel sei die Untersuchung von *Ammeter* über «das Zufallsrisiko bei kleinen Versicherungsbeständen» erwähnt. Er benützt nicht nur die beiden ersten, sondern auch höhere Momente zur Darstellung der Verteilung der finanziellen Ergebnisse kleiner Kassen mit Hilfe der *Bruns*schen Reihe. Ohne zum Grenzfall eines unendlich grossen Bestandes übergehen zu müssen, befreit er sich in dieser Weise vom Einzelfall. Bestehen bleibt aber – sogar in verstärktem Masse – der Nachteil, dass umfangreiche Berechnungen erforderlich sind.

III. Modell der kollektiven Risikotheorie

1.

Nachdem sich gezeigt hatte, dass der von der individuellen Risikotheorie eingeschlagene Weg nicht weiterführt, weil kein Übergang vom Einzelfall zum beliebig zusammengesetzten Versicherungsbestand gefunden werden kann, wurde versucht, die Schwankungen im Schadenverlauf eines Versicherungskollektivs unmittelbar als solche zu erfassen. Damit wird von vornherein der Anschluss an die praktische Fragestellung vollzogen.

Diese kollektive Risikotheorie lässt die Einzelrisiken eines Bestandes vollständig ausser acht. Sie betrachtet nur den Gesamtbestand; denn tatsächlich ist es nicht von Bedeutung, ob der eintretende Geschäftsverlust aus dieser oder jener, aus einer oder mehreren Versicherungen

stammt. Man darf also an einen Bestand denken, der Lebensversicherungen verschiedener Art, mit ganz verschiedenen Summen und verschieden altrigen Versicherten umfasst; ebensogut kann es sich um irgendeinen Bestand von Versicherungen eines anderen Zweiges oder sogar verschiedener Zweige handeln.

2.

Die kollektive Risikotheorie ist ziemlich jung. Immerhin ist eine erste Arbeit ihres Begründers, des Schweden *Filip Lundberg*, schon in den Berichten des VI. Internationalen Kongresses von 1909 erschienen. Aber erst vor etwa 20 Jahren veröffentlichte *Lundberg* in der Skandinavisk Aktuarietidskrift die grundlegende Arbeit «Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikenmasse». Andere Schweden haben den glücklichen Gedanken der neuen Risikotheorie weiter verfolgt, besonders erwähnt sei *Cramér*. *Segerdahl* hat das kollektive Modell auf die Theorie der stochastischen Prozesse zurückgeführt und eine strenge Beweisführung unter allgemeinen Voraussetzungen gegeben.

3.

Die Gedankengänge der kollektiven Risikotheorie lassen sich in vereinfachter Weise etwa folgendermassen wiedergeben:

Eine Gesellschaft trägt für ein beliebiges Zeitelement das Risiko – beispielsweise das Sterberisiko – aus irgendeinem Versicherungsbestand. Die unter Risiko stehende Summe betrage K_t. Nach den Rechnungsgrundlagen wird mit einer Schadenintensität μ_t gerechnet, die zustande kommt aus den Schadenintensitäten für die einzelnen Versicherungen. Für den ganzen Versicherungsbestand rechnet die Gesellschaft also mit einem Gesamtschaden von $K_t \mu_t \, dt$ im betreffenden Zeitelement. Anderseits erhält sie für den gleichen Bestand eine Risikoprämie $P(t) \, dt$. Nach dem Aequivalenzprinzip gilt für den Zeitabschnitt 0 bis a der Zusammenhang

$$\int_0^a P(t) \, dt = \int_0^a K_t \mu_t \, dt.$$

Lundberg, der Begründer der Theorie, hatte den glücklichen Gedanken, als massgebende Variable für die Darstellung der Vorgänge im Versicherungsbestand nicht – wie sonst üblich – die Zeit zu wählen, sondern die seit Beginn der Operation eingegangene Risikoprämie P.

Nach dieser Auffassung kann also nicht mehr nach der Gewinn-Wahrscheinlichkeit in der Zeit t gefragt werden, sondern nach der Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn in der Periode, während der insgesamt die Risikoprämiensumme P eingegangen ist. In diesem Sinne pflegt man geradezu von der Periode P zu sprechen, oder vom Elementarintervall dP, obschon es sich nur mittelbar um eine Zeit handelt.

Für den Aufbau seiner Theorie geht *Lundberg* von diesem Element dP aus, das er Risikoelement nennt. Man kann sich denken, dass dieses hervorgeht durch den Grenzübergang von kleinen Elementarabschnitten, die so gewählt sind, dass im einzelnen Abschnitt je entweder kein oder nur ein Schadenfall eintritt. Man hat es dann mit einer Folge von Alternativen zu tun, was die mathematische Erfassung vereinfacht.

Da man sich dabei von der Betrachtung einzelner Policen losgelöst hat und einfach einen irgendwie zusammengesetzten Versicherungsbestand ins Auge fasst, der sich ständig ändern kann durch Zu- und Abgänge, so darf man jede Elementar-Rechnung als von allen übrigen unabhängig ansehen.

Nun ist ein zweiter glücklicher Ansatz von *Lundberg* zu erwähnen: Er wählt als Einheit des Geldwertes, in dem die Versicherungsleistung zu zahlen ist, stets gerade den Durchschnittswert der Risikosummen. Dann bedeutet dP nicht nur die Prämieneinnahme im Risikoelement, sondern geradezu die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines Schadens im Risikoelement; und $(1-dP)$ ist die Gegenwahrscheinlichkeit, dass kein Schaden eintritt.

Wenn ein Schaden eintritt, so ist eine Risikosumme zu zahlen, die ausgedrückt ist in Vielfachen der mittleren Risikosumme. Diese Schadensumme kann verschieden gross sein; die Häufigkeit mit der eine bestimmte Summe z auftritt, sei festgelegt durch die Frequenzfunktion $s(z)$. Diese Frequenz bildet die Schadensummenverteilung. $s(z)\,dz$ kann auch aufgefasst werden als die Wahrscheinlichkeit, dass eine fällige Summe zwischen z und $z+dz$ liegt.

Wenn für das Risikoelement die Wahrscheinlichkeit dP bekannt ist, dass ein Versicherungsfall eintrifft, und zudem die Wahrscheinlichkeit $s(z)\,dz$, dass dieser Fall eine Schadensumme zwischen z und $z+dz$ auslöst, so können für das Risikoelement die Belastung und auch der Elementar-Gewinn bestimmt werden. Die Verteilung des Gesamtgewinnes für eine bestimmte Geschäftsdauer P lässt sich dann berechnen durch fortgesetzte Faltung der Elementarverteilung.

4.

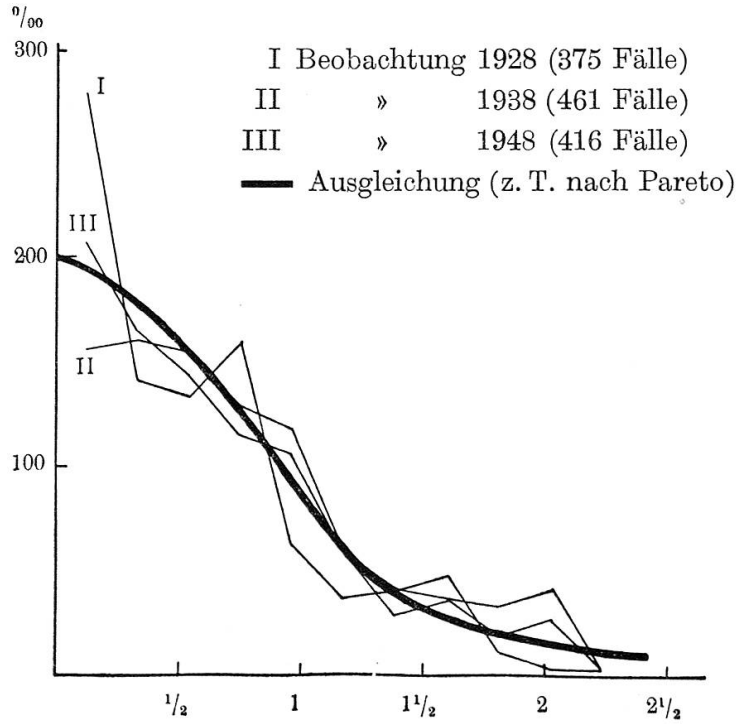
Die Integration über die Ergebnisse der Elementarvorgänge, die zahlreiche Faltungen verlangt, würde umständlich, wenn nicht die bequeme Hypothese benützt werden dürfte, dass trotz der Veränderungen des betrachteten Bestandes die Frequenzfunktion der Schäden $s(z)$ unverändert bleibt. Diese für die praktische Anwendbarkeit ausschlaggebende Hypothese scheint mit der Wirklichkeit – sogar für längere Zeitspannen – gut übereinzustimmen, wie praktische Nachprüfungen gezeigt haben.

Als Beispiel diene die Zeichnung 2, in der die Frequenzfunktionen der Schäden dargestellt sind, wie sie bei den Einzel-Kapitalversicherungen der Rentenanstalt in den Jahren 1928, 1938 und 1948 festgestellt wurden. Wenn man bedenkt, dass in den zwischenliegenden 20 Jahren der betrachtete Versicherungsbestand eine starke Umschichtung und eine

Zeichnung 2

Frequenzfunktion der Schadensumme

abgeleitet aus dem Bestand der grossen Einzel-Kapitalversicherungen bei der Rentenanstalt



Schadensumme in Vielfachen der mittleren Schadensumme des Beobachtungsjahres

Verdoppelung erfuhr, die Sterblichkeit zurückging, die durchschnittliche Versicherungssumme zunahm und das Deckungskapital für die Berechnung der Risikosumme auf andere Grundlagen umgestellt wurde, so muss die nahe Übereinstimmung der drei beobachteten Frequenzfunktionen der Schäden tatsächlich überraschen.

5.

Ein besonders wichtiger Umstand ist noch hervorzuheben. In der individuellen Risikotheorie wird die Wahrscheinlichkeit, dass gerade eine bestimmte Zahl von Schadenfällen eintritt, nur im Grenzfall eines Versicherungsbestandes mit unendlich vielen Versicherungen durch die wohlbekannte Verteilung von *Gauss* erfasst. Ganz anders liegen die Verhältnisse in der kollektiven Risikotheorie. Weil nicht auf die Zahl der Versicherungen abgestellt wird, sondern auf das Elementargeschäft dP, ist ein Grenzübergang für jeden beliebigen – auch schon für einen kleinen – Versicherungsbestand und für jede praktisch interessierende Geschäftsperiode P zulässig. Dieser Grenzübergang führt bei gleichgrossen Schadensummen ebenfalls zu einer wohlbekannten Verteilung mit besonders günstigen Eigenschaften, nämlich zu derjenigen von *Poisson*. Die Möglichkeit, diese ausführlich tabellierte Verteilungsfunktion bei der Untersuchung praktisch vorkommender Versicherungsbestände zu benützen, bringt bedeutsame Erleichterungen für die Auswertung.

6.

An einem einfachen Beispiel soll die praktische Anwendung der kollektiven Risikotheorie angedeutet werden. Für einen beliebigen Versicherungsbestand seien – bezogen auf eine Periode P – die beiden Frequenzfunktionen bekannt:

$w(n)$ = Wahrscheinlichkeit, dass n Schadenfälle eintreten,

$s(z)$ = Wahrscheinlichkeit, dass ein Fall die Schadensumme z auslöst.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass n Fälle einen Gesamtschaden z auslösen, erfasst durch die Funktion ${}^{(n)}s(z)$, die durch n-fache Faltung aus $s(z)$ hervorgeht. Die Frequenzfunktion der Belastung ist dann dargestellt durch

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w(n)\, {}^{(n)}s(z)\,.$$

Hier tritt eine ähnliche praktische Schwierigkeit auf, wie in der individuellen Risikotheorie, weil die Auswertung der Frequenzfunktion für die Schadenverteilung ${}^{(n)}s(z)$ die rechnerische Durchführung von n Faltungen erfordert, was bei einem grossen Versicherungsbestand zu einer riesigen Rechenarbeit führen müsste. Vermutlich könnte dieses Hindernis mit Hilfe der modernen Rechenmaschinen überwunden werden. Von verschiedenen Versuchen, diese Klippe mit mathematischen Mitteln zu bewältigen, scheint sich die von *Esscher* mit asymptotischen Funktionen ausgebildete Methode durchgesetzt zu haben. Es handelt sich allerdings um eine Approximation, die sich jedoch im Bereich der Spitzenrisiken, der für praktische Probleme bedeutsam ist, durch einen hohen Grad von Genauigkeit auszeichnet. Mit Hilfe dieser asymptotischen Approximation lässt sich die Frequenzfunktion der Belastung auswerten.

Das erste Moment der Belastungsverteilung

$$\int_0^\infty z\, b(z)\, dz = P$$

ist gleich der Risikoprämieneinnahme. Wie in der individuellen Risikotheorie bringt auch hier das erste Moment das Aequivalenzprinzip zum Ausdruck.

Die Verteilungsfunktion der Belastung kann unmittelbar als risikotheoretische Masszahl dienen. Beispielsweise lässt sich sogleich die Wahrscheinlichkeit angeben, dass die Belastung der Gesellschaft eine bestimmte Grenze K nicht übersteige:

$$B(K) = \int_0^K b(z)\, dz\,.$$

Setzt man $K = P$, der gesamten Einnahme an Risikoprämien in der Periode P gleich, so ist $B(P)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe aller Schäden die Einnahme an Risikoprämien nicht übersteigt. Ist S eine Sicherheitsreserve, die entweder von Anfang an vorhanden ist oder während der Periode durch die Sicherheitszuschläge eingenommen wird, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Mittel $S + P$ ausreichen $B(S + P)$; oder die Wahrscheinlichkeit, dass die Periode mit einem Verlust abschliesst, $1 - B(S + P)$; wobei offen bleibt, wann im Verlauf der Periode dieser Verlust entsteht. Umgekehrt lässt sich die Frage

beantworten, wie gross muss die Sicherheitsreserve sein, damit die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes kleiner ist als eine gewünschte Grösse: beispielsweise kleiner als 5 %, so dass auf 20 Jahre nicht mehr als ein Verlustjahr entfällt.

Im wesentlichen ist also der Geschäftsverlauf durch die Frequenzfunktion der Belastung $b(z)$ charakterisiert. Diese ist ohne Rücksicht auf die Bestandeszusammensetzung bestimmt durch nur zwei Bestandesmerkmale:

a) durch die gesamte Risikoprämie P, die bei der gewählten Geldeinheit identisch ist mit der Anzahl der zu erwartenden Versicherungsfälle und

b) durch die Frequenzfunktion der Schadensummen $s(z)$.

Stimmen zwei Bestände in diesen Merkmalen überein, so sind sie vom Standpunkt der kollektiven Risikotheorie gleichwertig.

Die zweite Hälfte des Zahlenbeispieles auf Tabelle 1 stützt sich auf die nach der erwähnten Methode von *Esscher* ausgewertete Belastungsverteilung. Dabei ist angenommen, dass die einzelnen Schadensummen oder Risikosummen nicht alle gleich gross sind, sondern einer Frequenzfunktion der Schäden entsprechen, die als Ausgleichung aus den Beobachtungen der Rentenanstalt unter Anwendung der Funktion von *Pareto* ermittelt und in Zeichnung 2 als ausgezogene Kurve eingetragen ist. Die Verlustfrequenz (oder Häufigkeit der Verlustjahre) fällt in diesem allgemeinen Fall *b)* asymmetrisch aus und zeigt deutlich eine breitere Streuung als im idealisierten Fall *a)*, wo alle Summen gleich sind. Die in Klammern beigefügten Zahlen der Tabelle 1 zeigen, wie die Streuung durch Rückversicherung der Spitzenrisiken verschmälert wird.

Untersuchungen über den Selbstbehalt nach der in dieser Hinsicht genaueren kollektiven Risikotheorie zeigen übrigens, dass bei Anwendung der individuellen Theorie die Stabilität des selbst behaltenen Versicherungsbestandes überschätzt wird.

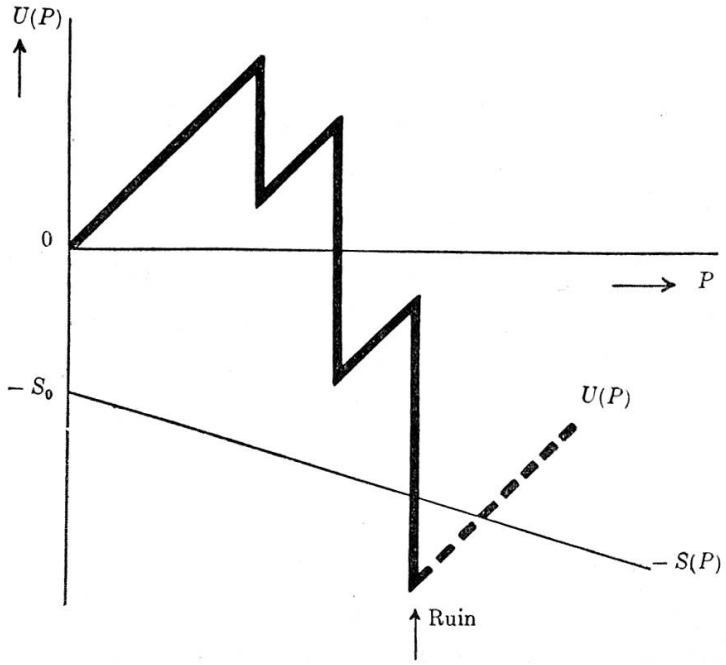
7.

Besonderes Interesse im Gebiet der kollektiven Risikotheorie hat das sogenannte *Ruinproblem* gefunden. Es kann durch die von *Cramér* benützte Zeichnung 3 charakterisiert werden.

Zeichnung 3

Schema eines stochastischen Prozesses

P = Risikoprämieneinnahmen
λP = Sicherheitszuschlag
S_0 = Anfängliche Sicherheitsreserve
$U(P)$ = Verlauf des Einnahmenüberschusses
$S(P) = S_0 + \lambda P$ = Sicherheitsreserve



Für irgendeinen Versicherungsbestand sei zu Beginn der Operation eine Sicherheitsreserve S_0 vorhanden. P sei die ausreichende Risikoprämie, die eingenommen wird. Daneben wird mit der Prämie ein Sicherheitszuschlag λP erhoben. Die aufgelaufene Risikoprämieneinnahme P dient in Zeichnung 3 als Abszisse. Als Ordinate wird der Stand der Einnahmenüberschüsse (ohne Sicherheits-Mittel) aufgetragen. Eine Zeitlang stellt sich kein Schaden ein; der Einnahmenüberschuss U steigt vom Nullpunkt als Gerade mit 45° an. Tritt ein Schadenfall ein, so fällt U senkrecht ab um die fällige Schadensumme, steigt dann wieder als Gerade mit 45° weiter an, und so fort. Wird U negativ, so bedeutet dies nicht den Ruin der Gesellschaft, denn diese verfügt noch über die Sicherheitsreserve, die durch die eingenommenen Sicherheitszuschläge linear angewachsen ist, wenn der Einfachheit halber von der Verzinsung abgesehen wird. Die kritische Grenze lässt sich also durch eine Gerade darstellen, die bei $-S_0$ beginnt und in der Periode P um λP sinkt. Fällt nun der Streckenzug U unter diese kritische Linie S,

dann ist die Gesellschaft zahlungsunfähig. Dabei kann man auch an die Möglichkeit denken, dass die Gesellschaft die peinliche Lage irgendwie überbrückt und U in der Folge wieder über die Grenzlinie S ansteigt. Aus diesem Schema lassen sich nun – je nach der Fragestellung – verschiedene Masszahlen ableiten: beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, dass der Ruin nie eintritt bis zu einem bestimmten Moment P (beispielsweise im Laufe von 10 Jahren).

In diesem Zusammenhang soll nicht dargestellt werden, wie die auftretenden Wahrscheinlichkeiten zu berechnen sind, die unmittelbar als Masszahl dienen zur Beurteilung der Stabilität eines Versicherungsbestandes unter Berücksichtigung der getroffenen Sicherheitsmassnahmen. Es sei etwa auf die im Anhang zitierte Abhandlung von *Cramér* verwiesen. Die Ableitungen sind vielleicht nicht besonders einfach, doch stehen die erforderlichen mathematischen Hilfsmittel zur Verfügung. Dabei leistet oft die *Laplace*-Transformation gute Dienste, über die Professor *Saxer* in Band 45 dieser Mitteilungen einen meisterhaften Überblick gegeben hat.

Die Zeichnung 3 gibt übrigens das typische Bild eines stochastischen Prozesses. Sie charakterisiert auch eine sprunghafte Bewegung, aus deren wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtung *Saxén* das Ruinproblem behandelt. Das gleiche Schema gilt für alle möglichen, grossen und kleinen, irgendwie zusammengesetzten Versicherungsbestände. Bei der Rückübertragung auf konkrete Fälle muss allerdings jeweilen die richtige Interpretation angewandt werden. Beispielsweise bedeutet die Strecke P (die Zeit, bis die Gesellschaft die Risikoprämie P eingenommen hat) bei einer grossen Gesellschaft vielleicht eine kurze Spanne von wenigen Monaten, bei einer kleinen Kasse unter Umständen eine Zeit von mehreren Jahren.

8.

Als theoretisches Ergebnis des Ruinproblems ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für den Ruin der Gesellschaft irgendwann in der Zukunft:

$$\psi(S_0) = (1 - \varepsilon)\, e^{-S_0 R},$$

wo ε eine sehr kleine Zahl bedeutet, die gewöhnlich vernachlässigt werden kann. Der Ausgleichskoeffizient R ist bestimmbar aus

$$1 + (1 + \lambda)\, R = \int e^{Rz}\, s(z)\, dz$$

und hängt also nur ab von der Frequenzfunktion der Schäden $s(z)$ und vom Sicherheitszuschlag λ. Für die Ruinwahrscheinlichkeit spielt dann noch die anfängliche Sicherheitsreserve S_0 eine Rolle.

Merkwürdig erscheint, dass die Ruinwahrscheinlichkeit nicht unmittelbar abhängig ist vom Umfange des Bestandes, sondern nur von der Risikostruktur und den Sicherheitsmitteln. Es ist aber zu beachten, dass die anfängliche Sicherheitsreserve in absolutem Betrag auftritt. Die Wahrscheinlichkeit $\psi(S_0)$ bei einer grossen und einer kleinen Kasse wäre also nur dann gleich, wenn die kleine Kasse in absolutem Betrag eine gleich grosse Sicherheitsreserve besässe wie die grosse.

9.

Die angedeuteten Ableitungen der kollektiven Risikotheorie stützen sich auf die Schadenwahrscheinlichkeiten. Für die Anwendung der Theorie ist es daher von entscheidender Bedeutung, ob im konkreten Fall überhaupt Wahrscheinlichkeiten vorliegen, die auf das klassische Urnenschema zurückzuführen sind.

In der Lebensversicherung dürfte dies annähernd der Fall sein. Bei anderen Versicherungsarten reicht jedoch das einfache Urnenschema nicht aus, beispielsweise für Unfall- oder Hagelversicherungen. Oft machen sich auch das Kumulrisiko oder die Wahrscheinlichkeitsansteckung störend geltend. Deswegen darf aber die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie – und damit der Risikotheorie – nicht einfach verworfen werden. Verschiedene Untersuchungen – erwähnt seien *Polya*, *Eggenberger*, *Ove Lundberg*, *Nolfi* und *Ammeter* – haben gezeigt, dass in solchen Fällen das Urnenschema in geeigneter Weise erweitert werden muss. In seiner Arbeit im Band 49 unserer Mitteilungen hat *Ammeter* gezeigt, dass an Stelle zufällig schwankender Grundwahrscheinlichkeiten auch mit festen Grundwahrscheinlichkeiten gerechnet werden kann, wenn zuerst eine mathematisch festgelegte Transformation der Schadenverteilung vorgenommen wird. Damit lässt sich die Risikotheorie auch auf den ganz allgemeinen Fall des erweiterten Urnenmodells für die Schadenwahrscheinlichkeiten anwenden.

IV. Zusammenfassung

Die am Anfang dieser Betrachtung aufgeworfenen Fragen lassen sich nun vielleicht durch folgende Feststellungen beantworten:

1.

Die Risikotheorie führt nicht zu einem neuen Aufbau der Versicherungsmathematik. Sie stellt vielmehr den Übergang von ihr zur Wirklichkeit her, indem sie das mathematische, starre Modell, das mit festen Durchschnittswerten rechnet, mit dem angemessenen Schwankungsbereich umgibt, der dem stochastischen Charakter der dargestellten Vorgänge gerecht wird.

2.

Die individuelle Risikotheorie ist wegen der Schwierigkeiten ihrer Übertragung auf allgemeine Versicherungsbestände und auch wegen der ihr innewohnenden ungenügenden Approximationen nur beschränkt brauchbar.

3.

Die kollektive Risikotheorie ist der individuellen inhaltlich und methodisch überlegen. Die praktische Auswertung der theoretischen Ergebnisse ist im allgemeinen einfach, weil sie nur die Kenntnis zweier Bestandesmerkmale verlangt, die meist leicht zu beschaffen sind. Die Urteile über die individuelle Risikotheorie dürfen daher nicht auf die kollektive übertragen werden.

4.

Die Fragen, die von der kollektiven Risikotheorie beantwortet werden können, wären für die Lebensversicherung – und in noch stärkerem Masse für alle anderen Versicherungszweige – wichtig; besonders wertvoll sind die Aufschlüsse über die notwendigen Sicherheitsvorkehrungen, die sich aus dem Modell der Versicherungsmathematik nicht ergeben.

5.

Die ziemlich junge kollektive Risikotheorie scheint in verschiedener Hinsicht noch weiterer Abklärung zu bedürfen. Die meisten bekanntgewordenen Abhandlungen über diese Theorie begnügen sich mit formalen Resultaten. Anwendungen auf bestimmte Fragen und Fälle sind bisher wenig untersucht worden. Studien in dieser Richtung könnten zu Ergebnissen von willkommener praktischer Bedeutung führen.

Hinweise auf Literatur über Risikotheorie

a) Berichte der Internationalen Kongresse der Versicherungsmathematiker

VI. Kongress, Wien 1909: Thema IV

IX. Kongress, Stockholm 1930: Thema D

XII. Kongress, Luzern 1940: Thema I

b) Individuelle Risikotheorie

P. Laplace: Théorie analytique des probabilités (Paris 1812).

P. Radtke: Die Stabilität der Lebensversicherungsanstalten (Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft, Band 3, 1903).

A. Tauber: Bedenken gegen das Aequivalenzprinzip in der Risikotheorie (Das Versicherungsarchiv 1933/34).

F. Boehm: Über die Entwicklung und den gegenwärtigen Stand der Risikotheorie (Das Versicherungsarchiv 1933/34).

A. Berger: Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik (Band II).

M. Gürtler: Das Risiko des Zufalles im Versicherungsbetrieb (Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft, Band 29, 1929).

c) Kollektive Risikotheorie

F. Lundberg: Über die Theorie der Rückversicherung (Kongressberichte 1909).

— Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikenmasse (SAT 1930).

— Some supplementary researches on the collective risk theory (SAT 1932).

— On the numerical application of the collective risk theory (De Förenade-Festskrift, Stockholm 1934).

— Försäkrings matematiska studier tillägnade Filip Lundberg (Stockholm 1946).

I. Laurin: An introduction into Lundberg's theory of risk (SAT 1930).

H. Cramér: On the mathematical theory of risk (Skandia-Festskrift, Stockholm 1930).

C.-O. Segerdahl: On homogeneous random processes and collective risk theory (Uppsala 1939).

— Über einige risikotheoretische Fragestellungen (SAT 1942).

— Some properties of the ruin function in the collective theory of risk (SAT 1948).

F. Esscher: On the probability function in the collective theory of risk (SAT 1932).

C. Boehm: Versuch einer systematischen Darstellung der modernen Risikotheorie (Blätter für Versicherungsmathematik, Band 3, 1934/36).

S. Täcklind: Sur le risque de ruine dans des jeux inéquitables (SAT 1942).

K. Hultmann: Einige numerische Untersuchungen auf Grund der kollektiven Risikotheorie (SAT 1942).

T. Pentikäinen: Einige numerische Untersuchungen über das risikotheoretische Verhalten von Sterbekassen (SAT 1947).

T. Saxén: On the probability of ruin in the collective risk theory for insurance enterprises with only negative risk sums (SAT 1948).

— Sur les mouvements aléatoires et le problème de ruine de la théorie de risque collective (Helsingfors 1951).

G. Arfwedson: Some problems in the collective theory of risk (SAT 1950).

P. Nolfi: Die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen und ihre wahrscheinlichkeitstheoretische Erfassung (Kongressberichte 1940).

O. Lundberg: On random processes and their application to sickness an accident statistics (Uppsala 1940).

H. Ammeter: Das Maximum des Selbstbehaltes in der Lebensversicherung unter Berücksichtigung der Rückversicherungskosten (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker 1946).

— A generalisation of the collective theory of risk in regard to fluctuating basic-probabilities (SAT 1948).

— Die Elemente der kollektiven Risikotheorie von festen und zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker 1949).

J. Dubourdieu: Théorie mathématique du risque dans les assurances de répartition (Paris 1952).

(SAT = Skandinavisk Aktuarietidskrift)