Eine Invarianzeigenschaft von Standard-Absterbeordnungen und deren praktische Anwendung

Autor(en): **Vogel, Walter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **53 (1953)**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-551032

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Eine Invarianzeigenschaft von Standard-Absterbeordnungen und deren praktische Anwendung

Von *Walter Vogel*, Zürich

Den Begriff der Standard-Absterbeordnung verwendeten um die Jahrhundertwende *Blaschke* und *Gram* in ihren Arbeiten über die Anwendung von gewissen analytischen Eigenschaften der Makehamschen Absterbeordnungen [1], [3] [1]). 1924 dehnte *Saxer* diesen Begriff auch auf andere Sterbegesetze aus und untersuchte ihn systematisch [4]. Die vorliegende Arbeit versucht diese Theorien weiter zu entwickeln und anschliessend eine kurze Übersicht zu geben über die Möglichkeiten einer Anwendung der gewonnenen theoretischen Ergebnisse.

I. Analytische Eigenschaften der Absterbeordnung

In der Versicherungsmathematik hat sich eine Rechenmethode herausgebildet, die füglich als klassisch bezeichnet werden darf: Zuerst wird schrittweise eine ganze Kolonnenfolge von Hilfswerten durchgerechnet, die sogenannten Kommutationszahlen D_x und C_x und deren Summen, Doppelsummen usw. N_x, M_x, S_x, ... Erst nachher können aus diesen Hilfszahlen die Versicherungswerte selbst bestimmt werden. Dieses systematische Vorgehen ist unbestritten das rationellste Verfahren zur Aufstellung von ganzen Tabellenwerken. Es ist aber ganz auf diesen speziellen Zweck zugeschnitten, so dass es für anders gerichtete Aufgaben oft nicht besonders geeignet ist.

Als einfaches und bekanntestes Beispiel für eine derartige Aufgabenstellung sei das *Zinsfussproblem* erwähnt: Zu einem gegebenen

---

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf die Literaturangaben am Schlusse der Arbeit.

Versicherungswert ist die entsprechende Grösse bei einem anderen Zinsfuss gesucht. Die oben beschriebene klassische Methode, bei der für mindestens eine Kommutationszahl alle Werte bis zum Schlussalter der Absterbeordnung durchgerechnet werden müssten, wäre hier zu umständlich. Es scheint sich daher bereits in den Frühzeiten der Aktuarwissenschaften das Bedürfnis nach anderen Rechenverfahren für diesen Fall gezeigt zu haben, denn schon 1853 veröffentlichte *James Meikle* eine Näherungslösung hiefür [5]. Seither ist darüber eine ganze Literatur entstanden mit den verschiedensten Lösungsversuchen, obwohl es sich hier nur um ein ganz spezielles Problem handelt, bei dem ein einziges Rechnungselement variiert [6]. Bei den gegenwärtigen fliessenden Sterblichkeitsverhältnissen interessiert z. B. der Einfluss einer Variation der Sterblichkeit mindestens ebenso stark oder gar der allgemeinere Fall von gleichzeitigem Variieren mehrerer Elemente.

Für diese und ähnliche Fragestellungen ist zu erwarten, dass *analytische Methoden* rascher zum Ziele führen werden: Den gesuchten Wert fasst man auf als Funktion seiner Bestimmungsstücke, wie Alter, Sterblichkeit, Zinsfuss usw. und versucht, spezielle Funktionaleigenschaften für die Berechnung auszunützen. So kann oft aus der Variation der Veränderlichen direkt das Variieren der Funktion selbst ermittelt werden. Für das erwähnte Zinsfussproblem ist beispielsweise bekannt, dass beim Leibrenten-Barwert eine Zinsfussreduktion einer Herabsetzung der Sterblichkeit um eine Konstante gleichkommt und umgekehrt:

$$\bar{a}_x = \int_x^\infty e^{-\int_x^t (\delta+\mu_\tau)\,d\tau}\,dt,$$

$$(\delta - c) + \mu_x = \delta + (\mu_x - c).$$

Unter der speziellen Annahme von *Makeham* für die Sterblichkeit ist jede Variation der Rechnungselemente, bis auf einen Faktor, als Zinsfussänderung darstellbar, verbunden mit einer linearen Umformung des Alters. Das entdeckten bereits um 1870 der Amerikaner *Meech* und, unabhängig von ihm, *Woolhouse* (a. a. O. [7] S. 311). Dabei sind der erwähnte Faktor und die Lineartransformation der Zeit eng miteinander verknüpft.

Diese linearen Verknüpfungen bildeten den Ausgangspunkt für verschiedene interessante Einzeluntersuchungen, die sich von einem gemeinsamen Gesichtswinkel aus zusammenfassen lassen.

1873 zeigte *Makeham* [7] einen inneren Zusammenhang für diese Linearverknüpfungen auf: alle Leibrenten-Barwerte, deren zugrunde liegende Absterbeordnungen der Makehamschen Formel folgen, lassen sich auf die gleiche Funktion zurückführen, auf die unvollständige Gammafunktion. Mit Hilfe einer Reihenentwicklung dieser bekannten transzendenten Funktion stellte er daher allgemein brauchbare Barwerttabellen auf. Nach *Makeham* haben auch verschiedene weitere Autoren Berechnungsmethoden für die Aufstellung solcher Tabellen angegeben und zum Teil auch durchgerechnet, einige davon mit neueren, besser konvergierenden Entwicklungen der unvollständigen Gammafunktion [8]–[20]. Das neueste und für die praktische Anwendung geeignetste Tafelwerk dieser Art hat 1931 *Thalmann* veröffentlicht [20], das *Dreyer* in seiner Dissertation ausführlich beschrieben und bezüglich des Fehlers bei linearer Interpolation untersucht hat [21].

1914 stellte *Blaschke* im Anhang an eine Veröffentlichung über eine grosse Todesursachenstatistik auch Linearbeziehungen auf für einige andere Versicherungswerte, immer noch unter der Makehamschen Bedingung für den Sterblichkeitsverlauf [2].

In einer anderen Richtung bewegte sich die erwähnte Untersuchung von *Saxer* [4]. Er zeigte darin, dass die linearen Verknüpfungen zwischen den Leibrenten-Barwerten nicht an die Hypothese von Makeham gebunden sind, sondern allgemein gelten für Klassen von verwandten Sterbegesetzen. Diese Verallgemeinerung führt zu einer Einteilung aller denkbaren Absterbeordnungen – also auch der durch mechanische Ausgleichungen gewonnenen – in stetige Transformationsgruppen.

In der vorliegenden Arbeit wird versucht, die Gedankengänge von *Blaschke* und *Saxer* systematisch weiter zu entwickeln. Die Linearbeziehung zwischen den Leibrenten-Barwerten wird zurückgeführt auf eine Invarianzeigenschaft der Werte ${}_nE_x$. Mit Hilfe dieser Invarianz lassen sich neben den bekannten Beziehungen für die Barwerte a_x die entsprechenden Verknüpfungen für weitere und auch für komplizierter gebaute Versicherungswerte aufstellen, wie für $(I\,\mathsf{a})_{x\overline{n}|}$, $(II\,\mathsf{a})_{x\overline{n}|}$ usw.

II. Die Transformation des allgemeinen Sterbegesetzes

1. Die Hilfsfunktion $\varrho(\delta, x)$

In den Formeln der Versicherungswerte kommt überall der Ausdruck $\delta + \mu_x$ vor.

Beispiele:

1. $$_{s-x}E_x = e^{-\int_x^s (\delta+\mu_t)\,dt} \tag{1}$$

oder, als Differentialgleichung geschrieben:

$$\frac{d}{dx}\,{}_{s-x}E_x = [\delta + \mu_x]\,{}_{s-x}E_x. \tag{1'}$$

2. $$\bar{A}_x = \int_x^\infty \mu_t\, e^{-\int_x^s (\delta+\mu_\tau)\,d\tau}\, dt \tag{2}$$

oder

$$\frac{d}{dx}\,\bar{A}_x = (\delta + \mu_x)\,\bar{A}_x - \mu_x. \tag{2'}$$

Führt man die Bezeichnung

$$\delta + \mu_x = \varrho(\delta, x) \tag{3}$$

ein, so kann diese Funktion ϱ als Ganzes genommen aufgefasst werden als eine Art Ausscheide-Intensität, nämlich als die Ausscheide-Intensität infolge von Diskontierung und Tod:

$$-\frac{d\,D_x}{D_x\,dx} = -\frac{d\,c_{\overline{x}|}}{c_{\overline{x}|}\,dx} - \frac{d\,l_x}{l_x\,dx} = \delta_{\overline{x}|} + \mu_x.$$

Bezeichnet $c_{\overline{x}|}$ den um x Jahre diskontierten Betrag 1, so ist $\delta_{\overline{x}|}$ die (eventuell veränderliche) Zinsintensitätsfunktion. Bei fester Verzinsung – die im folgenden stets vorausgesetzt sei – wird sie zur Konstanten δ.

Für mehrere Ausscheideursachen, Tod, Invalidität usw., sowie für Versicherungen auf mehrere Leben ist entsprechend zu setzen:

$$\varrho(\delta, x) = \delta + \sum_i \mu_x^{(i)}.$$

2. Die Fundamental-Transformation

Der allgemeine Versicherungswert F – als Funktion der Variablen x und ϱ aufgefasst – spannt geometrisch gesehen im dreidimensionalen Raum (x, ϱ, F) eine Fläche $F(x, \varrho)$ auf über der $x\varrho$-Ebene.

Eine Transformation der $x\varrho$-Ebene, z. B. eine Verschiebung in der x-Richtung, wird im allgemeinen die Fläche $F(x, \varrho)$ in eine neue Fläche $F^*(x^*, \varrho^*)$ überführen.

Vorab stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen die transformierte Fläche überall mit der ursprünglichen zusammenfällt, d. h. wann für den ganzen Definitionsbereich

$$F^*(x^*, \varrho^*) = F(x, \varrho)$$

gilt. Mit anderen Worten: Wie muss die Transformation der Ebene beschaffen sein, damit sie F auf sich selbst abbildet?

Die Abbildung auf sich selbst entspricht analytisch einer im ganzen Definitionsbereich (x, ϱ) gültigen Invarianzeigenschaft:

$$F^*(x^*, \varrho^*) = F(x, \varrho),$$

wobei

$$x^* = \varphi(x, \varrho)$$

und

$$\varrho^* = \psi(x, \varrho).$$

Damit stösst man auf zwei weitere Fragen:

erstens, existieren solche Funktionen $F(x, \varrho)$, für die Variablen-Transformationen angegeben werden können, die F invariant lassen;

zweitens, wie müssten gegebenenfalls φ und ψ beschaffen sein?

Beim einfach gebauten Versicherungswert (1), dem Barwert der Erlebensfallsumme

$$F(x, \varrho) = {}_{s-x}E_x = e^{-\int_x^s \varrho \, d\tau}$$

genügt es für die verlangte Invarianz offensichtlich, dass die Variablen-Transformation flächentreu ist. Dann verändern sich nämlich weder das Flächenelement $d\varrho \, dx$, noch das Integral $\int \varrho \, dx$, noch schliesslich $F(x, \varrho)$ selbst. Die einfachste derartige Transformation, im folgenden *Fundamental-Transformation* genannt, ist eine Dehnung in der einen Axenrichtung, verbunden mit einer entsprechenden Stauchung in der Richtung der anderen Axe.

Die Existenz dieser Transformation bildet bereits den Inhalt des grundlegenden Satzes, auf dem alle weiteren Ausführungen aufbauen.

Im Hinblick auf die versicherungsmathematischen Symbole empfiehlt sich noch die Einführung der folgenden abkürzenden Bezeichnungsweise: Das Argument x wird wie üblich als Index unten rechts hingeschrieben, das Argument ϱ hingegen durch blosses Anfügen seines Index' am Symbol oben rechts angegeben. Für die ursprünglich betrachtete Funktion $F(x, \varrho) = {}_nE_x$ bedeuten dann beispielsweise

$$\left.\begin{aligned} {}_nE_z &= e^{-\int_0^n (\delta+\mu_{z+t})\,dt} = F(z, \varrho) \\ {}_nE_x^* &= e^{-\int_0^n (\delta^*+\mu^*{}_{x+t})\,dt} = F^*(x, \varrho) \end{aligned}\right\} \quad {}_{n^*}E_z^* = e^{-\int_0^{n^*} (\delta^*+\mu^*{}_{z+t})\,dt} = F^*(z, \varrho^*)$$

Ferner sei weiterhin stets vom System (x^*, ϱ^*, F^*) ausgegangen, d. h. $F^*(x^*, \varrho^*)$ sei als bekannt vorausgesetzt und $F(x, \varrho)$ die gesuchte Grösse.

3. Der Invarianzsatz

Satz:

Eine lineare Transformation von x^*

$$x = m(x^* + p) \tag{4}$$

lässt in Verbindung mit der dazu inversen homogenen Transformation von $\varrho^* = \delta^* + \mu_{x^*}^*$

$$\varrho = \frac{1}{m}\varrho^* \tag{5}$$

den Barwert der Erlebensfallsumme invariant:

$${}_nE_x = {}_{n^*}E_{x^*}^* . \tag{6}$$

Umgekehrt: Bei unverändertem ${}_{n^*}E_{x^*}^*$ entspricht einer linearen Transformation von x^* die inverse homogene Transformation von ϱ^*.

Beweis:

a) Aus (4) und (5) folgt (6):

Dies ist einfach einzusehen mit der Integraldarstellung (1):

$$ {}_{s-x}E_x = e^{-\int_x^s \varrho\, d\tau} . $$

Durch die beiden Substitutionen (4) und (5)

$$ \tau = m(\tau^* + p)\,, \qquad d\tau = m\, d\tau^* $$

$$ \varrho = \frac{1}{m}\varrho^*, $$

wird ${}_{s-x}E_x$ zu $e^{-\int_{x^*}^{s^*} \frac{1}{m}\varrho^* m\, d\tau^*} = {}_{s^*-x^*}E^*_{x^*}$ q. e. d. (7)

b) Aus (6) und (4) folgt umgekehrt aber auch (5): Hier führt die Substitution in der Differntialgleichung (1′) rasch zum Ziel:

$$ \frac{d}{dx}\, {}_{s-x}E_x = \varrho\, {}_{s-x}E_x = \varrho\, {}_{s^*-x^*}E^*_{x^*} . $$

Anderseits ist aber

$$ \frac{d}{dx}\, {}_{s-x}E_x = \frac{1}{m}\,\frac{1}{dx^*}\, {}_{s^*-x^*}E^*_{x^*} = \frac{1}{m}\varrho^*\, {}_{s^*-x^*}E^*_{x^*}, $$

woraus

$$ \varrho = \frac{1}{m}\varrho^* \quad \text{q. e. d.} $$

Bei fester Verzinsung zerfällt (5) in:

$$ \mu_x = \frac{1}{m}\left[\mu^*_{x^*} + \nu\right] \tag{8} $$

und

$$ \delta = \frac{1}{m}\left[\delta^* - \nu\right], \tag{9} $$

oder mit Briggschen Logarithmen:

$$ \log(1+i) = \frac{1}{m}\left[\log(1+i^*) - n\right], \quad \text{wobei} \quad n = \nu \log e . \tag{10} $$

Nach i aufgelöst:

$$i = \sqrt[m]{\frac{1+i^*}{q}} - 1 \quad \text{mit} \quad q = e^{\nu} = 10^{n}. \tag{11}$$

Die entsprechenden Umkehrformeln lauten:

$$x^* = \frac{1}{m} x - p \tag{4'}$$

$$\mu^*_{x^*} = m \mu_x - \nu \tag{8'}$$

$$\delta^* = m \delta + \nu \tag{9'}$$

$$\log (1 + i^*) = m \log (1 + i) + n \tag{10'}$$

$$i^* = q(1 + i)^m - 1 . \tag{11'}$$

4. Die Transformationsgleichung der Versicherungswerte

Die Anwendung des Invarianzsatzes auf die gebräuchlichen Versicherungswerte führt zu einfachen Transformationen, was hier nur am Beispiel des Leibrenten-Barwertes explizite durchgeführt werden soll. Die übrigen Transformationsgleichungen der nachfolgenden Tabelle ergeben sich analog.

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty {}_tE_x \, dt = \int_0^\infty {}_{t^*}E^*_{x^*} \, m \, dt^* = m \, \bar{a}^*_{x^*} . \tag{12}$$

In diesem Falle muss gegenüber der Transformation (7) nochmals über das Zeitintervall $\Delta x = m \Delta x^*$ integriert werden, d. h. im neuen Koordinatensystem bei unveränderten Integranden über eine m-mal grössere Strecke: ein Faktor m hebt sich nicht mehr weg.

Der Leibrenten-Barwert wird bei der Fundamental-Transformation mit dem Koeffizienten von x^* multipliziert.

Die Behauptungen: Aus (4), (8) und (9) folgt (12)
und umgekehrt: Aus (12), (4) und (9) folgt (8)

stellen den Inhalt des Verknüpfungssatzes von *Saxer* dar (a. a. O. [4] S. 24). Hier ergibt er sich als unmittelbare Folgerung aus dem allgemeineren Invarianzsatz.

Transformationsgleichungen der gebräuchlichsten Versicherungswerte

A – Barwerte

$$ {}_nE_x = {}_{n^*}E^*_{x^*} \qquad (6) $$

$$ \bar{a}_x = m\,\bar{a}^*_{x^*} \qquad (12) $$

$$ \bar{a}_{x\overline{n}|} = m\,\bar{a}^*_{x^*\overline{n^*}|} $$

$$ {}_{n|k}\bar{a}_x = m\,{}_{n^*|k^*}a^*_{x^*} $$

$$ (K\bar{a})_{x\overline{n}|} = \int_0^n \frac{t^k}{k!}\,{}_tE_x\,dt = m^{k+1}(K\bar{a}^*)_{x^*\overline{n^*}|} $$

insbesondere:

$$ (I\bar{a})_{x\overline{n}|} = m^2(I\bar{a}^*)_{x^*\overline{n^*}|} $$

$$ (II\bar{a})_{x\overline{n}|} = m^3(II\bar{a}^*)_{x^*\overline{n^*}|} \qquad \text{usw.} $$

$$ \bar{A}_x = \bar{A}^*_{x^*} + \nu\,\bar{a}^*_{x^*} $$

$$ \bar{A}^1_{x\overline{n}|} = \bar{A}^{*1}_{x^*\overline{n^*}|} + \nu\,\bar{a}^*_{x^*\overline{n^*}|} $$

$$ \bar{A}_{x\overline{n}|} = \bar{A}^*_{x^*\overline{n^*}|} + \nu\,\bar{a}^*_{x^*\overline{n^*}|} $$

$$ (I\bar{A})_x = m\left[(I\bar{A}^*)_{x^*} + \nu\,(I\bar{a}^*)_{x^*}\right] \text{ usw.} $$

B – Prämien

$$ {}_n\bar{P}_x = \frac{{}_nE_x}{\bar{a}_{x\overline{n}|}} = \frac{1}{m}\,{}_{n^*}\bar{P}^*_{x^*} $$

$$ \bar{P}_{x\overline{n}|} = \frac{\bar{A}_{x\overline{n}|}}{\bar{a}_{x\overline{n}|}} = \frac{1}{m}\,(\bar{P}^*_{x^*\overline{n^*}|} + \nu) $$

$$ {}_{n|}\bar{P}_x = \frac{{}_{n|}\bar{a}_x}{\bar{a}_{x\overline{n}|}} = {}_{n^*|}\bar{P}^*_{x^*} \qquad \text{usw.} $$

C – Deckungskapitalien

$$ {}_t\bar{V} = {}_{n-t}E_{x+t} - {}_n\bar{P}_x\,\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = {}_{t^*}\bar{V}^* $$

$$ {}_t\bar{V} = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x\overline{n}|}\,\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = {}_{t^*}\bar{V}^* $$

$$ {}_t\bar{V} = {}_{n-t|}\bar{a}_{x+t} - {}_{n|}\bar{P}_x\,\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = m\,{}_{t^*}\bar{V}^* \qquad \text{usw.} $$

5. Der gruppentheoretische Aspekt des Invarianzsatzes Standardsysteme und Universaltafeln

Die Transformationsgleichungen (4) und (5), bzw. (8), verbinden zwei Absterbeordnungen μ^* und μ – oder, von einer gegebenen Ordnung μ^* ausgehend – die Gleichungen (4) und (5) erzeugen eine neue Absterbeordnung μ; für andere Werte der als Parameter aufgefassten Koeffizienten m, n, p eine weitere μ' usw. Durchlaufen die Parameter alle (reellen) Werte ($m \neq 0$), so wird dadurch über μ^* eine dreidimensionale stetige Transformationsgruppe $\{\mu\}$ aufgespannt.

Die wichtigste Gruppe von Absterbeordnungen bilden die Makehamschen Ordnungen, d. h. durch die Transformationen (4) und (5) geht eine Makehamsche Ordnung wieder in eine solche über und umgekehrt, zwei Makehamsche Ordnungen werden durch ein eindeutig bestimmtes Parameter-Tripel m, n, p ineinander übergeführt.

Weitere Beispiele für derartige Gruppen sind nach *Saxer* beispielsweise alle Ordnungen mit konstanter Sterblichkeit:

$$\mu_x = k = \text{const.} \qquad \text{(Parameter } k\text{)},$$

ebenso alle Ordnungen nach *De Moivre:*

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x} \qquad \text{(Parameter } \omega\text{)},$$

ferner alle Ordnungen nach *Achard* von gleichem Grade m:

$$x = \frac{m}{\omega - x} \qquad \text{(Parameter } \omega\text{)},$$

und schliesslich können auch die allgemeinen Ordnungen nach *Quiquet* in Gruppen vom beschriebenen Sinne eingeteilt werden.

Die Beweise dazu finden sich a. a. O. [4], S. 25 ff.

Bezeichnet man die auf Grund einer Absterbeordnung μ und eines Zinsfusses i berechneten Versicherungswerte mit $F(\mu, i, x)$, so lässt sich die praktische Bedeutung dieser gruppentheoretischen Eigenschaft wie folgt beschreiben:

Zu jedem Versicherungswert $F(\mu, i, x)$ findet sich mit Hilfe der entsprechenden Transformationsgleichung aus der Tabelle auf S. 124

dessen Lineartransformierte $F^*(\mu^*, i^*, x^*) + \lambda f^*(\mu^*, i^*, x^*)$ auf Grund der Absterbeordnung μ^* beim Alter x^* und beim Zinsfuss i^*. Besitzt man somit eine (im allgemeinen mehrdimensionale) Tabelle der Menge aller Werte $F^*(\mu^*, i^*, x^*)$ und nötigenfalls $f^*(\mu^*, i^*, x^*)$ der Absterbeordnung μ^* für alle Alter x^* und alle Zinsfüsse i^*, so lässt sich daraus jeder Wert $F(\mu, i, x)$ einer mit μ^* verwandten Ordnung μ bestimmen.

Beispielsweise lässt sich aus einer zweidimensionalen Tabelle aller Rentenbarwerte $\bar{a}^*_{x^*}$ auf Grund irgendeiner Makehamschen Absterbeordnung $\mu^* = a^* + b^* e^{\gamma^* x^*}$ und auf Grund von verschiedenen Zinsfüssen i^* zu jedem Makehamschen Rentenbarwert $\bar{a}_x$ für das Alter x und den Zinsfuss i der Wert $\bar{a}^*_{x^*} = \frac{1}{m} \bar{a}_x$

an der Stelle

$$x^* = \frac{1}{m} x - p, \tag{4'}$$

$$i^* = q(1+i)^m - 1, \tag{11'}$$

ablesen, eventuell mit Hilfe von Interpolationen.

Eine solche mehrdimensionale Mannigfaltigkeit von Versicherungswerten wird in der Literatur das *Standardsystem* $\{F\}$ und μ^* die es «erzeugende» Standard-Absterbeordnung genannt. Die Tabellen von *Blaschke* und *Gram* stellen derartige Makehamsche Leibrenten-Standardsysteme dar [1], [3], wovon besonders diejenigen von *Blaschke* auch heute noch von praktischem Interesse sind.

Nun ist man jedoch für derartige Tabellen zur Bestimmung der Werte F nicht allein auf Standardsysteme angewiesen. Jede andere Mannigfaltigkeit $\{\bar{F}\}$ von der gleichen Dimension spannt ebenfalls die Menge $\{F\}$ auf. Die zugehörige Tabelle wird im allgemeinen nicht mehr nach x^* und i^*, sondern nach zwei anderen Argumenten, sie seien $\xi(x^*, i^*)$ und $\vartheta(x^*, i^*)$ genannt, fortschreiten. Tabellen dieser Art werden von verschiedenen Autoren zum Unterschied gegenüber den Standardsystemen als *Universaltafeln* bezeichnet. Makehamsche Universaltafeln – ebenfalls zur Bestimmung von Leibrenten-Barwerten – haben, wie bereits erwähnt, *Makeham* selbst und nach ihm *van der Belt, Cramér* und *Thalmann* aufgestellt [7], [14], [17], [20]. Die «erzeugende» Funktion F ist in diesen Fällen die unvollständige Γ-Funktion.

III. Die numerische Auswertung der Sterblichkeits-Transformation

In der Literatur finden sich nur numerische Auswertungen der Beziehung (12) für Makehamsche Rentenwerte, obwohl auch die übrigen Beziehungen der Zusammenstellung auf Seite 124 sich analog auswerten liessen, worauf in einer weiteren Untersuchung näher eingetreten werden soll.

Aber auch die Beziehung (12) lässt viele Anwendungsmöglichkeiten zu, mehr als man auf den ersten Blick hin annehmen möchte. Nicht nur die Barwerte von verbundenen Renten lassen sich auf gewöhnliche Leibrenten-Barwerte zurückführen (Satz vom Zentralalter) und damit unter Zuhilfenahme von Standardsystemen oder Universaltafeln direkt bestimmen, sondern auch kompliziertere Versicherungswerte, wie z. B.

$A'_{x\overline{n}|}$ im Ausdruck für das mittlere Risiko (a. a. O. [21], S. 26),

$\mathsf{a}_{\overline{xy}|z}$ Leibrente für (z), beginnend, nachdem (x) und (y) gestorben sind,

A^{1}_{xyz} Todesfallsumme, zahlbar, wenn (x) als Erster stirbt (a. a. O. [12], S. 58),

usw.

Als letzter Punkt sei noch auf die Ansätze zu graphischen Hilfsmethoden bei der Benützung von Barwerttabellen hingewiesen.

Gram fügte seinem Standardsystem eine Hilfsgraphik bei zur approximativen Bestimmung der Tafelargumente, wenn einzelne Werte μ_x bekannt sind.

Christen und *Linder* veröffentlichten 1940 Hilfsnomogramme [22], die gestatten, bei gegebenen Makeham-Konstanten s, g, c nach einer einmaligen Interpolation aus der Tafel von *Blaschke* ohne weitere numerische Rechnungen den gesuchten Barwert a_x direkt an einer Skala abzulesen.

Literaturverzeichnis

[1] *E. Blaschke:* Über eine Anwendung des Sterbegesetzes von Gompertz-Makeham – Vers.-wiss. Mitt. I, Wien, 1902, und Mitt. Verb. öst.-ung. Vers.-Techniker, 1902.

[2] — Die Todesursachen bei österreichischen Versicherten nach fünfjährigen Geschäftsperioden im Zeitraume 1876–1900 – Vers.-wiss. Mitt. IX, 1914.

[3] *J. P. Gram:* Om Makehams Dödelighedsformel og dens Anvendelse paa ikke normale Liv – Nord. Aktuarer I, Kopenhagen, 1904, mit deutschem Auszug.

[4] *W. Saxer:* Über die Konstruktion einer Standardabsterbeordnung – Mitt. (Ver. schw. Vers.-Math.) 19, 1924.

[5] *J. Meikle:* On a method of obtaining the value of a life annuity at one rate of interest from the value at another given rate – Journal (Inst. of Act.) III, London, 1853.

[6] *E. Fischer:* Das Zinsfussproblem in der Lebensversicherungsrechnung als Interpolationsaufgabe – Mitt. 1942 mit umfassenden Literaturangaben zum Zinsfussproblem.

[7] *W. M. Makeham:* On the integral of Gompertz' function for expressing the values of sums depending upon the contingency of life – Journal 17, 1873.

[8] *E. McClintock:* On the computation of annuities on Mr. Makehams hypothesis – Journal 18, 1874.

[9] *M. Lerch:* Einige Reihenentwicklungen der unvollständigen Gammafunktion – Crelles Journal, Berlin, 1905.

[10] — Über die Berechnung der Summen diskontierter Zahlen für eine nach dem Makehamschen Gesetz fortschreitende Reihe – Zeitschrift f. Math. u. Physik 53, Berlin.

[11] *A. Bohren:* Über die Makehamsche Kurve – Bull. Com. perm., Brüssel, 1906.

[12] *H. A. v. a. Belt:* De integratie van $\int f(a+x)(1+i)^{-x}dx$, indien $f(x) = ks^x g^{c^x}$ (formule van Makeham) – Archief (v. d. Verz-Wetenschap), 8, Amsterdam, 1906.

[13] — Nog eens de integratie van $\int f(a+x)(1+i)^{-x}dx$ – Archief 8, 1906.

[14] — Een tafel, met behulp waarvan men voor een sterftetafel renten en koopsommen kan berekenen – Archief 9, 1907.

[15] *H. Bieri:* Über die unvollständige Gamma-Funktion – Diss. Bern, 1912.

[16] *W. Friedli:* Reserve und Rentenbarwert als analytische Funktion – Mitt. 13, 1918.

[17] *H. Cramér:* Försäkringsmatematik och försäkringsmatematiker – Nordisk Försäkr. Tidsk., Stockholm, 1926.

[18] *W. Michel:* Untersuchung über eine versicherungsmathematische Funktion – Mitt. 28, 1933.

[19] *A. Tauber:* Über ein Problem der Näherungsrechnung und die Makehamschen Rentenwerte – Akt. vedy 1, Prag, 1930.

[20] *W. Thalmann:* Zahlenwerte der Prymschen Funktion zur Berechnung von Rentenbarwerten – Mitt. 26, 1931.

[21] *H. Dreyer:* Über die Berechnung der unvollständigen Gammafunktion und ihre Anwendung im Versicherungswesen – Diss. Bern, 1936.

[22] *H. Christen* und *A. Linder:* Une application de la nomographie au système complet de rentes viagères de Blaschke-Gram – Skand. Akt. T. 23, Stockholm, 1940.