Ergänzende Note zu "Prämien und Deckungskapitalien in der Todesfallversicherung, wenn die Beiträge nur bis zum Todestag geschuldet sind"

Autor(en): **Zwinggi, Ernst**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **53 (1953)**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-551093

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Ergänzende Note zu «Prämien und Deckungskapitalien in der Todesfallversicherung, wenn die Beiträge nur bis zum Todestag geschuldet sind»

Von *Ernst Zwinggi*, Basel

In der Arbeit «Prämien und Deckungskapitalien in der Todesfallversicherung, wenn die Beiträge nur bis zum Todestag geschuldet sind» (52. Band, 1952, S. 153–160) bestimmten wir u. a. die Prämie der gemischten Versicherung auf ein Leben für den besondern Fall, dass die Beiträge nur bis zum Todestag geschuldet sind. Im folgenden wollen wir die Ansätze auf die gemischte Versicherung für zwei verbundene Leben ausdehnen; es wird sich dabei zeigen, dass die Lösung nicht mehr die frühere geschlossene Form aufweist, vielmehr zu einer, wenn auch sehr guten Näherung führt.

Seien x_1 und x_2 die beiden Abschlussalter; beim ersten Tod, spätestens nach n Jahren, werde die Summe «1» fällig. Die stetig zahlbar angenommene Prämie ist $\overline{P}_{x_1x_2}$. Sei ferner mit ${}_t\overline{V}_{x_1x_2} = \overline{V}(0)$, ${}_{t+1}\overline{V}_{x_1x_2} = \overline{V}(1)$, $x_1 + t = y_1$ und $x_2 + t = y_2$ bezeichnet und t ganzzahlig vorausgesetzt; dann hat die Rekursionsformel des Deckungskapitals für $h \leqslant 1$ die Form

$$\overline{V}(0)\, e^{\delta h} + \overline{P}_{x_1x_2} \int_0^h e^{\delta(h-\xi)} \frac{l_{y_1+\xi}\, l_{y_2+\xi}}{l_{y_1}\, l_{y_2}}\, d\xi -$$

$$- \int_0^h e^{\delta(h-\xi)} \frac{l_{y_1+\xi}\, l_{y_2+\xi}\, (\mu_{y_1+\xi} + \mu_{y_2+\xi})}{l_{y_1}\, l_{y_2}}\, d\xi - \frac{l_{y_1+h}\, l_{y_2+h}}{l_{y_1}\, l_{y_2}}\, \overline{V}(h) = 0. \quad (1)$$

Im Intervall t bis $t + h$ soll die Sterbewahrscheinlichkeit linear verlaufen; also ist

$$\frac{l_{y+\xi}}{l_y} = 1 - \xi q_y \quad (2)$$

und

$$\mu_{y+\xi} = \frac{q_y}{1-\xi q_y} \tag{3}$$

mit $y = y_1$ und $y = y_2$.

Eingesetzt in (1) folgt mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \bar{s}_{\overline{h}|} &= \bar{a}_{\overline{h}|} e^{\delta h} = \int_0^h e^{\delta(h-\xi)}\, d\xi = \frac{e^{\delta h}-1}{\delta}, \\ k_h &= \int_0^h \xi\, e^{\delta(h-\xi)}\, d\xi = \frac{\bar{s}_{\overline{h}|}-h}{\delta}, \\ g_h &= \int_0^h \xi^2 e^{\delta(h-\xi)}\, d\xi = \frac{2k_h-h^2}{\delta} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

für

$$\int_0^h e^{\delta(h-\xi)} \frac{l_{y_1+\xi}\, l_{y_2+\xi}}{l_{y_1}\, l_{y_2}}\, d\xi = \bar{s}_{\overline{h}|} - k_h(q_{y_1}+q_{y_2}) + g_h q_{y_1} q_{y_2}. \tag{5}$$

In ähnlicher Weise erhalten wir für

$$\int_0^h e^{\delta(h-\xi)} \frac{l_{y_1+\xi}\, l_{y_2+\xi}(\mu_{y_1+\xi}+\mu_{y_2+\xi})}{l_{y_1}\, l_{y_2}}\, d\xi = \bar{s}_{\overline{h}|}(q_{y_1}+q_{y_2}) - 2k_h q_{y_1} q_{y_2}. \tag{6}$$

Somit wird aus (1) unter Verwendung von (5) und (6)

$$\begin{aligned} &\overline{V}(0)\, e^{\delta h} + \overline{P}_{x_1x_2}\{\bar{a}_{\overline{h}|} e^{dh} - k_h(q_{y_1}+q_{y_2}) + g_h q_{y_1} q_{y_2}\} - \\ &\quad - \bar{s}_{\overline{h}|}(q_{y_1}+q_{y_2}) + 2k_h q_{y_1} q_{y_2} - (1-h q_{y_1})(1-h q_{y_2})\, \overline{V}(h) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Zur Auflösung von (7) setzen wir $h = 1$ und finden nach Hinzufügen von $\pm v k_1 \overline{P}_{x_1x_2} q_{y_1} q_{y_2}$ und $\pm v \bar{s}_{\overline{1}|} q_{y_1} q_{y_2}$ die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} {}_{t+1}\overline{V}_{x_1x_2} &= \frac{{}_t\overline{V}_{x_1x_2}}{v(1-q_{x_1+t})(1-q_{x_2+t})} + \frac{1}{v(1-q_{x_1+t})(1-q_{x_2+t})} \cdot \\ &\cdot \{\overline{P}_{x_1x_2}[\bar{a}_{\overline{1}|} - v k_1(q_{x_1+t}+q_{x_2+t}-q_{x_1+t} q_{x_2+t})] + \overline{P}_{x_1x_2} v(g_1-k_1)\, q_{x_1+t} q_{x_2+t} - \\ &\quad - v \bar{s}_{\overline{1}|}(q_{x_1+t}+q_{x_2+t}-q_{x_1+t} q_{x_2+t}) - v(\bar{s}_{\overline{1}|}-2k_1)\, (q_{x_1+t} q_{x_2+t}\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Aufgelöst nach den Regeln der Differenzenrechnung folgt

$$
{}_t\overline{V}_{x_1x_2} = \frac{D_{x_1x_2}}{D_{x_1+t,\,x_2+t}} \sum_0^{t-1} \frac{D_{x_1+\tau,\,x_2+\tau}}{D_{x_1x_2}} \cdot
$$

$$
\cdot\{\overline{P}_{x_1x_2}[\bar{a}_{\overline{1}|} - vk_1(q_{x_1+\tau} + q_{x_2+\tau} - q_{x_1+\tau}\,q_{x_2+\tau})] + \overline{P}_{x_1x_2}\,v(g_1-k_1)\,q_{x_1+\tau}\,q_{x_2+\tau} -
$$

$$
- v\bar{s}_{\overline{1}|}(q_{x_1+\tau} + q_{x_2+\tau} - q_{x_1+\tau}\,q_{x_2+\tau}) - v(\bar{s}_{\overline{1}|} - 2k_1)\,q_{x_1+\tau}\,q_{x_2+\tau}\}\,. \qquad (9)
$$

Weil aber

$$
C_{x_1+\tau,\,x_2+\tau} = v^{x_1+\tau+1}\,l_{x_1+\tau}\,l_{x_2+\tau}(q_{x_1+\tau} + q_{x_2+\tau} - q_{x_1+\tau}\,q_{x_2+\tau}) \qquad (10)
$$

ist, wird mit $t = n$ und ${}_nV_{x_1x_2} = 1$

$$
{}_nE_{x_1x_2} = \overline{P}_{x_1x_2}\,\bar{a}_{\overline{1}|}\,\mathrm{a}_{x_1x_2:\overline{n}|} - \overline{P}_{x_1x_2}\,k_1 \cdot {}_{|n}A_{x_1x_2} +
$$

$$
+ \overline{P}_{x_1x_2}\,v(g_1-k_1)\,\frac{1}{D_{x_1x_2}} \sum_0^{n-1} D_{x_1+\tau,\,x_2+\tau}\,q_{x_1+\tau}\,q_{x_2+\tau} -
$$

$$
- \bar{s}_{\overline{1}|} \cdot {}_{|n}A_{x_1x_2} - v(\bar{s}_{\overline{1}|} - 2k_1)\,\frac{1}{D_{x_1x_2}} \sum_0^{n-1} D_{x_1+\tau,\,x_2+\tau}\,q_{x_1+\tau}\,q_{x_2+\tau}\,. \qquad (11)
$$

Daraus folgt, wenn

$$
\left.\begin{aligned}
W_1 &= \frac{v(g_1-k_1)}{D_{x_1x_2}} \sum_0^{n-1} D_{x_1+\tau,\,x_2+\tau}\,q_{x_1+\tau}\,q_{x_2+\tau} \\
W_2 &= \frac{v(\bar{s}_{\overline{1}|} - 2k_1)}{D_{x_1x_2}} \sum_0^{n-1} D_{x_1+\tau,\,x_2+\tau}\,q_{x_1+\tau}\,q_{x_2+\tau}
\end{aligned}\right\} \qquad (12)
$$

gesetzt wird, für

$$
\overline{P}_{x_1x_2} = \frac{{}_nE_{x_1x_2} + \bar{s}_{\overline{1}|} \cdot {}_{|n}A_{x_1x_2} + W_2}{\bar{a}_{\overline{1}|}\,\mathrm{a}_{x_1x_2:\overline{n}|} - k_1 \cdot {}_{|n}A_{x_1x_2} + W_1}\,. \qquad (13)
$$

Im Ergebnis (13) stören die Grössen W_1 und W_2, da sie nicht tabelliert vorliegen; sonst treten nur die üblichen *diskontinuierlichen* und daher in den Tabellen vorhandenen Grundwerte auf. Es zeigt sich aber, dass die Formel

$$
\overline{P}_{x_1x_2} = \frac{{}_nE_{x_1x_2} + \bar{s}_{\overline{1}|} \cdot {}_{|n}A_{x_1x_2}}{\bar{a}_{\overline{1}|}\,\mathrm{a}_{x_1x_2:\overline{n}|} - k_1 \cdot {}_{|n}A_{x_1x_2}} \qquad (14)
$$

vollkommen ausreicht zur Berechnung von $\overline{P}_{x_1x_2}$, wie das folgende Beispiel zeigt.

Verlauf von $\overline{P}_{x_1 x_2}$

S. M. 1921/30, 2¾ %, $x_1 = x_2$

$x_1 = x_2$	n	$\overline{P}_{x_1 x_2}$ nach (13)	$\overline{P}_{x_1 x_2}$ nach (14)	Abweichung
		‰	‰	‰
20	45	19,86 486	19,86 405	0,041
30	35	27,79 113	27,78 966	0,053
40	25	43,27 058	43,26 733	0,075
50	15	77,32 982	77,32 051	0,120