Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 53 (1953)

Artikel: Beitrag zur technischen Behandlung anormaler Risiken in der Lebensversicherung

Autor: Jecklin, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-550946

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Beitrag zur technischen Behandlung anormaler Risiken in der Lebensversicherung

Von *H. Jecklin*, Zürich

Soweit in der Lebensversicherung anormale Risiken versichert werden, hat die Methode der konstanten multiplikativen Übersterblichkeit grosse Verbreitung gefunden. Es wird dabei die erwartungsmässige Übersterblichkeit in Prozenten der erwartungsmässigen Sterblichkeit normaler Risiken gleichen Alters ausgedrückt, wobei von der Annahme ausgegangen wird, dass der Prozentsatz der Übersterblichkeit während der ganzen Versicherungsdauer konstant bleibe. Die technische Durchführung gestaltet sich recht einfach und erlaubt zudem eine Reihe für die Praxis nützlicher Approximationen. Sei z. B. der Übersterblichkeitssatz α, dann gilt für die zu einer gemischten Versicherung zu erhebende jährliche Extraprämie [1]

$$Z \sim \alpha\left(\frac{1}{a_{xx\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{x\overline{n}|}}\right) \sim \alpha\left(\frac{1}{a_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}\right) \sim \alpha\left(\frac{1}{e_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{n}\right)(1 + 0{,}25\, in)\,. \quad \text{I}$$

Die erwartungsmässige mittlere Übersterblichkeit wird auf Basis bestehender, fortlaufend kontrollierter Statistiken festgesetzt. Für die starke Verbreitung der Methode in der Praxis dürfte wohl die Einfachheit der Handhabung weitgehend massgeblich sein, und man darf sagen, dass sie sich im grossen und ganzen für Versicherte sowohl wie für Versicherer bewährt hat.

Immerhin ist darauf hinzuweisen, dass diese Methode, welche die Übersterblichkeit mit einem einzigen Parameter charakterisiert, dem wirklichen Sachverhalt insofern nicht entspricht, als bei den meisten Erschwerungsgründen die effektive Übersterblichkeit gegenüber der normalen Sterblichkeit nicht während der ganzen Versicherungsdauer konstant-prozentual erhöht ist. Oft z. B. wird der Sterblichkeitsverlauf des anormalen Risikos mit einem konstanten additiven Zuschlag besser erfasst als mit einer konstanten multiplikativen Erhöhung.

Im allgemeinen aber dürften die anormalen Risiken einen Sterblichkeitsverlauf zeigen, dessen Abweichung von jenem der normalen Risiken mit nur einem einzigen Parameter nicht erfasst werden kann, und zwar wird dieser Verlauf sehr verschieden sein, je nach Erschwerungsgrund. Zwecks Studium dieser Frage wurden bei der Schweizerischen Rückversicherungsgesellschaft auf Basis umfangreichen statistischen Materials anormaler Risiken spezielle Sterbetafeln für Gesamtheiten bestimmter Erschwerungsgründe aufgestellt (Schlussalter 70 Jahre). Dabei ergab sich jeweils ein ganz charakteristisch von der Normaltafel abweichender Verlauf, wofür nur drei Beispiele genannt seien. Die Tafel der Herzkrankheiten (alle Anomalien des Blutzirkulationssystems inklusive alle Hypertensionen von $\geqslant 150$ mm systolisch und $\geqslant 95$ mm diastolisch) zeigt eine anfänglich sehr hohe Übersterblichkeit von ca. 200 % bei $x = 25$, welche aber rasch absinkt auf ca. 50 % bei $x = 30$, um dann stetig anzusteigen bis ca. 100 % bei $x = 60$. Bei der Lungentafel (alle Krankheiten der Atmungsorgane, inklusive Tuberkulose derselben) zeigt sich eine hohe Übersterblichkeit von über 100 % in jungen Jahren, welche abklingt auf etwa 40 % bei $x = 40$, um dann stetig wieder anzusteigen bis zur ursprünglichen Höhe. Wieder ein anderes Bild bietet die Tafel der Tuberkulose (alle Organe, inklusive Atmungsorgane) mit anfänglichem starkem Ansteigen der Übersterblichkeit bis zu einem Maximum von ca. 160 % bei $x = 30$, dann Abfall bis auf ca. 50 % bei $x = 35$, Anstieg zu nochmaligem kleinerem Maximum von ca. 75 % bei $x = 40$, wieder Rückgang bis ca. 50 % bei $x = 50$, um dann endgültig stark anzusteigen bis etwa zur Höhe des ersten Maximums. – Solche Sterbetafeln für Gesamtheiten bestimmter Erschwerungsgründe sind natürlich nicht zu verwechseln mit Sterbetafeln nach Todesursachen, wie sie z. B. vom Eidgenössischen Statistischen Amt für die schweizerische Bevölkerung publiziert werden. Letztere geben für irgendeine Person die jährliche Wahrscheinlichkeit, zufolge einer bestimmten Todesursache zu sterben, während die ersteren für eine Person, die einer Gesamtheit mit bestimmtem Erschwerungsgrund zugewiesen ist, die jährliche Wahrscheinlichkeit angeben, aus irgendeiner Ursache zu sterben. Inwiefern die oft als Arbeitshypothese gemachte Annahme, dass ein einmal charakterisiertes Risiko an der seiner Charakteristik entsprechenden Todesursache sterben werde, zutreffend ist, wird hier gar nicht zur Diskussion gestellt und könnte nur durch Untersuchungen

über Korrelation zwischen Erschwerungsgrund und Todesursache geklärt werden.

Man wird sich hüten müssen, aus einer Tafel für bestimmten Erschwerungsgrund zuviel herauslesen zu wollen; je nach Materialzusammensetzung und Therapie wird sich das Bild ändern. Soviel ist aber aus dem effektiven Sterblichkeitsverlauf bei Gesamtheiten bestimmter Erschwerungsgründe zumindest ersichtlich, dass es sich bei der Methode der konstanten multiplikativen Übersterblichkeit um eine Mittelbildung in der Sterblichkeitserhöhung handelt. Eine solche Durchschnittsbildung kann jedoch von einem in der Materie wenig oder gar nicht bewanderten Tarifikator unmöglich richtig abgeschätzt werden, es bedarf dazu ausgedehnter, gewissenhaft bearbeiteter statistischer Grundlagen und praktischer Erfahrung. A priori mag es zwar einfacher scheinen, die Technik der anormalen Risiken mit Sterbetafeln bestimmter Erschwerungsgründe durchzuführen. Die Notwendigkeit einfacher Praxisgestaltung verbietet aber von selbst die Verwendung einer Vielzahl verschiedener Rechnungsgrundlagen, weshalb man im allgemeinen mit einigen wenigen typischen Tafeln auszukommen sucht. In der nordischen Assekuranz wurde dieser Weg beschritten. So schildert z. B. Moltke [2] in den Berichten des XI. internationalen Aktuarkongresses das von der Versicherungsgesellschaft «Dana» in Kopenhagen angewendete Verfahren. Die Risiken werden nach der primären Minderwertigkeitsursache gruppiert, wobei insgesamt 144 verschiedene Ursachen in Frage kommen, welche aber der Übersicht wegen in 15 Hauptgruppen aufgeteilt werden. Für diese Gruppen werden 7 Sterbetafeln verwendet (Tuberkulosetafel T, Herztafel H, Albuminurietafel A, Kleine Tuberkulosetafel T_1, Kleine Herztafel H_1, Minimaltafel M, Kleine Minimaltafel M_1), welche mit der Normaltafel N, gegeben durch $\mu_x = \alpha_0 + \beta c^x$, in dem aus nachgenanntem Schema ersichtlichen Zusammenhang stehen ($\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$).

α	x	$x+5$	$x+7$	$x+14$	$x+15$
α_0	N	—	H_1	—	H
α_1	M_1	M	—	—	—
α_2	—	T_1	—	A	—
α_3	—	T	—	—	—

Für jedes Risiko wird jene Sterbetafel verwendet, welche sich nach statistischer Erfahrung der Sterblichkeitskurve des betreffenden Erschwerungsgrundes am besten anpasst. Durch Alterserhöhung oder Verminderung im einzelnen Fall kann die individuelle Anpassung in der Praxis noch verbessert werden. Doch kann dies nicht über die Tatsache hinwegtäuschen, dass eigentlich nur drei verschiedene Anormalentafeln vorliegen (entsprechend der geänderten Konstanten α) und dass alle weiteren Anpassungen allein auf Altersänderung beruhen. In dieser einfachen Konzeption ist jedoch unseres Erachtens diese Methode viel unbeweglicher als das Verfahren der konstanten multiplikativen Übersterblichkeit, wo ja – insbesondere bei Verwendung von Approximationsformeln – der Übersterblichkeitssatz beliebig variiert werden kann.

Es fehlt nicht an Versuchen, die Erfassung der effektiven Übersterblichkeit anormaler Risiken für die Praxis dynamisch zu gestalten, ohne mit einer Vielfalt von Grundlagen arbeiten zu müssen. Ganz unlängst hat B. de Finetti eine neue bezügliche Lösung in Vorschlag gebracht [3]. Für jedes Risiko soll die Sterbensintensität sich geben lassen durch einen Ausdruck von der Form $\mu(t) = A + Be^{\lambda t}$, wobei t die seit Versicherungsbeginn abgelaufene Zeit bedeutet. Es ist also insbesondere $\mu(o) = A + B$, d. h. die Sterbensintensität bei Versicherungsbeginn setzt sich einfach additiv zusammen aus den beiden Konstanten A und B. Für den Parameter λ wird 0,1 angesetzt, was den meisten gebräuchlichen Sterbetafeln genähert entsprechen dürfte. Die Aufgabe des Tarifikators würde also lediglich darin bestehen, die Grösse der beiden Komponenten der anfänglichen Sterbensintensität eines Risikos abzuschätzen. – Sei die Sterbensintensität der Normaltafel $\mu_x = \alpha + \beta \cdot e^{\lambda x}$, dann ist offenbar für den Fall konstanter multiplikativer Übersterblichkeit

$$A = (1 + k)\alpha, \quad B = (1 + k)(\mu_x - \alpha),$$

und bei konstanter additiver Übersterblichkeit

$$A = \alpha + h\mu_x, \quad B = \mu_x - \alpha.$$

Nun ist es ein leichtes, alle möglichen linearen Kombinationen zwischen diesen beiden Fällen zu bilden, also

$$A = (1 + k)\alpha + h\mu_x, \quad B = (1 + k)(\mu_x - \alpha).$$

Hierin ist als Spezialfall auch die reine Alterserhöhung enthalten. Setzt man nämlich

$$k = e^{\lambda\Delta} - 1 \quad \text{und} \quad h = -\frac{\alpha}{\mu_x}(e^{\lambda\Delta} - 1),$$

so resultiert

$$A = \alpha, \quad B = e^{\lambda\Delta}(\mu_x - \alpha) = \mu_{x+\Delta} - \alpha.$$

Nach de Finetti hat man sich nun eine Bezugstafel zu denken

$$l(t) = e^{-At}\, e^{-\frac{B}{\lambda}(e^{\lambda t}-1)}, \quad \text{wo} \quad l(o) = 1,$$

entsprechend der Integration von

$$-\frac{dl(t)}{l(t)\cdot dt} = \mu(t) = A + B\, e^{\lambda t}.$$

Es liegt sodann eine zweidimensionale Tabelle vor, nach den Argumenten

$$\xi = \frac{1}{\lambda}(A + \delta) = 10(A + \delta), \; \eta = \frac{B}{\lambda} = 10B, \; (\delta = \text{Zinsintensität})$$

aus welcher die Barwerte der lebenslänglichen Leibrente

$$\mathrm{a}(\xi,\eta) = \bar{\mathrm{a}}(\xi,\eta) - \left[\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{12}(\xi + \eta)\right]$$

sowie deren reziproke Werte abgelesen, resp. interpoliert werden können. Für die Berechnung der Tabelle hat man sich auf die Darstellung der Leibrente mittels der unvollständigen Gammafunktion gestützt. Die Berechnung der temporären Leibrente mit Dauer n erfolgt durch Differenzbildung zwischen sofort beginnender und aufgeschobener lebenslänglicher Rente. Die für die Bestimmung der aufgeschobenen Leibrente ihrerseits benötigte Erlebensfalleinmaleinlage kann als Produkt der Werte zweier weiterer Tabellen (die eine mit den Argumenten n,ξ, die andere mit den Argumenten n,η) dargestellt werden. Nach seiner ganzen Konzeption erinnert das Verfahren von de Finetti an eine seinerzeit in vorliegender Zeitschrift erschienene Arbeit von W. Thalmann [4].

Die von de Finetti ausgearbeitete und publizierte Methode ist in theoretischer Hinsicht zweifellos sehr interessant. Für die Praxis scheint es aber doch wünschbar, mit einfacheren Mitteln auszukommen,

dies um so mehr, als das Verfahren ja nur anwendbar ist, wenn die Übersterblichkeit, gemessen an der Sterblichkeit der Normaltafel, für die ganze Dauer monoton verläuft, was bei weitem nicht bei allen Erschwerungsgründen supponiert werden kann. In der Tat lässt sich dem Problem, wie wir zeigen werden, mit einfachen Approximationen beikommen, welche im Rahmen der Unsicherheit, die der Bewertung anormaler Risiken ohnehin anhaftet, durchaus ausreichend sind.

Wir gehen davon aus, dass die Sterbenswahrscheinlichkeiten der Normaltafel durch die exponentielle Form

$$q_x = a + b c^x \qquad \text{II}$$

dargestellt seien. Dies wird zwar im allgemeinen nicht der Fall sein. Es lässt sich aber sehr einfach zur benützten Normaltafel eine derart gebaute Hilfstafel konstruieren, indem man aus den Sterbenswahrscheinlichkeiten der Normaltafel (die jetzt mit q'_x bezeichnet seien) die Konstanten a, b, c nach dem im Lehrbuch von Landré [5] erwähnten Verfahren bestimmt. Für die Hilfstafel beschränkt man sich mit Vorteil auf ein Intervall von etwa $20 \leqslant x \leqslant 75$. Man hat dann

$$\sum_0^{17} q'_{20+t} = A, \qquad \sum_0^{17} q'_{38+t} = B, \qquad \sum_0^{17} q'_{56+t} = C.$$

Nunmehr soll gemäss Voraussetzung gelten

$$18a + b c^{20} \frac{c^{18} - 1}{c - 1} = A,$$

$$18a + b c^{38} \frac{c^{18} - 1}{c - 1} = B,$$

$$18a + b c^{56} \frac{c^{18} - 1}{c - 1} = C,$$

woraus folgt

$$\frac{C - 18a}{B - 18a} = \frac{B - 18a}{A - 18a} = c^{18},$$

$$18a = \frac{AC - B}{A + C - 2B} \quad \text{und} \quad c^{18} = \frac{C - B}{B - A},$$

womit auch b aus den Ausgangsgleichungen bestimmt werden kann.

Die Aufstellung der Hilfstafel ist somit eine sehr einfache Arbeit. – Für die Sterbetafel S. M. 1939/44 existiert bereits für $x \geqslant 35$ eine vom Eidgenössischen Statistischen Amt [6] durchgeführte Makeham-Ausgleichung der q_x mit den Konstanten $a = 0{,}810008\,^0/_{00}$, $b = 0{,}105148\,^0/_{00}$, $c = 1{,}093543226$. Die Tafel ist in Tabelle I des Anhanges zu dieser Arbeit abgedruckt, rückwärts verlängert bis $x = 20$. Es ist klar, dass man dem effektiven Sterblichkeitsverlauf für $x < 35$ mit dieser Ausgleichung nicht gerecht werden kann; es handelt sich jedoch um eine Hilfstafel, welche keinesfalls zur Berechnung normaler Tarifprämiensätze dienen soll.

Nunmehr macht man die weitere Annahme, dass der Sterblichkeitsverlauf der anormalen Risiken durch Variation der Konstanten in II erfasst werden könne. Dabei kann man unbedenklich die Konstante c unverändert beibehalten, indem deren Wert bei allen modernen Tafeln $\sim 1{,}1$ ist. Wir haben somit

für normale Risiken $\quad q_x = a + bc^x,$

für anormale Risiken $\quad \bar{q}_x = \bar{a} + \bar{b}c^x,$

oder auch $\quad \bar{q}_x = (1+\alpha)\,a + (1+\gamma)\,bc^x.$

Setzen wir $\alpha a = a'$ und $(1+\gamma) = c^m$, wobei $m = \lg(1+\gamma)/\lg c$, so ist ersichtlich, dass die Änderung der Konstanten a und b sich stets durch eine konstante additive Sterblichkeitserhöhung plus eine Alterserhöhung in der Normaltafel ausdrücken lässt. Als wichtige Sonderfälle haben wir

1.) $\gamma = \alpha, \quad \bar{q}_x = (1+\alpha)\,q_x,$ III
d. h. konstante multiplikative Sterblichkeitserhöhung;

2.) $\alpha = 0, \quad \bar{q}_x = a + (1+\gamma)\,bc^x = a + bc^{x+m} = q_{x+m},$ IV
d. h. Alterserhöhung;

3.) $\gamma = 0, \quad \bar{q}_x = (1+\alpha)\,a + bc^x = a + a' + bc^x = q_x + a',$ V
d. h. konstante additive Sterblichkeitserhöhung.

Zerlegen wir das normale q_x in die beiden Komponenten a und bc^x und bilden ausser der üblichen Ausscheideordnung

$$l_{x+1} = l_x(1 - q_x) \qquad \text{VI}$$

noch die beiden Tafeln

$$l'_{x+1} = l'_x(1-a) \qquad \text{VII}$$

und

$$l''_{x+1} = l''_x(1-bc^x), \qquad \text{VIII}$$

so muss nach der vom Verfasser publizierten algebraischen Approximationstheorie [7] innerhalb gewisser Grenzen (ca. $20 \leqslant x \leqslant 75$) die folgende Näherungsformel Lidstonescher Art gelten:

$$\frac{1}{e_{x\overline{n}|}} + \frac{1}{n} \sim \frac{1}{e'_{x\overline{n}|}} + \frac{1}{e''_{x\overline{n}|}}, \qquad \text{IX}$$

wobei $e_{x\overline{n}|} = \frac{1}{l_x} \sum_0^{n-1} l_{x+t}$, und analog für $e'_{x\overline{n}|}$ und $e''_{x\overline{n}|}$. Es ist aber offenbar, ganz unabhängig von x,

$$e'_{x\overline{n}|} = \frac{1-(1-a)^n}{a}. \qquad \text{X}$$

Die der Hilfstafel S. M. 39/44 entsprechende Tafel der l''_x (mit $b = 0{,}105148\ ^0/_{00}$, $c = 1{,}093543226$) findet sich in Tabelle I des Anhanges, neben der Hilfstafel der l_x. Tabelle II des Anhanges, gerechnet nach eben genannten Grundlagen, mag die Güte der Approximation IX veranschaulichen. Für praktische Rechnungen ist also eine Tafel der l''_x überflüssig, denn es gilt ja

$$\frac{1}{e''_{x\overline{n}|}} \sim \frac{1}{e_{x\overline{n}|}} + \frac{1}{n} - \frac{a}{1-(1-a)^n}.$$

Nunmehr wenden wir die Idee genannter Zerlegung der Sterbenswahrscheinlichkeit an auf die Versicherung anormaler Risiken. Betrachten wir vorerst lediglich den Fall der konstanten additiven Übersterblichkeit. Es ist

$$q_x = q_x + a'$$

und es muss in Analogie zu vorherigen Überlegungen gelten

$$\frac{1}{\bar{e}_{x\overline{n}|}} + \frac{1}{n} \sim \frac{a'}{1-(1-a')^n} + \frac{1}{e_{x\overline{n}|}}, \qquad \text{XI}$$

wobei

$$\bar{l}_{x+1} = \bar{l}_x(1-\bar{q}_x), \qquad \bar{e}_{x\overline{n}|} = \frac{1}{\bar{l}_x} \sum_0^{n-1} \bar{l}_{x+t}.$$

In Tabelle III des Anhanges finden sich eine Anzahl numerischer Beispiele für $a' = 5\,{}^0/_{00}$, welche die Güte der Approximation XI demonstrieren. Es ergibt sich also im zinsfreien System für die jährliche Extraprämie zur gemischten Versicherung bei konstanter additiver Übersterblichkeit die (vom Alter unabhängige) Näherungsformel

$$Z_0 = \frac{1}{\bar{e}_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{e_{x\overline{n}|}} \sim \frac{a'}{1-(1-a')^n} - \frac{1}{n}. \qquad \text{XII}$$

Die Berücksichtigung des Zinseinflusses kann, wie andernorts gezeigt [1], einfach durch Multiplikation mit dem Faktor $(1 + 0{,}25\,in)$ erfolgen, so dass wir als erste Approximation der Extraprämie zur gemischten Versicherung haben

$$Z \sim \left(\frac{a'}{1-(1-a')^n} - \frac{1}{n}\right)(1 + 0{,}25\,in). \qquad \text{XIII}$$

Hierin wird der erste Klammerausdruck stets von der Grössenordnung $0{,}5\,a'$ sein. Denn wenn man die normale Sterblichkeit gleich null setzt, dann ist im zinsfreien System das Risikokapital im Mittel $500\,{}^0/_{00}$. Bei Sterblichkeit null, aber $i > 0$, ist das Risikokapital für $t = \frac{n}{2}$ gleich $\frac{\mathsf{a}_{\overline{n/2}|}}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}}$, und da $\frac{1}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}} \sim \frac{1}{n} + 0{,}5\,i$, ist

$$\frac{\mathsf{a}_{\overline{n/2}|}}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}} \sim \frac{2+in}{4+in} = \frac{1}{2} + i\frac{n}{8} - i\frac{n}{32} + \ldots \sim \frac{1}{2}(1 + 0{,}25\,in),$$

d. h. der Zinseinfluss allein ist $\sim (1 + 0{,}25\,in)$. Wir haben somit als weitere Näherungsformel

$$Z \sim 0{,}5\,a'(1 + 0{,}25\,in). \qquad \text{XIV}$$

Zu einer anderen, vom Alter abhängigen Approximationsformel gelangt man auf Grund folgender Überlegungen. Bei kontinuierlicher Methode hat man für den Rentenbarwert bekanntlich die Darstellung

$$\bar{\mathsf{a}}_{x\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\int_0^t (\mu_{x+s}+\delta)\,ds}\,dt.$$

Wenn hier im Klammerausdruck eine konstante Grösse additiv hinzugefügt wird, so kann dies entweder als Sterblichkeitserhöhung oder als Erhöhung des Zinssatzes interpretiert werden; im Rentenwert ist

die Wirkung die gleiche und die Ursache nicht erkennbar. Es ist zu erwarten, dass es auch bei diskontinuierlicher Methode keinen grossen Unterschied ausmacht, wenn man bei Bestimmung der temporären Leibrente statt mit einer um a' erhöhten Sterbenswahrscheinlichkeit mit einem um a' erhöhten technischen Zinssatz rechnet. Daraus folgt

$$Z \sim \left(\frac{1}{\mathsf{a}'_{x\overline{n}|}} - d\right) - \left(\frac{1}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}} - d\right) = \frac{1}{\mathsf{a}'_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}}, \qquad \text{XV}$$

wobei $\mathsf{a}_{x\overline{n}|}$ mit der Normaltafel und Zins i gerechnet ist, $\mathsf{a}'_{x\overline{n}|}$ ebenfalls mit der Normaltafel, aber mit Zins $i + a'$. (Der Diskontfaktor d bleibt natürlich unverändert.) Nach dieser Näherung XV muss die Extraprämie etwas zu klein ausfallen. Denn es ist

$$D'_{x+1} = D'_x(1 - q_x)\left(1 - \frac{i + a'}{1 + i + a'}\right),$$

d. h. es wirkt die Zinserhöhung um a' nur in der Höhe von

$$\frac{i + a'}{1 + i + a'} - \frac{i}{1 + i} < a'$$

als Ausscheideursache. Wir erhalten deshalb eine Verbesserung von XV, wenn wir setzen

$$Z \sim \left(\frac{1}{\mathsf{a}'_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}}\right) f \qquad \text{XVI}$$

mit

$$f = \frac{a'}{d' - d}, \quad d' = \frac{i'}{1 + i'}, \quad i' = i + a'.$$

Tabelle IV des Anhanges zeigt, wie der Faktor f sich mit Variation von i und a' ändert, und es ist dort auch ersichtlich, dass man bei nicht zu grossem a' unbedenklich setzen kann $f \sim (1 + 2i)$, so dass wir haben

$$Z \sim \left(\frac{1}{\mathsf{a}'_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}}\right)(1 + 2i). \qquad \text{XVII}$$

In Anwendung der bekannten Näherung

$$\frac{1}{\mathsf{a}'_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}} \sim \frac{1}{\mathsf{a}'_{\overline{n}|}} - \frac{1}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}}$$

erhalten wir noch folgende altersunabhängige Approximation

$$Z \sim \left(\frac{1}{\mathsf{a}'_{\overline{n}|}} - \frac{1}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}}\right)(1 + 2i). \qquad \text{XVIII}$$

Soweit bei praktischen Rechnungen nach den Formeln XVI–XVIII die Grösse $i + a'$ nicht einem üblichen und damit tabellierten Zinssatz entspricht, kann unbedenklich linear interpoliert werden, wie dies aus den Beispielen der Tabelle VI des Anhanges hervorgeht. Die genauen Z-Werte dieser Tabelle wurden seinerzeit von Zwingli [9] publiziert. In Tabelle V des Anhanges sind sodann eine Anzahl von nach den verschiedenen vorgenannten Näherungen erhaltene Resultate zusammengestellt. Die vergleichsweise beigegebenen genauen Z-Werte sind einer Arbeit von Neuhaus entnommen [8].

Nunmehr ist das Problem einer Änderung der beiden Konstanten a und b in

$$q_x = a + b c^x \qquad \text{leicht zu lösen.}$$

Sei

$$\bar{q}_x = \bar{a} + \bar{b} c^x$$

so ist

$$\bar{a} - a = a', \qquad \bar{b}/b = b' = c^m, \qquad m = \lg b'/\lg c. \qquad \text{XIX}$$

Da für die rechnerische Alterserhöhung m der nächste ganzzahlige Wert des genauen m zu nehmen ist, kann man generell die Annahme $c \sim 1{,}1$, $\frac{1}{\lg c} \sim 25$ treffen. Mithin ist die jährliche Nettoprämie der gemischten Versicherung des anormalen Risikos

$$\bar{P}_{x\overline{n}|} \sim P_{x+m,\overline{n}|} + Z(a'), \qquad \text{XX}$$

wobei $m = 25 \cdot \lg b'$ und $Z(a')$ nach einer der Formeln XIII–XVIII zu rechnen ist. Die gesamte Extraprämie bei gemischter Versicherung ist demnach

$$Z = \bar{P}_{x\overline{n}|} - P_{x\overline{n}|}. \qquad \text{XXI}$$

Um die Extraprämie zu einer jährlichen Prämie $T_{x\overline{n}|}$ der Terme-fixe-Versicherung zu erhalten, ist einfach Z mit v^n zu multiplizieren, denn es ist

$$Z \cdot v^n = v^n(\bar{P}_{x\overline{n}|} - P_{x\overline{n}|}) = \frac{v^n}{\bar{\mathsf{a}}_{x\overline{n}|}} - \frac{v^n}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}} = \bar{T}_{x\overline{n}|} - T_{x\overline{n}|},$$

und da bekanntlich

$$\frac{P_{x\overline{n}|} - T_{x\overline{n}|}}{d} = \frac{\mathsf{a}_{\overline{n}|} - \mathsf{a}_{x\overline{n}|}}{\mathsf{a}_{x\overline{n}|}},$$

ist

$$\frac{1}{d}(Z - v^n \cdot Z) = Z \cdot \mathsf{a}_{\overline{n}|}$$

die jährliche Extraprämie für Sterberente (Überlebenszeitrente).

Statt die beiden Konstanten a und b frei zu wählen, kann man auch für zwei Positionen die Werte von $\bar{q}_x$ vorschreiben, womit die Parameter a und b festgelegt sind. Insbesondere ist der Fall leicht zu erledigen, dass die Übersterblichkeit von einem bestimmten Satz bei Versicherungsbeginn zu einer bestimmten Höhe bei Versicherungsende ansteigen oder abklingen soll. Den Verlauf des Ansteigens bzw. Absinkens (z. B. linear) kann man jedoch nicht noch zusätzlich vorschreiben, dieser Verlauf ist durch die exponentielle Gestalt von $\bar{q}_x$ zwangsläufig gegeben. Wir lassen zwei Beispiele folgen, auf Basis der Hilfstafel S. M. 1939/44 des Anhanges (Tabelle I).

1. $x = 35$, $n = 20$. Die Übersterblichkeit betrage bei Versicherungsbeginn 50 % und soll bis zu 100 % am Versicherungsende ansteigen.

$$1{,}5\, q_{35} = 4{,}823\,{}^0/_{00} = \bar{a} + \bar{b}\, c^{35} \qquad c^{20} = 5{,}980$$
$$2\, q_{55} = 30{,}382\,{}^0/_{00} = \bar{a} + \bar{b}\, c^{55} \qquad c^{35} = 22{,}867$$

$$\bar{b} = \frac{2\, q_{55} - 1{,}5\, q_{35}}{c^{35}(c^{20} - 1)} = \frac{25{,}559}{113{,}878}\,{}^0/_{00} = 0{,}224\,{}^0/_{00},$$

$$\bar{a} = 1{,}5\, q_{35} - \bar{b}\, c^{35} = -\,0{,}299\,{}^0/_{00}.$$

Konst. addit. Zuschlag: $a' = \bar{a} - a = -\,1{,}109\,{}^0/_{00}$.

Alterserhöhung: $b' = \bar{b}/b = 2{,}13$, $\quad m = 25 \cdot \log b' = 8{,}2$.

Für die praktische Rechnung wird man setzen: $a' = -\,1\,{}^0/_{00}$, $m = 8$, und es ergibt sich die Probe

$$q_{35} = 3{,}22\,{}^0/_{00}; \quad q_{43} - 1\,{}^0/_{00} = 4{,}73\,{}^0/_{00} = 1{,}47\, q_{35} \sim 1{,}5\, q_{35};$$
$$q_{55} = 15{,}19\,{}^0/_{00}; \quad q_{63} - 1\,{}^0/_{00} = 29{,}22\,{}^0/_{00} = 1{,}92\, q_{55} \sim 2\, q_{55}.$$

2. $x = 35$, $n = 20$. Die Übersterblichkeit betrage bei Versicherungsbeginn 100 % und soll bis zum Versicherungsende auf Null absinken.

$$2\, q_{35} = 6{,}430\,{}^0/_{00} = \bar{a} + \bar{b}\, c^{35}$$
$$q_{55} = 15{,}191\,{}^0/_{00} = \bar{a} + \bar{b}\, c^{55}$$

$$\bar{b} = \frac{q_{55} - 2\, q_{35}}{c^{35}(c^{20} - 1)} = \frac{8{,}761}{113{,}878}\,{}^0/_{00} = 0{,}077\,{}^0/_{00}$$

$$\bar{a} = 2\, q_{35} - \bar{b}\, c^{35} = 4{,}672\,{}^0/_{00}.$$

Konst. addit. Zuschlag: $a' = \bar{a} - a = 3{,}862\,{}^0/_{00}$.

Alterserhöhung: $b' = \bar{b}/b = 0{,}731$, $\quad m = 25 \cdot \log b' = -\,3{,}4$.

Für die praktische Rechnung wird man setzen: $a' = 4\,{}^0/_{00}$, $m = -3$, und es ergibt sich die Probe

$$q_{35} = 3{,}22\,{}^0/_{00}; \quad q_{32} + 4\,{}^0/_{00} = 6{,}65\,{}^0/_{00} = 2{,}07\,q_{35} \sim 2\,q_{35};$$
$$q_{55} = 15{,}19\,{}^0/_{00}; \quad q_{52} + 4\,{}^0/_{00} = 15{,}81\,{}^0/_{00} = 1{,}04\,q_{55} \sim q_{55}.$$

Man kann nun nach jenem Satze α konstanter multiplikativer Übersterblichkeit fragen, der in einem bestimmten Intervall die gleiche mittlere Übersterblichkeit aufweist, wie der durch $\bar{q}_x = \bar{a} + \bar{b}c^x$ gegebene Sterblichkeitsverlauf. Dieser Satz α ist offenbar zu bestimmen aus der Gleichung

$$(1+\alpha)\frac{1}{n}\sum_0^{n-1} q_{x+t} = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1}\bar{q}_{x+t} = \frac{1}{n}\left(\sum_0^{n-1} q_{x+m+t} + na'\right), \qquad \text{XXII}$$

d. h. es ist

$$\alpha = \frac{\sum \bar{q}_{x+t}}{\sum q_{x+t}} - 1 = \frac{\sum q_{x+m+t} + na'}{\sum q_{x+t}} - 1.$$

Es wäre aber irrig anzunehmen, dass bei Verwendung dieses Satzes zur Extraprämienberechnung nach Formeln I das gleiche Resultat erhalten werde, wie bei direkter Berücksichtigung der nicht konstanten Übersterblichkeit nach XX und XXI, d. h. es ist

$$P_{x\overline{n}|} + \alpha(P_{x\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}) \neq \bar{P}_{x\overline{n}|} = P_{x+m,\overline{n}|} + Z(a'). \qquad \text{XXIII}$$

Zwar wird der Unterschied in praktischer Hinsicht vielfach unbedeutend sein, wie dies die Untersuchungen von Zwingli zeigen [9]. Immerhin ist zu bedenken, dass bei der Prämienberechnung die Sterbenswahrscheinlichkeiten mit dem Risikokapital gewichtet werden. Setzen wir letzteres in grober Näherung gleich $\frac{n-t}{n}$, so ist zu erwarten, dass

$$\alpha' = \frac{P_{x+m,\overline{n}|} + Z(a') - P_{x\overline{n}|}}{P_{x\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}} \sim \frac{\sum \bar{q}_{x+t}(n-t)}{\sum q_{x+t}(n-t)} - 1. \qquad \text{XXIV}$$

Somit wird $\alpha \sim \alpha'$ wenn

$$\frac{\sum \bar{q}_{x+t}}{\sum q_{x+t}} \sim \frac{\sum \bar{q}_{x+t}(n-t)}{\sum q_{x+t}(n-t)},$$

aus welchem Ausdruck sich nach leichter Umformung die Bedingung ergibt

$$\frac{\sum t q_{x+t}}{\sum q_{x+t}} \sim \frac{\sum t \bar{q}_{x+t}}{\sum \bar{q}_{x+t}}.$$

Diese beiden Mittelwerte können aber nur für $\bar{q}_{x+t} = (1+\alpha)\, q_{x+t}$, d. h. für konstante multiplikative Übersterblichkeit, identisch werden. Es ist zu erwarten, dass steigende Übersterblichkeit von geringerem Einfluss ist als fallende. Greifen wir zur Illustration auf unsere beiden Rechenbeispiele zurück, so ergibt sich (S. M. 1939/44 zu 3 %, $x = 35$, $n = 20$):

1. Übersterblichkeit von anfänglich 50 % steigend bis 100 %.

$$\sum t q_{x+t} / \sum q_{x+t} = 120{,}08\,, \quad \sum t \bar{q}_{x+t} / \sum \bar{q}_{x+t} = 123{,}67\,.$$

$$\alpha \text{ nach Formel XXII: } 78{,}89\,\%\,,$$

$$\alpha' \text{ nach Formel XXIV: } 69{,}92\,\%\,.$$

$$\bar{P}_{x\overline{n}|} = P_{x+m,\overline{n}|} + Z(a') = 41{,}54\,‰ - 0{,}58\,‰ = 40{,}96\,‰\,,$$

$$P_{x\overline{n}|} + 0{,}70\,(P_{x\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}) = 38{,}97\,‰ + 1{,}99\,‰ = 40{,}96\,‰\,,$$

$$P_{x\overline{n}|} + 0{,}79\,(P_{x\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}) = 38{,}97\,‰ + 2{,}24\,‰ = 41{,}21\,‰\,.$$

2. Übersterblichkeit von anfänglich 100 % bis auf 0 fallend.

$$\sum t q_{x+t} / \sum q_{x+t} = 120{,}08\,, \quad \sum t \bar{q}_{x+t} / \sum \bar{q}_{x+t} = 109{,}25\,.$$

$$\alpha \text{ nach Formel XXII: } 34{,}58\,\%\,,$$

$$\alpha' \text{ nach Formel XXIV: } 64{,}60\,\%\,.$$

$$\bar{P}_{x\overline{n}|} = P_{x+m,\overline{n}|} + Z(a') = 38{,}47\,‰ + 2{,}34\,‰ = 40{,}81\,‰\,,$$

$$P_{x\overline{n}|} + 0{,}65\,(P_{x\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}) = 38{,}97\,‰ + 1{,}85\,‰ = 40{,}82\,‰\,,$$

$$P_{x\overline{n}|} + 0{,}35\,(P_{x\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}) = 38{,}97\,‰ + 0{,}99\,‰ = 39{,}96\,‰\,.$$

Um keine irrige Meinung aufkommen zu lassen, sei abschliessend mit aller Deutlichkeit betont, dass es sich bei vorstehenden Ausführungen lediglich darum handelte, praktische und hinreichende Näherungsverfahren für die Prämienbestimmung jener Fälle anzugeben, bei welchen man den Sterblichkeitsverlauf des anormalen Risikos durch Änderung der beiden Konstanten a und b im normalen $q_x = a + bc^x$ erfassen zu können glaubt. Keineswegs soll aber zur Auffassung verleitet werden, dass der Sterblichkeitsverlauf anormaler Risiken stets durch eine Makeham-Kurve wiedergegeben werden könne. Dies wäre ebensowenig zutreffend wie die Annahme, dass eine konstante multiplikative Übersterblichkeit dem Verlauf der Anormalen-Sterblichkeit effektiv und nicht bloss im Mittel entspreche. Selbst in günstig gelagerten Fällen kann die Formel von Makeham nur ein interpolato-

rischer Behelf sein. Es ist in diesem Zusammenhange auf die Untersuchungen von Sachs [10] hinzuweisen, welche zeigen, dass, wenn der Sterblichkeitsverlauf in einer grösseren Gesamtheit (z. B. Individuen ohne Rücksicht auf deren Gesundheitszustand) der Makehamschen Formel folgt, bei einer Aufteilung in Untergesamtheiten (z. B. normale Risiken und Risiken mit bestimmten Erschwerungsgründen) unmöglich alle Teilgesamtheiten auch Makeham-Verlauf haben können. Im übrigen ist auch auf Grund der eingangs erwähnten statistischen Untersuchungen zu vermuten, dass in der Regel eine Makeham-Formel dem spezifischen Sterblichkeitsverlauf anormaler Risiken nicht gerecht werden kann. Unter diesem Gesichtswinkel besehen, könnten Approximationsmethoden für die Erfassung gestaffelter additiver oder multiplikativer Übersterblichkeit (man vgl. z. B. die bezüglichen Arbeiten von Neuhaus [8] und Jecklin [11]) erhöhte Bedeutung gewinnen.

In der Arbeit genannte Literatur:

[1] H. Jecklin: «Eine Näherungsformel für Übersterblichkeitszuschläge.» Mitteilungen d. Vereinigung schweiz. Vers.-Math., Bd. 44, 1.

[2] I. Moltke: «Statistische Untersuchungen minderwertiger Leben in Dänemark.» XI. internat. Kongress f. Vers.-Math., Paris 1937, Bd. 3.

[3] B. de Finetti & R. Taucer: «Sur l'emploi d'une base technique générale pour les risques tarés.» Proceedings of the sixth international conference regarding Insurance of sub-standard lives. Stockholm 1952.

[4] W. Thalmann: «Zahlenwerte der Prymschen Funktion zur Berechnung von Rentenbarwerten.» Mitteilungen d. Vereinigung schweiz. Vers.-Math., Bd. 26.

[5] C. L. Landré «Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung.» Verlag Gustav Fischer, Jena, 5. Aufl., 1921, S. 104.

[6] Eidgenössisches Statistisches Amt: Schweizerische Volkssterbetafeln 1931/41 und 1939/44; Statistische Unterlagen zur Sterblichkeitsmessung für die zweite Expertenkonferenz, ausgearbeitet unter Leitung von Prof. W. Wegmüller.

[7] H. Jecklin: «Über gewisse Approximationen der Versicherungsmathematik.» Blätter d. Deutschen Ges. f. Vers.-Math. B. 1, 2.

[8] J. Neuhaus: «Zur Berechnung von Übersterblichkeitszuschlägen.» Mitteilungen d. Vereinigung schweiz. Vers.-Math. Bd. 48, 2.

[9] H. Zwingli: «Risikozuschläge und mathematische Reserve in Funktion des Verlaufes der Übersterblichkeit bei minderwertigen Risiken.» Mitteilungen d. Vereinigung schweiz. Vers.-Math. Bd. 48, 2.

[10] W. Sachs: «Die Absterbeordnung als Mischungsergebnis.» Blätter d. Deutschen Ges. f. Vers.-Math. Bd. 1, 3.

[11] H. Jecklin: «Die technische Behandlung der gestaffelten multiplikativen Übersterblichkeit.» Mitteilungen d. Vereinigung schweiz. Vers.-Math. Bd.45, 2.

Tabelle I

$$q_x = a + b c^x, \quad a = 0{,}810008\,{}^0/_{00},$$

x	q_x $^0/_{00}$	l_x	$\sum l_x$	$b c^x$ $^0/_{00}$	l''_x	$\sum l''_x$
20	1.439	100.000	4.815.060	0.629	100.000	4.916.125
21	1.498	99.856	4.715.060	0.688	99.937	4.816.125
22	1.562	99.707	4.615.204	0.752	99.868	4.716.188
23	1.632	99.551	4.515.497	0.822	99.793	4.616.320
24	1.709	99.388	4.415.946	0.899	99.711	4.516.527
25	1.793	99.218	4.316.558	0.983	99.622	4.416.816
26	1.885	99.041	4.217.340	1.075	99.524	4.317.194
27	1.986	98.854	4.118.299	1.176	99.417	4.217.670
28	2.096	98.658	4.019.445	1.286	99.300	4.118.253
29	2.216	98.451	3.920.787	1.406	99.172	4.018.953
30	2.348	98.233	3.822.336	1.538	99.033	3.919.781
31	2.492	98.002	3.724.103	1.682	98.880	3.820.748
32	2.649	97.758	3.626.101	1.839	98.714	3.721.868
33	2.821	97.499	3.528.343	2.011	98.532	3.623.154
34	3.009	97.224	3.430.844	2.199	98.334	3.524.622
35	3.215	96.931	3.333.620	2.405	98.118	3.426.288
36	3.440	96.620	3.236.689	2.630	97.882	3.328.170
37	3.686	96.287	3.140.069	2.876	97.625	3.230.288
38	3.955	95.932	3.043.782	3.145	97.344	3.132.663
39	4.249	95.553	2.947.850	3.439	97.038	3.035.319
40	4.570	95.147	2.852.297	3.760	96.704	2.938.281
41	4.922	94.712	2.757.150	4.112	96.340	2.841.577
42	5.307	94.246	2.662.438	4.497	95.944	2.745.237
43	5.728	93.746	2.568.192	4.918	95.513	2.649.293
44	6.188	93.209	2.474.446	5.378	95.043	2.553.780
45	6.691	92.632	2.381.237	5.881	94.532	2.458.737
46	7.241	92.012	2.288.605	6.431	93.976	2.364.205
47	7.842	91.346	2.196.593	7.032	93.372	2.270.229
48	8.500	90.630	2.105.247	7.690	92.715	2.176.857
49	9.219	89.859	2.014.617	8.409	92.002	2.084.142

Tafel S. M. 1939/44

$b = 0{,}105148\,^0/_{00}, \quad c = 1{,}093543226$

x	$q_x\,^0/_{00}$	l_x	$\sum l_x$	$b\,c^x\,^0/_{00}$	l''_x	$\sum l''_x$
50	10.006	89.031	1.924.758	9.196	91.228	1.992.140
51	10.866	88.140	1.835.727	10.056	90.389	1.900.912
52	11.807	87.182	1.747.587	10.997	89.480	1.810.523
53	12.836	86.153	1.660.405	12.026	88.496	1.721.043
54	13.961	85.047	1.574.252	13.151	87.432	1.632.547
55	15.191	83.860	1.489.205	14.381	86.282	1.545.115
56	16.536	82.586	1.405.345	15.726	85.042	1.458.833
57	18.007	81.220	1.322.759	17.197	83.704	1.373.791
58	19.615	79.758	1.241.539	18.805	82.265	1.290.087
59	21.375	78.193	1.161.781	20.565	80.718	1.207.822
60	23.298	76.522	1.083.588	22.488	79.058	1.127.104
61	25.402	74.739	1.007.066	24.592	77.280	1.048.046
62	27.702	72.840	932.327	26.892	75.379	970.766
63	30.218	70.823	859.487	29.408	73.352	895.387
64	32.969	68.682	788.664	32.159	71.195	822.035
65	35.977	66.418	719.982	35.167	68.905	750.840
66	39.267	64.029	653.564	38.457	66.482	681.935
67	42.864	61.514	589.535	42.054	63.926	615.453
68	46.798	58.878	528.021	45.988	61.237	551.527
69	51.100	56.122	469.143	50.290	58.421	490.290
70	55.804	53.254	413.021	54.994	55.483	431.869
71	60.949	50.283	359.767	60.139	52.432	376.386
72	66.574	47.218	309.484	65.764	49.279	323.954
73	72.726	44.074	262.266	71.916	46.038	274.675
74	79.453	40.869	218.192	78.643	42.727	228.637
75	86.810	37.622	177.323	86.000	39.367	185.910
76	94.855	34.356	139.701	94.045	35.981	146.543
77	103.652	31.097	105.345	102.842	32.597	110.562
78	113.272	27.874	74.248	112.462	29.245	77.965
79	123.792	24.717	46.374	122.982	25.956	48.720
80	135.296	21.657	21.657	134.486	22.764	22.764

Tabelle II

$$A = \frac{1}{e_{x\overline{n}|}} = l_x / \sum_0^{n-1} l_{x+t}$$

$$B = \frac{1}{n}$$

$$C = \frac{1}{e'_{x\overline{n}|}} = a/(1-(1-a)^n)$$

$$D = \frac{1}{e''_{x\overline{n}|}} = l''_x / \sum_0^{n-1} l''_{x+t}$$

Mit Grundwerten aus Tabelle I

Angaben in ‰

x	n	A	B	C	D	$A+B$	$C+D$
20	10	100.73	100.00	100.37	100.37	200.73	200.74
	20	50.95	50.00	50.39	50.56	100.95	100.95
	30	34.60	33.33	33.73	34.20	67.93	67.93
	40	26.80	25.00	25.40	26.39	51.80	51.79
30	10	101.27	100.00	100.37	100.90	201.27	201.27
	20	51.77	50.00	50.39	51.38	101.77	101.77
	30	35.87	33.33	33.73	35.46	69.20	69.19
	40	28.81	25.00	25.40	28.39	53.81	53.79
40	10	102.58	100.00	100.37	102.21	202.58	202.58
	20	53.79	50.00	50.39	53.39	103.79	103.78
	30	39.01	33.33	33.73	38.58	72.34	72.31
50	10	105.84	100.00	100.37	105.46	205.84	205.83
	20	58.89	50.00	50.39	58.47	108.89	108.86

Tabelle III

$$A = \frac{1}{\bar{e}_{x\overline{n}|}} = \bar{l}_x / \sum_0^{n-1} \bar{l}_{x+t}, \quad \bar{l}_{x+1} = \bar{l}_x (1 - (q_x + a')),$$

q_x nach Tab. I, $a' = 5\,{}^0/_{00}$

$$B = \frac{1}{n}$$

$$C = a' / (1 - (1 - a')^n), \quad a' = 5\,{}^0/_{00}$$

$$D = \frac{1}{e_{x\overline{n}|}} = l_x / \sum_0^{n-1} l_{x+t}, \quad l_x \text{ nach Tab. I}$$

Angaben in ${}^0/_{00}$

x	n	A	B	C	D	$A+B$	$C+D$
20	10	103.02	100.00	102.27	103.73	203.02	203.00
	20	53.40	50.00	52.42	50.95	103.40	103.37
	30	37.13	33.33	35.81	34.60	70.46	70.41
	40	29.41	25.00	27.52	26.80	54.41	54.32
30	10	103.56	100.00	102.27	101.27	203.56	203.54
	20	54.24	50.00	52.42	51.77	104.24	103.19
	30	38.45	33.33	35.81	35.87	71.78	71.68
	40	31.50	25.00	27.52	28.81	56.50	56.34
40	10	104.90	100.00	102.27	102.58	204.90	204.85
	20	56.32	50.00	52.42	53.79	106.32	106.21
	30	41.69	33.33	35.81	39.01	75.02	74.82
50	10	108.21	100.00	102.27	105.84	208.21	208.11
	20	61.56	50.00	52.42	58.89	111.56	111.31

Tabelle IV

Werte von $f = \dfrac{a'}{d' - d}, \quad d' = \dfrac{i'}{l + i'}, \quad i' = i + a'$

i \ a'	2½ ${}^0/_{00}$	5 ${}^0/_{00}$	7½ ${}^0/_{00}$	10 ${}^0/_{00}$	15 ${}^0/_{00}$	20 ${}^0/_{00}$
2 %	1.043	1.046	1.048	1.051	1.056	1.061
2½ %	1.053	1.056	1.058	1.061	1.066	1.071
3 %	1.063	1.066	1.068	1.071	1.076	1.081
3½ %	1.073	1.076	1.079	1.082	1.087	1.092
4 %	1.085	1.087	1.089	1.092	1.097	1.102

Tabelle V

Grundlagen S. M. 1921/30 zu 3 % Angaben in ‰

A = genauer Wert von Z

$B = Z$ nach Formel XIII $= \left(\frac{a'}{1-(1-a')^n} - \frac{1}{n}\right)(1 + 0{,}25\, in)$

$C = Z$ nach Formel XIV $= 0{,}5\, a'\,(1 + 0{,}25\, in)$

$D = Z$ nach Formel XV $= \frac{1}{a'_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{a_{\overline{xn}|}}$

$E = Z$ nach Formel XVI $= \left(\frac{1}{a'_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{a_{\overline{xn}|}}\right) f$

$F = Z$ nach Formel XVII $= \left(\frac{1}{a'_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{a_{\overline{xn}|}}\right)(1 + 2i)$

$G = Z$ nach Formel XVIII $= \left(\frac{1}{a'_{\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}\right)(1 + 2i)$

$\Big\}\; i' = i + a'$

x	n	a' ‰	A	B	C	D	E	F	G
30	10	5	2.48	2.44	2.69	2.38	2.54	2.52	2.50
	20	5	2.89	2.78	2.88	2.78	2.96	2.95	2.88
	30	5	3.22	3.04	3.06	3.08	3.28	3.26	3.18
40	10	10	5.05	4.93	5.38	4.81	5.15	5.10	5.01
	20	5	2.95	2.78	2.88	2.83	3.02	3.00	2.88
	20	10	5.97	5.65	5.75	5.69	6.09	6.03	5.93
	20	20	12.25	11.70	11.50	11.37	12.29	12.05	11.83
	30	10	6.67	6.23	6.13	6.33	6.78	6.71	6.44
50	10	5	2.57	2.44	2.69	2.43	2.59	2.58	2.50
	20	5	3.08	2.78	2.88	2.92	3.11	3.10	2.88

Tabelle VI

A = genauer Wert nach Z, $a' = 2\,^0/_{00}$, Grundlagen A. E. $3^1/_2\,^0/_0$

$B = 0{,}8\,Z$ nach Formel XVI
(= $0{,}8\,Z$ nach Formel XVII)
$C = 0{,}8\,Z$ nach Formel XVIII

$a' = 2^1/_2\,^0/_{00}$
$f = 1{,}07$
Angaben in $^0/_{00}$

x	n	A	B	C
30	10	1.02	1.04	1.01
40	10	1.02	1.04	1.01
50	10	1.03	1.05	1.01
30	20	1.21	1.22	1.18
40	20	1.22	1.23	1.18