Reserveapproximation durch Hyperbeln nach der -Methode

Autor(en): **Strickler, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **55 (1955)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-551088

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Reserveapproximation durch Hyperbeln nach der φ-Methode

Von *P. Strickler*, Zürich

In verschiedenen Artikeln [1] haben H. Jecklin und H. Zimmermann gezeigt, dass sich manche versicherungstechnische Funktionen überraschend gut durch gleichseitige Hyperbeln approximieren lassen. Speziell wiesen sie darauf hin, dass sich die Reserven von gemischten Versicherungen und Versicherungen mit ähnlichem Reserveverlauf in dieser Form darstellen lassen, und ausgehend von dieser Entdeckung entwickelten sie die sogenannte F-Methode der Reserverechnung, welche gegenüber den «klassischen» Methoden der Reserverechnung manche wesentliche Vorteile hauptsächlich zur gruppenweisen Berechnung der Bilanzreserven aufweist. Zur Bestimmung der Bilanzreserve aller Versicherungen desselben Zugangsjahres können nämlich – unabhängig von Versicherungsart, Zinsfuss und zugrunde gelegter Sterbetafel – einfach die «Hilfszahlen» der einzelnen Policen addiert werden, und anschliessend bestimmt sich die globale Bilanzreserve durch eine einfache Rechenoperation anhand dieser Hilfszahlentotale. Es sind also – da ja die Policen desselben Zugangsjahres in der Regel aufeinanderfolgende Nummern tragen – zur gruppenweisen Reserverechnung nach Gruppen gleicher verflossener Dauer keinerlei Umsortierungen von Reservekarten vorzunehmen, und die Anzahl der Gruppen bleibt auf ein Minimum beschränkt.

Diesen bedeutenden Vorteilen, welche die F-Methode bietet, steht jedoch ein Nachteil gegenüber. Zwar lässt sich in jedem Einzelfall nachprüfen, um wie viel die durch eine Hyperbel dargestellte Einzelreserve von der exakten Reserve abweicht, und diese Abweichungen können – eventuell durch geeignete Unterteilung der ganzen Versicherungsdauer in verschiedene Interpolationszonen – ohne weiteres innerhalb gewisser Schranken gehalten werden. Da das Verfahren ja zudem zur globalen

[1] siehe Literaturangaben am Schluss.

Reserverechnung ganzer Portefeuilles dient, werden sich die positiven und negativen Abweichungen im grossen ganzen ziemlich gegeneinander aufheben. Bei der Summation der einzelnen Hilfszahlen zum Hilfszahlentotal entsteht jedoch notwendigerweise ein zweiter Approximationsfehler, indem die globale Reserve, berechnet aus dem Hilfszahlentotal, in der Regel nicht genau übereinstimmt mit der Summe der Einzelreserven, sondern in manchen Fällen nicht unbedeutend vom exakten Wert abweicht, und zwar ist der global bestimmte Reservewert für Portefeuilles, welche vorwiegend gemischte Versicherungen und solche mit ähnlichem Reserveverlauf aufweisen, stets zu klein. Dieser zweite Fehler, der «Summationsfehler», kann nun aber nicht ohne weiteres abgeschätzt werden, und es ist bis heute noch kein Verfahren bekannt, welches ihn auf einfache Weise auch nur eingermassen zuverlässig zu bestimmen gestatten würde.

Es stellt sich deshalb die Frage, ob es nicht möglich ist, die F-Methode dermassen abzuändern, dass dieser «Summationsfehler» nicht mehr auftritt, ohne dass die wesentlichen Vorteile der Methode dabei verlorengehen. Wie das in geeigneter Weise geschehen kann, wurde bereits früher gezeigt [5], und es soll hier noch etwas näher auf dieses abgeänderte Approximationsverfahren, die sogenannte «φ-Methode», eingegangen werden.

W. Friedli zeigte in einem Artikel [2], dass bei Annahme des Moivreschen Gesetzes in der Form

$$l_{x+t} = l_x(1-\lambda t) \tag{1}$$

für die Absterbeordnung und unter Vernachlässigung des Zinses die Reserve einer gemischten Versicherung für das Eintrittsalter x und die Dauer n dargestellt werden kann durch

$${}_tV = \frac{t}{n(2-\lambda n)} + \frac{(1-\lambda n)^2}{n(2-\lambda n)} \frac{t}{1-\lambda t}, \tag{2}$$

dass sie also die allgemeine Form

$${}_tV = gt + h\frac{t}{1-\lambda t} \tag{3}$$

besitzt, und ebenso weisen die Reserven der Erlebensfall- und der temporären Todesfallversicherung dieselbe Gestalt auf. Entsprechend der Darstellung (1) des Moivreschen Gesetzes ist $\lambda = \dfrac{1}{\omega - x}$ und des-

halb für alle Versicherungen mit demselben Eintrittsalter konstant. Es ist λ um so grösser, je grösser das Eintrittsalter x ist.

Die Formel (3) legt es uns nahe, allgemein zur näherungsweisen Darstellung der Reserven von gemischten und Erlebensfallversicherungen einen Ansatz von dieser Form zu versuchen. Soll die Darstellung (3) zur globalen Reserverechnung für alle Versicherungen desselben Zugangsjahres dienen, so müssen wir statt des vom Eintrittsalter abhängigen Parameters λ einen einheitlichen, für alle Versicherungen konstanten Wert φ festlegen. Fügen wir, um auch ganz oder teilweise prämienfreie Versicherungen erfassen zu können, noch ein konstantes Glied hinzu, so haben wir deshalb vom Ansatz

$$ {}_tV = k + gt + h \frac{t}{1-\varphi t} \tag{4}$$

auszugehen, und unsere Aufgabe ist nun die, die Konstanten k, g, h sowie den Parameter φ geeignet festzulegen. Wenn wir das in einer Weise getan haben, dass die Einzelreserven der in Frage kommenden Versicherungsarten in befriedigender Genauigkeit durch (4) dargestellt werden, so können wir von (4) ausgehend unmittelbar eine globale Reserveformel zur gruppenweisen Berechnung der Reserve nach gleicher verflossener Dauer zu einem beliebigen Zeitpunkt t geben: Kennzeichnet der Index i die einzelne Versicherung und ist S_i die Versicherungssumme, so wird

$$ \sum_{(i)} {}_tV_i S_i = \sum_{(i)} S_i k_i + t \sum_{(i)} S_i g_i + \frac{t}{1-\varphi t} \sum_{(i)} S_i h_i . \tag{5}$$

Zur Bildung des Reservetotals sind also einfach die mit den Versicherungssummen multiplizierten «Hilfszahlen» k, g und h zu addieren, dann berechnet sich aus diesen Hilfszahlentotalen die Reserve in überaus einfacher Weise als exakte Summe der approximierten Einzelreserven.

Es scheint nun vernünftig zu sein, die drei Konstanten k, g und h in (4) so festzulegen, dass zu 3 Zeitpunkten $t = t_1$, $t = \alpha$ und $t = t_2$, wobei etwa $t_1 < \alpha < t_2$ sein möge, die approximierte Reserve mit der exakten übereinstimmen soll. Führen wir die Hilfsgrösse

$$ C = \frac{1-\varphi\alpha}{\varphi(t_2-\alpha)(\alpha-t_1)} \left[{}_{t_2}V(\alpha-t_1) - {}_{\alpha}V(t_2-t_1) + {}_{t_1}V(t_2-\alpha) \right] \tag{6}$$

ein,

so bestimmen sich diese Konstanten zu

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{{}_{t_1}V\,t_2 - {}_{t_2}V\,t_1 + C\,t_1\,t_2\,\varphi}{(t_2 - t_1)}, \\ g &= \frac{{}_{t_2}V - {}_{t_1}V - C}{t_2 - t_1}, \\ h &= \frac{C(1-\varphi t_1)(1-\varphi t_2)}{t_2 - t_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Werden für praktische Zwecke die Faktoren $\dfrac{1-\varphi\alpha}{\varphi(t_2-\alpha)(\alpha-t_1)}$ tabelliert, so bestimmt sich C aus 3 Reservepunkten ${}_{t_1}V$, ${}_{\alpha}V$ und ${}_{t_2}V$ durch eine äusserst einfache Rechenoperation, und mit kleiner Mühe folgen anschliessend die drei Hilfszahlen k, g und h. Für die weitaus überwiegende Mehrzahl aller Versicherungen wird man $t_1 = 0$, $\alpha = \dfrac{n}{2}$ bzw. $\dfrac{n+1}{2}$ je nachdem die Versicherungsdauer n gerade oder ungerade ist, und $t_2 = n$ annehmen können. Ferner werden wir weiter unten sehen, dass die Bestimmung der Hilfszahlen einer ganz oder teilweise prämienfreien Versicherung (${}_0V \neq 0$) in den wichtigsten Fällen auf die Hilfszahlen der voll prämienzahlenden Kombination zurückgeführt werden kann (${}_0V = 0$), und wir können uns deshalb bei den folgenden Betrachtungen bis auf weiteres auf den Normalfall beschränken, dass $t_1 = 0$ und ${}_{t_1}V = 0$ ist. Es sind dann die Hilfszahlen gegeben durch

$$k = 0, \quad g = \frac{{}_nV - C}{n}, \quad h = C\left(\frac{1}{n} - \varphi\right), \qquad (8)$$

$$\text{wobei } C = \frac{1-\varphi\alpha}{\varphi\alpha(n-\alpha)}\left(\alpha\,{}_nV - n\,{}_\alpha V\right),$$

Wesentlich für eine befriedigende Approximation der Reserve durch (4) ist natürlich die geeignete Wahl des Parameters φ. Es ist nicht zu erwarten, dass für jede Versicherungsart, jeden technischen Zinsfuss und jede Sterbetafel derselbe Wert von φ ein optimales Resultat ergeben wird. Eine Abschätzung für die Grössenordnung von φ erhalten wir auf die folgende Weise:

Aus der Reserveformel (4) folgt durch zwei- bzw. dreimaliges Ableiten nach t

$$ {}_tV'' = \frac{2h\varphi}{(1-\varphi t)^3}, \quad {}_tV''' = \frac{6h\varphi^2}{(1-\varphi t)^4}, \tag{9} $$

und durch Elimination von h:

$$ \varphi = \frac{\dfrac{{}_tV'''}{{}_tV''}}{3 + t\dfrac{{}_tV'''}{{}_tV''}}. \tag{10} $$

Für eine reine Sparoperation wird nun aber bei kontinuierlicher Prämienzahlung und bei einem Aufzinsungsfaktor von $(1+i) = e^{\delta}$ die Reserve dargestellt durch ${}_tV = \dfrac{e^{\delta t}-1}{e^{\delta n}-1}$. Daraus folgt $\dfrac{{}_tV'''}{{}_tV''} = \delta$, so dass also $\varphi = \dfrac{\delta}{3+\delta t}$ wird. Bei der Reserveberechnung einer gemischten Versicherung kommt ferner bekanntlich eine Erhöhung des Zinsfusses einer Erhöhung der Sterblichkeit um einen gleich grossen, über alle Alter konstanten Betrag gleich. Bei konstanter Sterblichkeit μ würde demnach $\varphi = \dfrac{\mu+\delta}{3+t(\mu+\delta)}$ anzusetzen sein. Rechnet man mit einer durchschnittlichen Sterblichkeit (wobei durchschnittlich in bezug auf die während des Ablaufes der Versicherung erreichten Alter zu verstehen ist) von etwa $15^0/_{00}$, was bei einer modernen Tafel einem Alter von rund 50 Jahren entspricht, und vernachlässigt man im Nenner die Grösse $t(\mu+\delta)$, so ergibt sich für φ die Näherungsformel:

$$ \varphi = \frac{i}{3} + 0{,}005\,. \tag{11} $$

Diese liefert, wie die Nachprüfung an Beispielen zeigt, für gemischte Versicherungen wirklich sehr brauchbare Reserveapproximationen auf Grund der Formel (4).

Um auf ähnliche Weise eine exaktere Abschätzung für φ zu finden, wäre man versucht, auf die Differentialgleichung von Thiele für die Prämienreserve zurückzugreifen, doch zeigt es sich, dass dadurch keine Verbesserung der Bestimmung von φ erreicht werden kann. Eine wesentliche Verbesserung können wir wohl nur dadurch erzielen, dass wir φ mit der Minimummethode festlegen. Um dies zu tun, schreiben wir

die Formel (4), nachdem wir die Werte (8) für k, g, h eingesetzt haben, in der Gestalt

$$ {}_tV \approx \frac{{}_nV}{n}\, t - \frac{\alpha\, {}_nV - n\, {}_\alpha V}{n\,\alpha(n-\alpha)}\, t(n-t)\, \frac{1-\varphi\alpha}{1-\varphi t}. \tag{12} $$

Mit den Abkürzungen

$$ M_t = {}_tV - \frac{{}_nV}{n}\, t, \qquad L_t = \frac{\alpha\, {}_nV - n\, {}_\alpha V}{n\,\alpha(n-\alpha)}\, t(n-t), \tag{13} $$

wobei ${}_tV$ die exakte Reserve zur Zeit t bezeichnet, bestimmen wir φ so, dass die Summe

$$ \sum_{(t)} [M_t(1-\varphi t) + L_t(1-\varphi\alpha)]^2 = \text{Min.} \tag{14} $$

möglichst klein wird. Setzen wir die Ableitung dieses Ausdruckes nach φ gleich null, so findet man, dass

$$ \varphi \sum_{(t)} [M_t t + L_t \alpha]^2 = \sum_{(t)} (M_t + L_t)(M_t t + L_t \alpha) \tag{15} $$

sein muss. Für die Tafel SM 1939/44 à $2\,{}^1/_2\,{}^0/_0$ bestimmt man daraus z. B. bei Verwendung von je 10 äquidistanten Reservepunkten die folgenden Werte für φ:

Eintrittsalter	Dauer	Gemischte Versicherung	Erlebensfallversicherung	Temporäre Versicherung
20	40	$\varphi = 8{,}2\ {}^0/_{00}$	$\varphi = 15{,}3\ {}^0/_{00}$	$\varphi = 22{,}3\ {}^0/_{00}$
25	20	$\varphi = 8{,}5\ {}^0/_{00}$	$\varphi = 13{,}7\ {}^0/_{00}$	$\varphi = 42{,}8\ {}^0/_{00}$
35	30	$\varphi = 16{,}0\ {}^0/_{00}$	$\varphi = 20{,}9\ {}^0/_{00}$	$\varphi = 24{,}5\ {}^0/_{00}$
40	20	$\varphi = 19{,}1\ {}^0/_{00}$	$\varphi = 20{,}7\ {}^0/_{00}$	$\varphi = 28{,}7\ {}^0/_{00}$
Durchschnitt		$\varphi = 13{,}0\ {}^0/_{00}$	$\varphi = 17{,}6\ {}^0/_{00}$	$\varphi = 29{,}6\ {}^0/_{00}$

Die auf Grund des Moivreschen Gesetzes hergeleitete Beziehung (s. Seite 85, letzte Zeile), dass φ (welches dem dortigen Wert $\lambda = \dfrac{1}{\omega - x}$ entspricht) um so grösser ist, je grösser das Eintrittsalter x ist, kommt zumindest für gemischte Versicherungen in der Tabelle gut zum Ausdruck. Für Erlebensfall- und für temporäre Todesfallversicherungen liegen die optimalen Werte für φ durchwegs und zum Teil wesentlich höher als für gemischte Versicherungen. Da jedoch die Reserveformel (4)

zur globalen Reserveberechnung eines ganzen Portefeuilles dienen soll und nicht zur möglichst exakten Darstellung von Einzelreserven, so ist die Wahl eines mittleren Wertes für φ unumgänglich, so dass also nicht jede einzelne Reserve mit bestmöglicher Güte angenähert werden kann. Wie soll aber der mittlere Wert für φ angesetzt werden? Um das beurteilen zu können, müssen wir untersuchen, wie sich die approximierte Reserve ändert, wenn wir der Formel (4) einen andern Wert φ zugrunde legen. Ausgehend von der Darstellung (12) der Reserve findet man

$$\frac{\partial\, {}_tV}{\partial \varphi} = \frac{\alpha\, {}_nV - n\, {}_\alpha V}{n\alpha(n-\alpha)} \; \frac{t(n-t)\,(n-\alpha)}{(1-\varphi t)^2}. \tag{16}$$

Wenn also die beiden Reservepunkte ${}_\alpha V$ und ${}_nV$ auf derselben Geraden durch den Nullpunkt liegen, so verschwindet $\frac{\partial\, {}_tV}{\partial \varphi}$ stets, und es nimmt $\frac{\partial\, {}_tV}{\partial \varphi}$ proportional zur Abweichung $\frac{\alpha}{n}\, {}_nV - {}_\alpha V$ von ${}_\alpha V$ von dieser Geraden zu oder ab. Um eine Abschätzung für die Grösse von $\frac{\partial\, {}_tV}{\partial \varphi}$ zu erhalten, genügt es deshalb, $\frac{\partial\, {}_tV}{\partial \varphi}$ für eine bestimmte Abweichung $\frac{\alpha}{n}\, {}_\alpha V - {}_nV$ und einige Dauern zu tabellieren. Für $t = 0$, $t = \alpha$ und $t = n$ ist $\frac{\partial\, {}_tV}{\partial \varphi} = 0$, und für die maximalen Werte von $\frac{\partial\, {}_tV}{\partial \varphi}$ finden wir z. B. für $\frac{\alpha}{n}\, {}_\alpha V - {}_nV = 100\,{}^0/_{00}$ und $\alpha = \frac{n}{2}$ angenähert:

n	$\varphi = 10\,{}^0/_{00}$				$\varphi = 14\,{}^0/_{00}$				$\varphi = 18\,{}^0/_{00}$			
	t		t		t		t		t		t	
10	2,5	0,197	7,5	—0,219	2,5	0,201	7,5	—0,234	2,5	0,206	7,5	—0,251
20	4	0,417	16	—0,544	4	0,431	16	—0,638	4	0,446	16	—0,757
30	6	0,652	24	—0,997	6	0,686	24	—1,306	6	0,724	24	—1,785
40	8	0,907	32	—1,661	8	0,974	32	—2,520	8	1,048	32	—4,272

Wir ersehen daraus, dass für lange Versicherungsdauern $\frac{\partial\, {}_tV}{\partial \varphi}$ bei gleicher mittlerer Abweichung von der Geraden wesentlich grösser ist als für kurze. Da zudem für langdauernde Versicherungen in der Regel diese Abweichung bedeutend grösser ist als für kurzdauernde, weicht

das approximierte ${}_tV$ bei einer Veränderung von φ für Versicherungen mit langer Dauer sehr viel mehr vom optimalen Wert ab als für solche mit kurzen Dauern. Es ist deshalb bei der Festsetzung des Mittelwertes für φ dieser Tatsache Rechnung zu tragen, und da längeren Dauern durchschnittlich eher kleinere Werte von φ entsprechen, ist der Mittelwert für φ nicht zu hoch anzusetzen. Für die Tafel SM 1939/44 à $2^1/_2\,^0/_0$ dürfte der durch die Abschätzung (11) gegebene Wert $\varphi = 13{,}5\,^0/_{00}$ als Mittelwert hoch genug sein, vorausgesetzt, dass nicht ein grösserer Prozentsatz von reinen Erlebensfall- oder temporären Todesfallversicherungen im betrachteten Portefeuille enthalten ist.

Als nächstes wollen wir auf die Frage eintreten, wie die praktische Reserverechnung für einen umfangreichen Bestand gestaltet werden soll, um ein rationelles Arbeiten zu ermöglichen.

Zunächst ist einmal darauf hinzuweisen, dass auch bei guter Wahl des der Reserverechnung zugrunde gelegten Mittelwertes für φ in manchen Fällen die Genauigkeit der Approximation nicht hinreicht, um die Reserve während der ganzen Versicherungsdauer durch eine einzige Hyperbel approximieren zu können. Besonders bei Versicherungen mit hohen Endaltern wird sich eine Aufteilung der ganzen Dauer in zwei oder mehrere Interpolationszonen nicht umgehen lassen. Bei einer solchen Unterteilung soll aber stets für jede Interpolationszone das Zugangsjahr der Police als rechnungsmässiger Versicherungsbeginn beibehalten werden, um nicht bei gruppenweiser Berechnung von Reservetotalen Reservekarten einer andern Zugangsgruppe zuordnen zu müssen und so eines der Hauptvorteile der φ-Methode verlustig zu gehen. Die in [1] von H. Jecklin und H. Zimmermann vorgeschlagene Zoneneinteilung dürfte sich auch für die φ-Methode bewähren. Die Hilfszahlen einer jeden Zone berechnen sich nach der allgemeinen Formel (7) mit Hilfe von (6). Eine grosse Erleichterung erzielt man dabei dadurch, dass man die in (6) auftretenden Faktoren $\dfrac{1-\varphi\alpha}{\varphi(t_2-\alpha)(\alpha-t_1)}$ tabelliert, was besonders dann leicht geschehen kann, wenn man sich – wie das z. B. von Jecklin und Zimmermann aus andern Gründen vorgeschlagen wurde – auf die Verwendung von gewissen Standard-Zonenlängen beschränkt, indem man vom Versicherungsablauf an gerechnet bestimmte Intervalle abspaltet. Jecklin und Zimmermann befürworten 20 bzw. 6 Jahre als Zonenlängen, so dass man bei dieser Einteilung mit drei Kolonnen von Faktoren – ganze

Versicherungsdauer bzw. 20 Jahre bzw. 6 Jahre vor Ablauf des Interpolationsintervalles – auskommen kann, denen man mit Vorteil noch die Grössen $\frac{(1-\varphi t_1)(1-\varphi t_2)}{t_2-t_1}$ zur einfachen Berechnung von h hinzufügt, vgl. (7).

Die Verwendung von Standard-Zonenlängen ist im Prinzip auch dann noch möglich, wenn durch die Versicherung selbst ein Unterbruch in der Interpolation durch Hyperbeln bedingt wird, z. B. dadurch, dass nach einer gewissen Anzahl von Jahren eine Änderung in der Prämie oder in den Leistungen eintritt. Man wählt in diesem Falle als erstes Interpolationsintervall einfach die Dauer bis zum Eintritt dieser Änderung. Nach deren Eintritt stellt man eine neue Reservekarte so aus, wie wenn die Versicherung schon seit Beginn mit den neuen Prämien bzw. den neuen Leistungen laufen würde, was unter Zuhilfenahme einer künstlichen Anfangsreserve ohne weiteres gemacht werden kann.

Soll die Reserve eines umfangreichen Bestandes auf Grund der φ-Methode berechnet werden, so wird man die Hilfszahlen g und h der wichtigsten Versicherungsarten tabellieren. Um nicht zu umfangreiche Tabellenwerke anlegen zu müssen, kann man sich etwa darauf beschränken, vollständige Tabellen der gemischten Versicherung und der Erlebensfallversicherung für die in Frage kommenden Eintrittsalter und Versicherungsdauern zu erstellen. Fügt man diesen Tabellen noch die Hilfszahlen g und h einer reinen Sparoperation bei, d. h. für ${}_tV = 1 - \frac{a_{\overline{n-t}|}}{a_{\overline{n}|}}$, welche entsprechend den Dauern n nur eine einzige Kolonne von Werten umfasst, so kann man durch geeignete Zusammensetzung dieser Hilfszahlen sofort die Hilfszahlen der überwiegenden Mehrzahl der gebräuchlichen Versicherungsarten erhalten, ohne jedesmal auf die Berechnung von Reservepunkten zurückgreifen zu müssen, und zwar unabhängig davon, ob eine Versicherung ganz oder teilweise prämienfrei ist. Bezeichnet nämlich n die Versicherungsdauer, P ($\gtreqless 0$) die während m Jahren zahlbare *konstante* Prämie, $A^*_{x+t,\overline{n-t}|}$ den Barwert einer im übrigen beliebigen Versicherung nach t Jahren, EE die bei Versicherungsbeginn gemachte Einmaleinlage [1]), so gilt

$$P = \frac{A^*_{x,\overline{n}|} - EE}{a_{x,\overline{m}|}} \tag{17}$$

[1]) Mit $EE < 0$ können hier auch die Abschlusskosten berücksichtigt werden.

und

$$
\begin{aligned}
{}_tV &= A^*_{x+t,\overline{n-t}|} - P\,\mathrm{a}_{x+t,\overline{m-t}|} \\
&= \left[A^*_{x+t,\overline{n-t}|} - \frac{A^*_{x,\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{x,\overline{m}|}}\,\mathrm{a}_{x+t,\overline{m-t}|}\right] + EE - EE\left[1 - \frac{\mathrm{a}_{x+t,\overline{m-t}|}}{\mathrm{a}_{x,m}}\right]. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Der Ausdruck in der ersten Klammer ist nichts anderes als die Reserve der *voll* prämienzahlenden Versicherung (d. h. für $EE = 0$), derjenige in der zweiten Klammer die Reserve der gewöhnlichen gemischten Versicherung von der Dauer m. Die Hilfszahlen der ganz oder teilweise prämienfreien Versicherungen erhalten wir also, indem wir von den Hilfszahlen der voll prämienzahlenden Kombination die Hilfszahlen einer gemischten Versicherung der Dauer m, multipliziert mit der Einmaleinlage, abziehen.

Bezeichnen wir nun mit ${}_tG^n_x$ die Reserve der gemischten Versicherung vom Eintrittsalter x und der Dauer n, mit ${}_tS^n$ diejenige der reinen Sparoperation, so ist bekanntlich die Reserve ${}_tT^n_x$ der Versicherung auf festen Termin darstellbar als [3]

$$
{}_tT^n_x = v^n\,{}_tG^n_x + (1 - v^n)\,{}_tS^n. \qquad (19)
$$

Die Reserve der vorschüssig zahlbaren Erbrente 1 (Überlebens-Zeitrente) mit Prämienzahlungs-Dauer m Jahre kann dargestellt werden als

$$
\left.
\begin{aligned}
{}_tV &= \mathrm{a}_{\overline{n-t}|} - \mathrm{a}_{x+t,\overline{n-t}|} - \frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|} - \mathrm{a}_{x,\overline{n}|} - EE}{\mathrm{a}_{x,\overline{m}|}}\,\mathrm{a}_{x+t,\overline{m-t}|} \\
&= -\mathrm{a}_{\overline{n}|}\left(1 - \frac{\mathrm{a}_{\overline{n-t}|}}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}\right) + \mathrm{a}_{x,\overline{n}|}\left(1 - \frac{\mathrm{a}_{x+t,\overline{n-t}|}}{\mathrm{a}_{x,\overline{n}|}}\right) + EE \\
&\qquad + (\mathrm{a}_{\overline{n}|} - \mathrm{a}_{x,\overline{n}|} - EE)\left(1 - \frac{\mathrm{a}_{x+t,\overline{m-t}|}}{\mathrm{a}_{x,\overline{m}|}}\right) \\
&= -\mathrm{a}_{\overline{n}|}\,{}_tS^n + \mathrm{a}_{x,\overline{n}|}\,{}_tG^n_x + (\mathrm{a}_{\overline{n}|} - \mathrm{a}_{x,\overline{n}|} - EE)\,{}_tG^m_x + EE.
\end{aligned}
\right\} \qquad (20)
$$

Ihre Hilfszahlen lassen sich also zusammensetzen aus denen der reinen Sparversicherung und von gemischten Versicherungen. Dabei ist allerdings zu sagen, dass die Reserve der Erbrentenversicherung allein durch eine Hyperbel in der Regel schlecht approximiert wird. Dagegen ist die Approximation für Erbrentenversicherungen in Verbindung mit Termin- und gemischten Versicherungen sehr befriedigend.

Schliesslich lassen sich die Reserven der gemischten Versicherung mit abgekürzter Prämienzahlung, der Erlebensfallversicherung mit abgekürzter Prämienzahlung, der temporären Todesfallversicherung usw. mit oder ohne Erbrenten durch Kombination der Reserven der obigen beiden Versicherungsarten mit der Reserve der Erlebensfallversicherung, die wir mit ${}_tB_x^n$ abkürzen, entsprechend dem Rückkaufswert beim Ablauf der Prämienzahlungsdauer in einfacher und für die Praxis leicht zu handhabender Weise erhalten. Auch die Reserve der gemischten Versicherung auf 2 Leben lässt sich nach einer von H. Jecklin [4] gegebenen Formel durch

$$ {}_tV = {}_tG_x^n + {}_tG_y^n - {}_tS^n \tag{21}$$

in guter Näherung darstellen. Man vergleiche dazu die am Schlusse beigefügten Rechnungsbeispiele.

Die wichtigsten Kombinationsmöglichkeiten für die Hilfszahlen sind etwa die in Tabelle 1 im Anhang angegebenen, jedoch lassen sich auch weitere Versicherungsarten in ähnlich einfacher Weise behandeln, so z. B. die gemischte Versicherung mit niedriger Anfangsprämie, wobei die Prämienermässigung während h Jahren gewährt wird. Bezeichnet P_{x+h} die nach Ablauf der h Jahre zu bezahlende höhere Prämie, so berechnen wir zunächst

$$ {}_hV = A_{x+h,\overline{n-h}|} - P_{x+h}\,\mathsf{a}_{x+h,\overline{n-h}|} \quad \text{und} \quad {}_0V^* = A_{x,\overline{n}|} - P_{x+h}\,\mathsf{a}_{x,\overline{n}|}. $$

Während der ersten h Jahre sind die Hilfszahlen der Reserve gegeben durch

$$ {}_tG_x^n \text{ über } 1 $$
$$ -\,{}_tB_x^n \text{ über } (1 - {}_hV), $$

währenddem sie nach Ablauf der h Jahre dargestellt werden durch

$$ {}_tG_x^n \text{ über } 1 - {}_0V^* \ (> 1, \text{ weil } {}_0V^* < 0). $$

Versicherungen mit um t_0 Jahre rück- oder vordatiertem Beginn lassen sich ohne weiteres in unser Schema einordnen, indem man zunächst die (künstliche) Einmaleinlage $EE = A^*_{x+t_0,\overline{n-t_0}|} - P\,\mathsf{a}_{x+t_0,\overline{n-t_0}|}$ berechnet und darauf die Hilfszahlen gemäss Tabelle 1, aber für das Alter $x + t_0$ und die restliche Dauer $n - t_0$ benützt. Bei Versicherungen mit abgekürzter Prämienzahlung rechnet man nach Ablauf der Prämienzahlung am einfachsten so, wie wenn die Versicherung ab Beginn prämienfrei gewesen wäre.

Natürlich bietet die Zusammensetzung der Hilfszahlen in dieser Weise nur dann besondere Vorteile, wenn die Grundkombinationen, von denen wir ausgehen – also in unserem Falle gemischte Versicherung, Erlebensfall- und Sparversicherung –, vollständig tabelliert sind; andernfalls führt eine direkte Berechnung der Hilfszahlen anhand von drei Reservepunkten schneller zum Ziel.

Zum Schlusse wollen wir uns noch die Frage stellen, was für eine Gestalt ein Sterbegesetz haben müsste, damit sich die Reserve der gemischten Versicherung exakt durch (4) darstellen liesse. Einfachheitshalber bedienen wir uns der kontinuierlichen Methode und setzen

$$ {}_tV = gt + h\frac{t}{1-\varphi t}. \tag{22}$$

Aus der Differentialgleichung der Prämienreserve

$$ {}_tV' = (\mu_{x+t} + \delta)({}_tV - 1) + \frac{1}{a_{x,\overline{n}|}} \tag{23}$$

ergibt sich

$$ \mu_{x+t} = \frac{{}_tV' - \dfrac{1}{a_{x,\overline{n}|}}}{{}_tV - 1} - \delta. \tag{24}$$

Da der Nenner für $t = n$ verschwindet und μ_{x+t} für $t = n$ beschränkt bleiben muss, folgt daraus sofort, dass für gemischte Versicherungen

$$ {}_nV' = \frac{1}{a_{x,\overline{n}|}} = g + \frac{h}{(1-\varphi n)^2} \tag{25}$$

gilt, und wenn wir (22) in (24) einsetzen, folgt unter Benützung von (25) die einfache Formel

$$ \mu_{x+t} = \frac{h\left(\dfrac{1}{(1-\varphi n)^2} - \dfrac{1}{(1-\varphi t)^2}\right)}{1 - {}_tV} - \delta. \tag{26}$$

Für $t = n$ gilt speziell

$$ \mu_{x+n} = \frac{2\varphi}{g(1-\varphi n)^3 + h(1-\varphi n)} - \delta. \tag{27}$$

Damit besitzen wir ein Mittel, mit dem wir abschätzen können, durch welche Abweichungen in der Sterblichkeit bzw. im Zins ein durch die

Reserveapproximation (22) verursachter Fehler gerade kompensiert wird. Durch geeignete Unterteilung der Reserveapproximation in verschiedene Interpolationszonen haben wir es in der Hand, diese Abweichungen innert gewisser Schranken zu halten.

In den nachfolgenden Tabellen sind einige Beispiele von Reserveapproximationen zusammengestellt, wobei als Interpolationszonen durchwegs die ganze Versicherungsdauer bzw. Prämienzahlungsdauer gewählt wurde. Die Approximation ist bei den gemischten Versicherungen, bei den lebenslänglichen Versicherungen mit abgekürzter Prämienzahlung, bei den Versicherungen auf festen Termin und auch bei der gemischten Versicherung auf zwei Leben [1]) durchaus befriedigend, während die übrigen drei dargestellten Versicherungsarten – Erlebensfall-, Terminversicherung mit 20 % Erbrente, temporäre Todesfallversicherung – zur guten Approximation eines höheren Wertes für φ oder aber einer Unterteilung in 2 Interpolationszonen für längere Versicherungsdauern bedürfen. Immerhin heben sich auch in diesen letzteren drei Fällen die positiven und die negativen Abweichungen im Durchschnitt bis auf einen geringfügigen (und im übrigen positiven) Rest – er überschreitet in den angeführten Beispielen nirgends den Betrag einer Jahresprämie – auf.

---

[1]) Die Reserveapproximation der 2-lebigen Versicherung ist für die meisten in Frage kommenden Alter und Dauern wesentlich besser als im angeführten Beispiel $x = y = 35$, $n = 30$.

Tabelle 1 n = Versicherungsdauer
m = Prämienzahlungsdauer
EE = Einmal-Einlage am Versicherungsbeginn

Versicherungsart	*Zusammensetzung der Hilfszahlen*
Gemischt:	${}_tG_x^n$ über $1-EE$
Erlebensfallversicherung:	${}_tB_x^n$ über 1 $-{}_tG_x^n$ über EE
Gemischt mit abgekürzter Prämienzahlung:	${}_tG_x^m$ über $1-EE$ $-{}_tB_x^m$ über $1-A_{x+m,\overline{n-m}\rvert}$
Erlebensfallversicherung mit abgekürzter Prämienzahlung:	${}_tB_x^m$ über $E_{x+m,\overline{n-m}\rvert}$ $-{}_tG_x^m$ über EE
Temporäre Todesfall-versicherung:	${}_tG_x^n$ über $1-EE$ $-{}_tB_x^n$ über 1
Temporäre Todesfall-versicherung mit abgekürzter Prämienzahlung:	${}_tG_x^m$ über $1-EE$ $-{}_tB_x^m$ über $1-A_{x+m,\overline{n-m}\rvert}+E_{x+m\ \overline{n-m}\rvert}$
Terme-fixe-Versicherung:	${}_tS^n$ über $1-v^n$ $+{}_tG_x^n$ über v^n-EE
Terme-fixe-Versicherung mit abgekürzter Prämienzahlung:	${}_tS^m$ über $v^{n-m}-v^n$ $+{}_tG_x^m$ über v^n-EE
Erbrente R:	${}_tG_x^n$ über $R\,\mathrm{a}_{\overline{n}\rvert}-EE$ $-{}_tS^n$ über $R\,\mathrm{a}_{\overline{n}\rvert}$
Erbrente R mit abgekürzter Prämienzahlung:	${}_tG_x^n$ über $R\,\mathrm{a}_{x,\overline{n}\rvert}$ $+{}_tG_x^m$ über $R(\mathrm{a}_{\overline{n}\rvert}-\mathrm{a}_{x,\overline{n}\rvert})-EE$ $-{}_tS^n$ über $R\,\mathrm{a}_{\overline{n}\rvert}$
Gemischt mit Erbrente R:	${}_tG_x^n$ über $1+R\,\mathrm{a}_{\overline{n}\rvert}-EE$ $-{}_tS^n$ über $R\,\mathrm{a}_{\overline{n}\rvert}$
Terme-fixe-Versicherung mit Erbrente:	${}_tG_x^n$ über $v^n+R\,\mathrm{a}_{\overline{n}\rvert}-EE$ $+{}_tS^n$ über $1-v^n-R\,\mathrm{a}_{\overline{n}\rvert}$
Gemischt auf zwei Leben, Kapital zahlbar beim 1. Tod:	${}_tG_x^n$ über $1-EE$ $+{}_tG_y^n$ über $1-EE$ $-{}_tS^n$ über $1-EE$

Tabelle 2 $_tV$ *für gemischte Versicherung*

Grundlagen: SM 1939/44 à 2½% S = 10 000.—

a: genaue Werte *b*: optimale Approximation *c*: Approximation mit $\varphi = 13{,}5\ ^0/_{00}$

$t = \frac{nj}{10}$	$x = 20$ $n = 40$			$x = 25$ $n = 20$			$x = 35$ $n = 30$			$x = 40$ $n = 20$		
	a	*b* $\varphi = 8^0/_{00}$	*c*	*a*	*b* $\varphi = 9^0/_{00}$	*c*	*a*	*b* $\varphi = 16^0/_{00}$	*c*	*a*	*b* $\varphi = 19^0/_{00}$	*c*
$j = 1$	606	622	664	770	773	783	732	749	739	793	795	784
2	1277	1305	1366	1585	1589	1602	1512	1531	1515	1618	1621	1605
3	2031	2056	2115	2447	2451	2463	2338	2349	2335	2479	2482	2466
4	2868	2881	2918	3359	3360	3367	3206	3214	3204	3379	3381	3371
5	3790	3790	3790	4320	4320	4320	4127	4127	4127	4325	4325	4325
6	4795	4792	4746	5335	5334	5327	5107	5106	5117	5320	5320	5331
7	5889	5900	5807	6405	6406	6391	6157	6161	6184	6373	6374	6395
8	7094	7126	7005	7536	7538	7520	7294	7311	7341	7493	7497	7523
9	8443	8486	8381	8732	8734	8720	8554	8580	8606	8695	8701	8722
$g =$		–67.63	86.43		–187,15	64,56		149,12	104,23		212,15	315,82
$h =$		215.99	75.24		563,46	317,87		95,79	136,32		178,47	67,37

Tabelle 3 $_tV$ für $x = 35$, $n = 30$, *für verschiedene Versicherungsarten*

Grundlagen: SM 1939/44 à 2½% S = 10 000.—

a: genaue Werte *c*: Approximation mit $\varphi = 13{,}5\ ^0/_{00}$

	Lebenslänglich, Prämienzahlungsdauer 30 Jahre		Terme-fixe		Terme-fixe mit 20% Erbrente		Erlebensfall		Temporäre		Gemischte auf zwei Leben [1])	
	a	*c*	*a*	*c*	*a*	*c*	*a*	*c*	*a*	*c*	*a*	*c*
$g =$		136.60		98.35		146.71		–130.62		234.85		115.49
$h =$		67.89		139.82		111.04		276.05		–139.73		129.62
$t = 3$	600	622	715	732	848	787	529	471	203	268	763	752
6	1239	1263	1483	1503	1729	1605	1106	1019	407	497	1571	1539
9	1906	1925	2301	2318	2601	2458	1740	1653	598	682	2410	2367
12	2601	2611	3173	3182	3447	3351	2444	2386	762	817	3276	3242
15	3326	3326	4105	4105	4289	4289	3233	3233	895	895	4180	4170
18	4083	4073	5103	5095	5138	5281	4132	4213	975	905	5129	5161
21	4873	4858	6175	6163	6024	6335	5179	5348	978	837	6137	6224
24	5699	5689	7333	7324	7012	7463	6434	6666	860	762	7232	7374
27	6573	6573	8596	8596	8245	8679	7992	8202	562	404	8477	8625

[1]) Berechnung nach Formel (21)

Literaturangaben

[1] *H. Jecklin* und *H. Zimmermann:* Reserveberechnung auf Basis hyperbolischer Interpolation.

— Ergänzende Bemerkungen zur Reserveberechnung auf Basis hyperbolischer Interpolation (F-Methode).

— Weitere Ergänzungen zur F-Methode der Reserveberechnung.

(Alle 3 in «Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker», 1950/1951.)

[2] *W. Friedli:* Reserve und Rentenbarwert als analytische Funktion (Mitteilungen 1918).

[3] *E. Zwinggi:* Versicherungsmathematik, 1. Aufl. S. 86. (Birkhäuser, Basel.)

[4] *H. Jecklin:* Näherungswerte für die gemischte Versicherung mehrerer verbundener Leben (Mitteilungen 1946).

[5] *H. Jecklin* und *P. Strickler:* Eine Variante zur F-Methode der Reserverechnung (Mitteilungen 1954).