Das Erneuerungsproblem und seine Erweiterung auf stochastische Prozesse

Autor(en): **Ammeter, Hans**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **55 (1955)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-551328

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Das Erneuerungsproblem und seine Erweiterung auf stochastische Prozesse

Von *Hans Ammeter*, Zürich

Unter den Problemen, um die sich die schweizerischen Versicherungsmathematiker besonders bemüht haben, nimmt das Erneuerungsproblem eine hervorragende Stellung ein. Dafür zeugt schon der Name Christian Mosers, der das grundlegende mathematische Modell geschaffen hat, und auch die stattliche Zahl der in den «Mitteilungen» veröffentlichten Beiträge über das Erneuerungsproblem, die überwiegend von schweizerischen Autoren stammen (siehe Literaturverzeichnis). Im folgenden wird zunächst ein Überblick über die bisherigen Bemühungen um diesen Problemkreis gegeben und anschliessend versucht, einige Erweiterungen zu entwickeln. Dabei wird von der bei Problemen der angewandten Mathematik auftretenden Dreiteilung der Aufgabe,

Konstruktion eines zweckmässigen Modells und mathematische Formulierung des Problems,

Erforschung des Modells und mathematische Darstellung der Lösung,

Numerische Berechnung,

ausgegangen.

I. Das Mosersche Erneuerungsproblem

1. Die Entwicklung des Modells

Für das Erneuerungsproblem ist das grundlegende mathematische Modell von Christian Moser in seinem, bei Anlass des zwanzigjährigen Jubiläums unserer Vereinigung gehaltenen Vortrag entwickelt worden. Dieser Vortrag wurde im Band 21 der «Mitteilungen» veröffent-

licht [33] [1]) und zählt nicht nur wegen seines Gedankengehaltes, sondern auch wegen seiner klaren und überaus anschaulichen Form zu den klassischen Arbeiten der aktuarwissenschaftlichen Literatur. Weiteren Kreisen hat Moser seine Ideen in der dem IX. Internationalen Kongress der Versicherungsmathematiker in Stockholm unterbreiteten Arbeit «Integralgleichungen und sich erneuernde Gesamtheiten» zugänglich gemacht [34].

Mit diesen beiden Arbeiten beginnt die eigentliche Geschichte des Erneuerungsproblems. Selbstverständlich sind schon vorher einige Aktuare im Rahmen von besonderen Untersuchungen auf Fragen gestossen, welche in engem Zusammenhang mit der von Moser formulierten Problemstellung stehen, und haben unter bestimmten Voraussetzungen Lösungen gefunden. Derartige Arbeiten sind unter anderem von Kinkelin [25], Schaertlin [48], Schenker [49], Herbelot [23], Risser [45] und Alder [1] bekannt. Auch Moser selbst hat besondere Fragen aus der Erneuerungstheorie schon viele Jahre vor seinem Jubiläumsvortrag in seinen Vorlesungen behandelt. Die grundlegende Bedeutung der erwähnten Moserschen Arbeiten wird dadurch aber kaum berührt, sind doch alle späteren Arbeiten vom Moserschen Modell und von den von ihm geschaffenen Begriffen ausgegangen.

Am Beispiel einer Sterbekasse lässt sich das Mosersche Modell wie folgt schildern:

Gegeben ist eine Sterbekasse, welcher anfänglich $H(0)$ Mitglieder angehören, die durchwegs das niedrigste Eintrittsalter x_0 aufweisen und genau nach Massgabe eines bestimmten Sterbegesetzes ausscheiden. Jedes ausscheidende Mitglied wird sofort ersetzt durch ein neues Mitglied mit dem Eintrittsalter x_0, das seinerseits ebenfalls nach dem für den Eintrittsbestand geltenden Sterbegesetz ausscheidet. Anhand dieses Modelles formulierte Moser die nach ihm benannte Integralgleichung für die Erneuerungsdichte, auf die wir im nächsten Abschnitt zurückkommen werden.

Dieses Modell wurde schon sehr bald durch Wyss [58] und Zwinggi [60] und etwas später durch Féraud [13] und Richter [44] auf Gesamtheiten mit zeitlich veränderlichem Umfang erweitert. Ferner hat bereits Moser eine Integralbeziehung abgeleitet, nach der an die Bestandes-

[1]) Zahlen in [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

entwicklung geknüpfte Vorgänge – zum Beispiel die Bildung eines Deckungskapitals – mit Hilfe der vorher berechneten Erneuerungsdichte von der geschlossenen auf die offene Gesamtheit übertragen werden können. Später haben indessen Maret [31], [32] und Tarjan [55] gezeigt, dass diese Übertragung ohne vorherige Berechnung der Erneuerungsdichte direkt aus einer verallgemeinerten Integralgleichung erfolgen kann.

Das Mosersche Modell wurde in der Folge von Richter [44], Feller [12], Doob [9] und weiteren Autoren für stochastische Vorgänge verallgemeinert, bei denen das Ausscheiden der Elemente nicht mehr streng gesetzmässig, sondern unregelmässig und zufallsartig erfolgt.

Von Bartlett, Harris [22] und Kendall wurde das Mosersche Modell schliesslich noch in dem Sinne erweitert, dass bei jedem Austritt nicht nur ein neues Element, sondern mehrere nachrücken. Das Erneuerungsproblem geht dann in das Verzweigungsproblem über, das bei biologischen und atomphysikalischen Untersuchungen, insbesondere bei der sogenannten Kettenreaktion, eine Rolle spielt.

2. Die Mosersche Integralgleichung

Für die Behandlung des Erneuerungsproblems, insbesondere im Hinblick auf die spätere Erweiterung auf stochastische Prozesse, erweist es sich als zweckmässig – wenigstens teilweise – eine vom Üblichen abweichende Bezeichnung einzuführen. Für die Zeitvariable wird stets t geschrieben. Dies führt dazu, auch das Alter in der Absterbeordnung mit t und nicht wie üblich mit x zu bezeichnen. Für die Überlebensordnung schreiben wir $l(t)$ und setzen stets voraus, dass $l(0) = 1$ ist. Die Gesamtheit der im Zeitraum $(0,t)$ Verstorbenen wird mit

$$Q(t) = 1 - l(t),$$

die Ableitung dieser Gesamtheit nach t, die sogenannte Sterbedichte, mit

$$q(t) = Q'(t) = -l'(t)$$

bezeichnet. Bei kontinuierlicher Betrachtung bedeutet $q(t)\,dt$ die Wahrscheinlichkeit für ein Element, im Alters-Intervall $(t, t+dt)$ auszuscheiden. Bei diskontinuierlicher Betrachtung entspricht $q(t)$ der Anzahl der Gestorbenen d_{x+t}. Hier konnte die übliche Bezeichnung mit Rücksicht auf die Verwendung von d als Differentialsymbol nicht

benützt werden. Für die Sterbeintensität gilt schliesslich die bekannte Beziehung

$$\mu(t) = \frac{-l'(t)}{l(t)} = \frac{q(t)}{l(t)}.$$

Da die Elemente der Gesamtheit H nicht nur durch Tod, sondern auch durch andere Ursachen abgehen können, werden im folgenden die Funktionen $\mu(t)$, $q(t)$ und $Q(t)$ allgemeiner mit Ausscheideintensität, Ausscheidedichte und Ausscheideordnung benannt. Ferner wird $l(t)$ als Verbleibsordnung bezeichnet.

Unter Benützung dieser Begriffe und Bezeichnungen lässt sich der von Moser behandelte Fall folgendermassen entwickeln:

Gegeben ist ein Anfangsbestand von $H(0)$ Elementen, welche alle das niedrigste Eintrittsalter $t = 0$ aufweisen. Für den geschlossenen Bestand ergibt sich nach t Jahren ein Restbestand von

$$H(t) = H(0)\, l(t)$$

Elementen.

Geht man zum offenen Bestand über, so muss als neuer Begriff die Erneuerungsdichte $m'(t)$ eingeführt werden: $m'(t)\,dt$ bedeutet die Wahrscheinlichkeit für ein Element, im offenen Bestand während des Zeitintervalles $(t, t + dt)$ auszuscheiden und erneuert zu werden. Aus der Erneuerungsdichte, welche oft auch als Erneuerungsintensität bezeichnet wird, ergibt sich durch Integration die Erneuerungsfunktion

$$m(t) = \int_0^t m'(\tau)\, d\tau,$$

welche die Gesamtheit aller im Zeitraum $(0,t)$ aufgetretenen Erneuerungsfälle – im folgenden kurz akkumulierte Erneuerungszahl genannt – als Funktion der Zeit t angibt.

Für die Erneuerungsdichte $m'(t)$ hat Moser unter der Annahme einer stets gleichbleibenden Bestandeszahl die ohne weiteres einleuchtende Integralgleichung

$$H = H\, l(t) + \int_0^t H\, m'(t-\tau)\, l(\tau)\, d\tau \tag{Ia}$$

aufgestellt, welche nach Division mit der festen Bestandeszahl H in die einfachere Form

$$1 = l(t) + \int_0^t m'(t-\tau)\, l(\tau)\, d(\tau) \tag{Ib}$$

übergeht.

Im folgenden wird immer von der auf ein Element reduzierten Bestandeszahl ausgegangen, welche der Integralgleichung (Ib) entspricht.

Schon Moser hat die Integralgleichung durch Differenzieren in die Form

$$m'(t) = q(t) + \int_0^t m'(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau \tag{Ic}$$

übergeführt, aus der durch Integration die nachstehende Integralgleichung für die Erneuerungsfunktion

$$m(t) = Q(t) + \int_0^t m(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau \tag{Id}$$

hervorgeht.

Die Integralgleichungen (I) beziehen sich auf den Spezialfall, bei dem die Anfangsgeneration aus nur nulljährigen Elementen besteht. Der allgemeinere Fall, bei dem die Anfangsgeneration nicht nur aus nulljährigen Elementen besteht, oder noch allgemeiner einer anderen Ausscheideordnung folgt als die Neueintritte, lässt sich ebenfalls auf den Moserschen Spezialfall zurückführen.

Moser ging von der kontinuierlichen Methode aus. Wyss [58], [59] hat schon 1929 die wichtigsten Formeln auf die diskontinuierliche Methode übertragen. Weitere Untersuchungen über diskontinuierlich sich erneuernde Gesamtheiten sind von Maret [30] durchgeführt worden. In jüngster Zeit hat Kanters [24] in seiner unter der Leitung von Campagne entstandenen Dissertation das Erneuerungsproblem systematisch auf diskontinuierlicher Grundlage entwickelt.

3. Die theoretische Lösung der Moserschen Integralgleichung

Die innere Erforschung des Moserschen Modelles läuft analytisch auf die Lösung der Integralgleichungen (I) und die Diskussion ihrer Lösungen hinaus. Eine grosse Zahl von Arbeiten über das Erneuerungsproblem befasst sich mit diesem zweiten Teil der Aufgabe. Auf einige Lösungsvorschläge soll hier – ohne Vollständigkeit – kurz hingewiesen werden.

Zunächst gingen die Bemühungen dahin, analytische Ausscheidegesetze zu finden, welche eine Darstellung der Erneuerungsdichte oder

Erneuerungsfunktion in expliziter Form erlauben. Zwinggi [61] hat schon 1931 gezeigt, dass eine solche Lösung möglich ist, wenn die Ausscheidedichte $q(t)$ in der Form

$$q(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^k e^{-b_k t}$$

darstellbar ist. Von dieser Form haben in der Folge verschiedene Autoren Gebrauch gemacht; insbesondere sind hier Arbeiten von Brown [3], Hadwiger [21], Liechti [28] und Pestalozzi [40] zu nennen. Von einer etwas anderen Funktion ist Schulthess [50] in seinem bemerkenswerten Beitrag ausgegangen; es gelang ihm, die Lösung der Integralgleichungen (I) in expliziter Form darzustellen, wenn die Verbleibsordnung dem Gesetz von Achard

$$l(t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)^m$$

genügt.

Hadwiger [21] hat auf die Lösung der Integralgleichung mit der Neumannschen Reihe und in diesem Zusammenhang auf besondere Klassen von Funktionen hingewiesen, welche ein gewisses transzendentes, in ihren Parametern jedoch lineares Additionstheorem erfüllen.

Von besonderer Bedeutung für die Lösung der Moserschen Integralgleichung hat sich die Laplace-Transformation und die aus ihr hervorgehende Faltungssymbolik erwiesen, die Saxer [47] vor einigen Jahren in einem meisterhaften Vortrag vor unserer Vereinigung behandelt hat und auf die mit Rücksicht auf die späteren Entwicklungen hier etwas näher eingegangen werden soll.

Die Laplace-Transformierte $\varphi(v)$ einer Funktion $f(t)$ ist durch die Beziehung

$$L\{f(t)\} = \varphi(v) = \int_0^\infty e^{-tv} f(t)\, dt$$

definiert; umgekehrt ergibt sich die Funktion $f(t)$ aus ihrer Transformierten vermittelst der Inversionsformel

$$f(t) = L^{-1}\{\varphi(v)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{-tv} \varphi(v)\, dv\,.$$

Das in den Integralgleichungen (I) rechts auftretende Integral von der Form

$$\int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$$

gehört zum sogenannten Faltungstypus, das durch Laplace-Transformation in das gewöhnliche Produkt

$$L\{f\} \cdot L\{g\}$$

übergeht und zur symbolischen Darstellung durch

$$f(t) * g(t)$$

Anlass gegeben hat. Für die Faltungsoperation gilt sowohl das kommutative als auch das assoziative Gesetz; dies erlaubt es, für die fortgesetzte Faltung einer Funktion mit sich selbst

$$f(t) * f(t) = f^{*2}(t)$$

und

$$f^{*(r-1)}(t) * f(t) = f^{*r}(t)$$

zu schreiben. Die Funktion $f^{*r}(t)$ wird als die r-te Faltungspotenz der Funktion $f(t)$ bezeichnet.

Mit Hilfe der Laplace-Transformation und der dargelegten Faltungssymbolik lässt sich beispielsweise die Integralgleichung (Id) schreiben

$$L\{m(t)\} = L\{Q(t)\} + L\{m(t)\} \cdot L\{q(t)\},$$

aus der unmittelbar die Lösung

$$m(t) = L^{-1}\left\{\frac{L\{Q(t)\}}{1 - L\{q(t)\}}\right\} \tag{Id'}$$

folgt.

Durch die Laplace-Transformation wird die Lösung der Integralgleichung (Id) gewissermassen algebraisiert. Theoretische Untersuchungen lassen sich dadurch mit Hilfe von fast elementar anmutenden Operationen durchführen. Für das praktische Aufsuchen von Lösungen ist die Laplace-Transformation vor allem dann wertvoll, wenn es gelingt, $q(t)$ und $Q(t)$ durch Funktionen darzustellen, welche sich leicht transformieren lassen, und wenn man die Lösung rücktransformieren kann. Dies trifft zum Beispiel für das bereits erwähnte, von Zwinggi und weiteren Autoren benützte Funktionensystem zu.

4. Der Beharrungszustand

Besonderes Interesse hat bei der Erforschung des Moserschen Modelles von Anfang an die Frage des Beharrungszustandes gefunden. Schon Moser stellte sich diese Frage. Dabei nahm er a priori an, dass die Erneuerungsdichte $m'(t)$ einem festen Grenzwert zustrebe, den er mit dem reziproken Wert der mittleren Verbleibszeit eines Elementes (das heisst der mittleren Lebenserwartung)

$$e(0) = \int_0^\infty l(\tau)\, d\tau = \int_0^\infty \tau q(\tau)\, d\tau$$

identifizierte. In der Folge zeigte es sich jedoch, dass die exakte Formulierung des Grenzwertsatzes mit einer Reihe von mathematischen Knacknüssen verbunden ist. Wie Saxer [46] schon 1932 auseinandersetzte, ist nicht einmal die Definition des Beharrungszustandes selbstverständlich, sondern bedarf einer analytischen Umschreibung. Überdies herrschte anfänglich die Meinung, dass die Erneuerungsdichte sich stets wellenartig dem Grenzwert nähere. Hadwiger [15] zeigte 1937, dass die Erneuerungsdichte sich auch einseitig dem Grenzwert nähern kann (siehe zum Beispiel die Fälle B und C im III. Kapitel) und dass unter Umständen überhaupt kein Grenzwert erreicht wird. Nach Richter [44], der sich als erster systematisch mit der Frage des Beharrungszustandes befasst hat, unterscheidet man zwischen einer

Eigentlichen Stabilisierung

wenn

$$\lim_{t \to \infty} m'(t)$$

einem endlichen Wert zustrebt, und der

Stabilisierung im Mittel

wenn

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} m(t)$$

einem endlichen Wert zustrebt. Während für die «eigentliche Stabilisierung» besondere analytische Eigenschaften für das zugrunde liegende Ausscheidegesetz $q(t)$ erforderlich sind, genügt, wie Feller [10] und Legras [27] gezeigt haben, für die «Stabilisierung im Mittel» im wesentlichen die Endlichkeit der mittleren Lebenserwartung.

5. Die numerische Auswertung

In der umfangreichen Literatur über das Erneuerungsproblem findet man verhältnismässig selten numerisch durchgerechnete Beispiele. Immerhin haben sich doch einige Autoren an diesen dritten Teil des Problems herangewagt; unter ihnen sind schon früh Wyss [57], [58], [59] und Zwinggi [60], [61] und etwas später Schulthess [50] und Pestalozzi [40] hervorgetreten, in neuester Zeit haben die Holländer Brans, Campagne [2] und Kanters [24] beachtliche Beiträge zu diesem Teil des Problems geliefert. Trotzdem besteht zurzeit eher noch ein Missverhältnis zwischen der hochentwickelten Theorie und der praktischen Anwendung ihrer Ergebnisse. Diese Sachlage ist zu bedauern, besteht doch auf den verschiedensten Gebieten in- und ausserhalb des Versicherungswesens ein Bedürfnis für praktische Anwendungen. Es ist zu hoffen, dass dieser dritte Teil der Lösung des Erneuerungsproblems bald in vermehrtem Masse das Interesse der praktisch tätigen Mathematiker finden wird. Zum vornherein lässt sich dabei feststellen, dass die Entwicklung praktisch befriedigender numerischer Methoden kaum leichter fallen wird als etwa die Aufstellung der symbolischen Lösungsformel (Id'), von welcher der Weg bis zum numerischen Ergebnis noch weit ist. Schwierigkeiten bietet die Entwicklung geeigneter numerischer Verfahren insbesondere deshalb, weil der Arbeitsaufwand nicht beliebig hoch sein darf, sondern innert gewissen, ziemlich engen, wirtschaftlich tragbaren Grenzen gehalten werden muss. Hier harren noch interessante Probleme ihrer Lösung.

II. Der stochastische Erneuerungsprozess

1. Allgemeines

Wie im vorigen Kapitel betont wurde, geht man beim Moserschen Erneuerungsmodell von der in der elementaren Versicherungsmathematik üblichen Annahme aus, dass die Elemente der betrachteten Gesamtheit genau nach der zugrunde gelegten Ausscheideordnung abgehen. Diese allzu idealisierte Voraussetzung trifft in der Wirklichkeit kaum je zu. Vielmehr erfolgt das Ausscheiden der Elemente ähnlich wie bei einem stochastischen Prozess unregelmässig. Im folgenden wird versucht, das Mosersche Modell auf stochastische Prozesse zu verallgemeinern.

Schon Richter [44] hat diese erweiterte Problemstellung aufgegriffen und hat unter anderem den Begriff der «wahrscheinlichkeitstheoretischen Stabilisierung» aufgestellt. Nach ihm haben eine Reihe von weiteren Autoren die Grenzwerteigenschaften des stochastischen Erneuerungsprozesses untersucht. Hier sind vor allem, neben Richter, Chung [5], [6], [7], Doob [9], Feller [12], Schwarz [51] und Täcklind [52], [53] zu nennen.

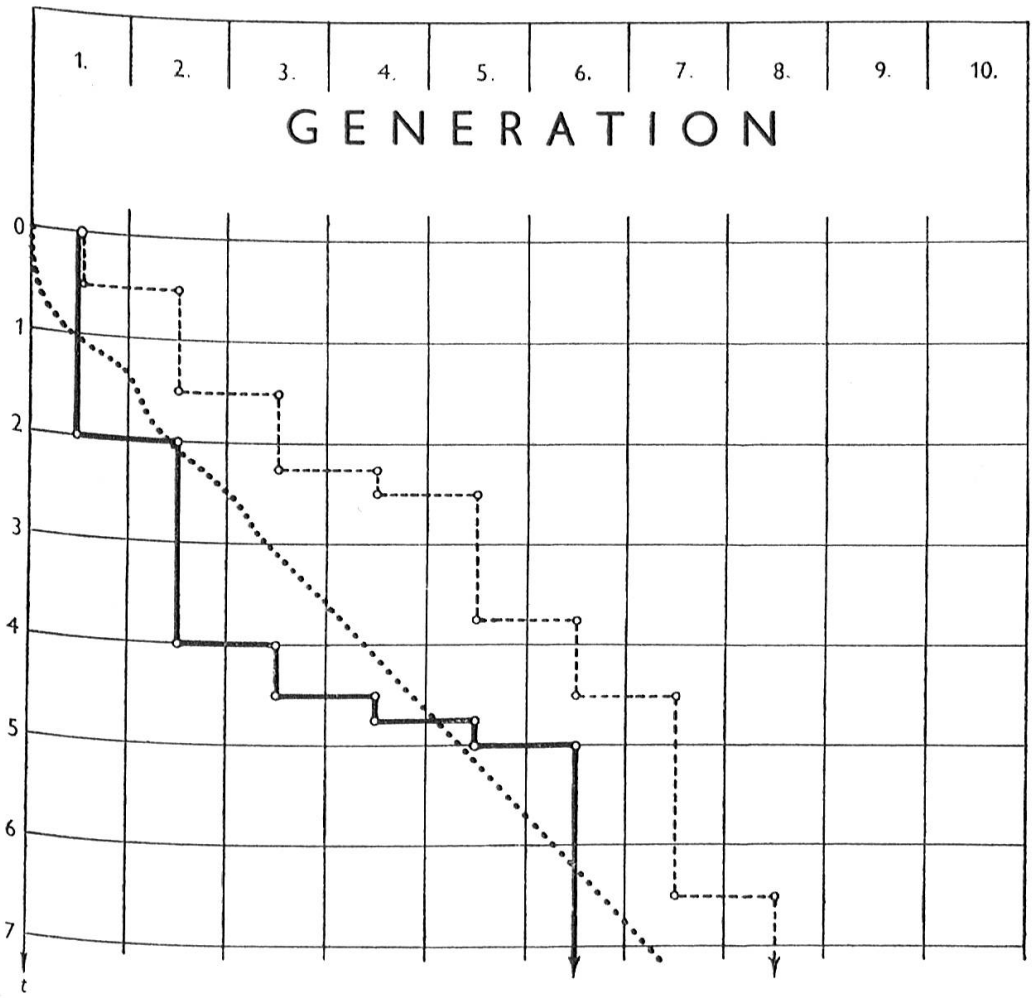
Für die Behandlung des Erneuerungsproblems auf der Grundlage der Regeln des stochastischen Prozesses sprechen vor allem drei Gesichtspunkte. Einmal erscheint es als wünschenswert, zu prüfen, inwieweit sich die abgeänderten Voraussetzungen auf die bisher bekannten Resultate auswirken. Ferner bietet der Einbezug der stochastischen Komponente die Möglichkeit, den Schwankungsbereich der vorausberechneten Erneuerungsfunktion abzuklären. Schliesslich erlaubt die stochastische Betrachtungsweise, an den Aufbau einer Risikotheorie für sich erneuernde Versicherungsbestände heranzutreten.

Beim stochastischen Erneuerungsmodell ist es zweckmässig, vom Spezialfall eines Bestandes auszugehen, der nur aus einem Element besteht. Dieses Element scheidet in irgendeinem Zeitpunkt aus und wird sofort durch ein neues ersetzt. Dieses neue Element gehört der zweiten Generation an; bei seinem Ausscheiden wird es ersetzt durch ein Element, das der dritten Generation angehört usw. Die «Lebenslinie» der aufeinanderfolgenden, den verschiedenen Generationen angehörenden Elemente lässt sich im nachstehenden Diagramm (Figur 1) anhand zweier Beispiele verfolgen.

Im ersten Beispiel (ausgezogene Linie) scheidet das Element erstmals nach 2 Zeiteinheiten aus, wird später nach 4, $4\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$ und 5 Zeiteinheiten jeweilen nochmals erneuert und gehört dann der sechsten Generation an. Die gestrichelte Linie zeigt eine andere praktisch mögliche Erneuerungsfolge. Durch die punktierte Linie wird anderseits der Verlauf der Erneuerungsfunktion angedeutet, wie er sich auf Grund des Moserschen Modells in Verbindung mit bestimmten Annahmen über das Ausscheiden (Fall D im Kapitel III) ergeben würde. Die auf Grund der Regeln des stochastischen Prozesses ausscheidenden Elemente weisen eine Lebenslinie auf, welche in geradlinigen Stufen um die Erneuerungsfunktion herum fortschreitet.

Es liegt auf der Hand, dass beim stochastischen Erneuerungsprozess keine bestimmten Aussagen möglich sind über den Verlauf der

Figur 1 Generationenbahnen



akkumulierten Erneuerungszahl im konkreten Einzelfall. Eine mathematische Theorie über den Einzelfall ist daher nicht möglich. Hingegen gelangt man zu einer mathematisch formulierbaren Theorie, wenn man das Modell vom konkreten Einzelfall auf die Gesamtheit aller möglichen Verläufe des Erneuerungsprozesses erweitert und jeder Verlaufsmöglichkeit eine relative Häufigkeit oder mathematische Wahrscheinlichkeit zuordnet. Diese Wahrscheinlichkeiten lassen sich angeben, wenn man für jeden Zeitpunkt t und jede Generation im Diagramm der Figur 1 eine Übergangswahrscheinlichkeit in die nächste Generation festlegt. Im folgenden wird angenommen, dass diese Übergangswahrscheinlichkeit stets durch die dem Alter t des Elementes zugeordnete Ausscheidedichte $q(t)\,dt$ gegeben sei.

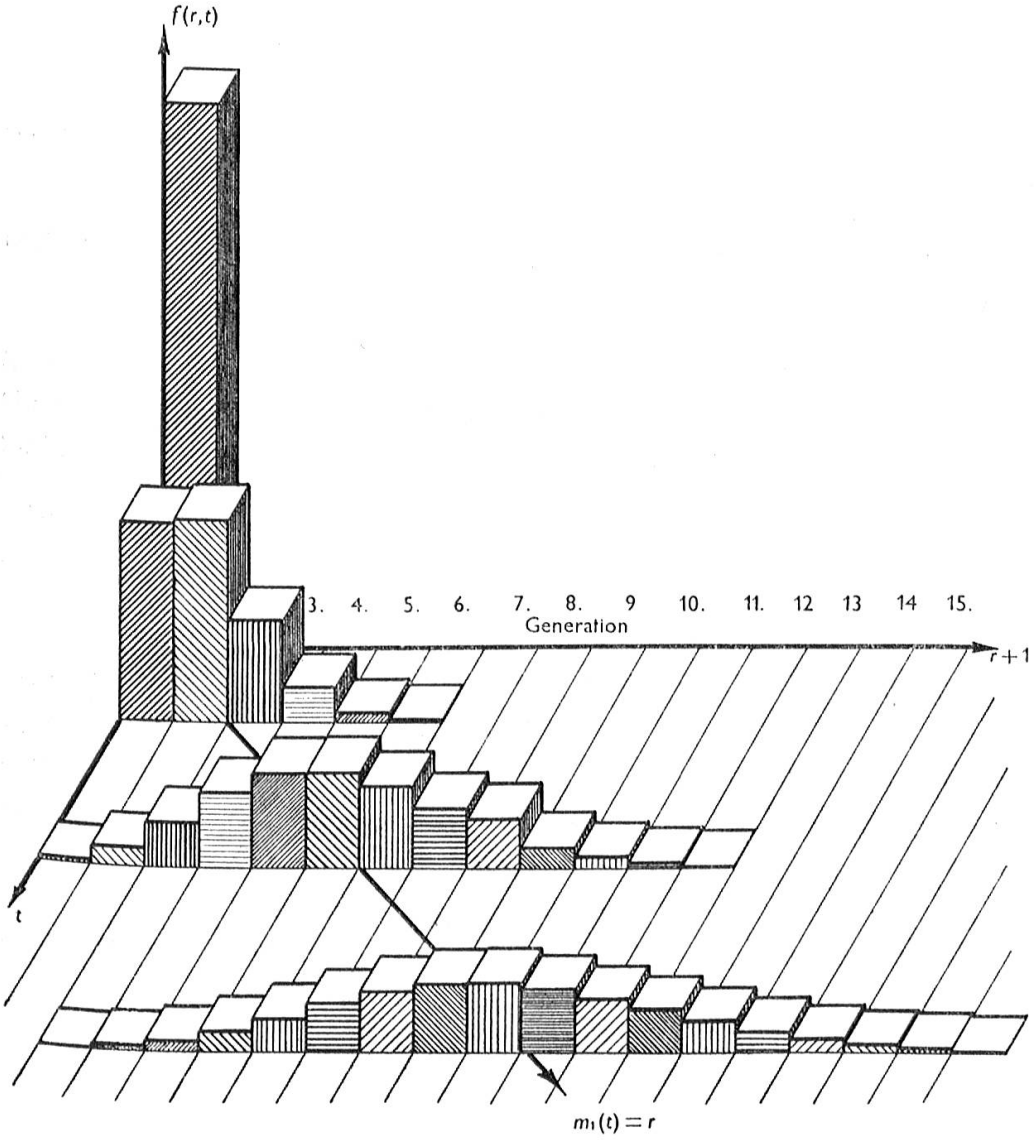
Zu einem anschaulichen Bild über das Wesen des stochastischen Erneuerungsprozesses gelangt man, wenn man sich dessen Ablauf in grosser Zahl wiederholt denkt. Die Masse dieser Einzelelemente, welche nacheinander den Erneuerungsprozess durchlaufen, sei durch den in der Figur 2 im Ursprung aufgestellten senkrechten Quader gegeben. Jedes einzelne im grossen Quader enthaltene Element läuft zuerst innerhalb der Bahn der ersten Generation, um nach seiner Erneuerung in die Bahn der zweiten Generation hinüberzuwechseln usw. Längs verschiedener Fanggeraden in der Grundrissebene mit $t =$ konstant wird die Häufigkeit der Elemente ausgezählt, welche sich im Zeitpunkt t in den verschiedenen Generationenbahnen befinden. Die Masse der im Ursprungsquader enthalten gewesenen Elemente verteilt sich dann auf die längs der Fanggeraden $t =$ konstant angeordneten Quaderreihen. Die Höhe der einzelnen Quader gibt die Häufigkeit der Elemente an, welche nach der Zeit t beispielsweise der $(r + 1)$-ten Generation angehören oder, mit anderen Worten, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Element bis zum Zeitpunkt t r-mal erneuert worden ist. Die längs einer Fanggeraden $t =$ konstant aufgestellten Quaderreihen geben die Häufigkeitsverteilung oder Frequenzfunktion der akkumulierten Erneuerungszahl r wieder. Diese Frequenzfunktion ist in der Figur 2 für drei Werte von t angegeben. Die Zahlenwerte stützen sich auf die Annahmen des Falles A im Kapitel III.

In der ersten Quaderreihe nimmt die Höhe der Generationsquader von der zweiten Generation an mit steigender Generationsnummer fortgesetzt ab; die Wahrscheinlichkeit, dass ein Element nach kurzer Zeit schon mehrmals erneuert wurde, nimmt somit rasch ab. In der zweiten und erst recht in der dritten Quaderreihe ändert sich das Bild, indem die ursprünglich monoton fallende Reihe in eine Verteilung von glockenförmigem Typus übergeht, bei der sich die Häufigkeiten verhältnismässig immer enger um einen Zentralwert gruppieren.

Im Rahmen der Theorie über den stochastischen Erneuerungsprozess stellt die Ermittlung der in Figur 2 dargestellten Verteilungen der akkumulierten Erneuerungszahl r eine der wichtigsten Grundaufgaben dar, welche für die Lösung von verschiedenen weiteren Problemen die Basis bildet. In der vorliegenden Arbeit wird nur auf diese Grundaufgabe eingegangen. Weitere Grundaufgaben sind zum Beispiel die Bestimmung der Altersverteilung im Zeitpunkt t und die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit, dass die akkumulierte Erneuerungs-

zahl r für jeden Zeitpunkt t nie eine bestimmte Schranke $k(t)$ überschreitet, eine Fragestellung, welche mit dem klassischen Ruinproblem verwandt ist.

Figur 2 Modell der Generationshäufigkeiten



2. Die Verteilung der akkumulierten Erneuerungszahl

Die Frequenzfunktion der akkumulierten Erneuerungszahl r im Zeitpunkt t sei mit $f(r,t)$ und die zugehörige Verteilungsfunktion mit

$$F(r,t) = \sum_{\varrho=0}^{r} f(\varrho,t)$$

bezeichnet; $f(r,t)$ ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass bis zum Zeitpunkt t genau r Erneuerungsfälle aufgetreten sind; $F(r,t)$ stellt demgegenüber die Wahrscheinlichkeit dar, dass bis zum Zeitpunkt t höchstens r Erneuerungsfälle vorgekommen sind.

A. Das Elementarmodell

Nachstehend wird die Verteilung der zufälligen Variablen r zunächst für folgendes Elementarmodell bestimmt:

a) der Anfangsbestand besteht nur aus einem Element mit dem Alter $t = 0$;

b) für das Ausscheiden dieses Elementes gilt die Verbleibsordnung $l(t)$ und die Ausscheidedichte $q(t)$; beide Funktionen werden als stetige und differenzierbare Funktionen der Zeit t vorausgesetzt;

c) beim Ausscheiden des jeweilen dem Bestand angehörenden Elementes rückt sofort ein neues nulljähriges Element nach, so dass der Bestand stets aus einem Element besteht.

Im Elementarmodell vereinfacht sich die Anzahl der im infinitesimalen Zeitintervall $(t, t+dt)$ möglichen Ereignisse in die leicht überblickbare Alternative Ausscheiden oder Nichtausscheiden. Aus der für das Elementarmodell gefundenen Lösung lassen sich die Lösungen für allgemeinere Fälle leicht aufbauen.

Unter den genannten Voraussetzungen ergibt sich der Reihe nach

$$\left.\begin{aligned} f(0,t) &= l(t) \\ f(1,t) &= \int_0^t f(0,t-\tau)\,q(\tau)\,d\tau \\ f(2,t) &= \int_0^t f(1,t-\tau)\,q(\tau)\,d\tau \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ f(r,t) &= \int_0^t f(r-1,t-\tau)\,q(\tau)\,d\tau \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Mit Hilfe der in Abschnitt I, 3 entwickelten Faltungssymbolik lassen sich die Formeln (1) folgendermassen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} f(0,t) &= l(t) \\ f(1,t) &= f(0,t) * q(t) = l(t) * q(t) \\ f(2,t) &= f(1,t) * q(t) = l(t) * q^{*2}(t) \\ &\vdots \\ f(r,t) &= f(r-1,t) * q(t) = l(t) * q^{*r}(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1_1^*)$$

Da

$$l(t) = 1 - \int_0^t q(\tau)\, d\tau = 1 - q(t) * 1$$

ist, so ergibt sich für die Frequenzfunktion der akkumulierten Erneuerungszahl die Formel

$$f(r,t) = \int_0^t \{q^{*r}(\tau) - q^{*(r+1)}(\tau)\}\, d(\tau)\,. \qquad (1_2^*)$$

Die Ausscheidedichte $q(t)$ lässt sich als Frequenzfunktion der zufälligen Variablen t auffassen; $q(t)\,dt$ stellt die Wahrscheinlichkeit dar, dass das Ausscheidealter für ein Element zwischen t und $t + dt$ liegt. Die zugehörige Ausscheidefunktion

$$Q(t) = \int_0^t q(\tau)\, d\tau$$

stellt dann die Verteilungsfunktion des Ausscheidealters t und die Verbleibsordnung

$$l(t) = 1 - Q(t)$$

das Komplement zur Verteilungsfunktion dar. In gleicher Weise lässt sich auch $q^{*r}(t)$, die r-te Faltungspotenz von $q(t)$, als Frequenzfunktion auffassen; $q^{*r}(t)\,dt$ stellt die Wahrscheinlichkeit dar, dass die Summe der Ausscheidealter für die ersten r ausgeschiedenen und jeweils erneuerten Elemente zwischen t und $t + dt$ liegt. Für die zugehörige Verteilungsfunktion gilt

$$Q(^*r,t) = \int_0^t q^{*r}(\tau)\, d\tau$$

und

$$l(^*r,t) = 1 - Q(^*r,t)\,.$$

Der Einfachheit halber nennen wir im folgenden die Funktionen $Q(*r,t)$ und $l(*r,t)$ Ausscheidefunktion und Verbleibsordnung r-ten Grades. Mit Hilfe dieser Funktionen lässt sich Formel (1_2^*) in die einfacheren Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} f(r,t) &= Q(*r,t) - Q(*(r+1),t) \\ f(r,t) &= l(*(r+1),t) - l(*r,t) \end{aligned}\right\} \qquad (1_3^*)$$

überführen. Daraus folgt der

Satz 1: Die Wahrscheinlichkeit, dass bis zum Zeitpunkt t genau r Erneuerungsfälle auftreten, ist gleich der Differenz zwischen den Werten der Verbleibsordnungen vom Grade $r+1$ und r im Zeitpunkt t.

Aus Formel (1_3^*) folgt unmittelbar für die Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} F(r,t) &= \sum_{\varrho=0}^{r} f(\varrho,t) \\ &= \quad l(*1,t) \\ &\quad + l(*2,t) - l(*1,t) \\ &\quad + l(*3,t) - l(*2,t) \\ &\qquad\quad \vdots \\ &\quad + l(*(r+1),t) - l(*r,t), \end{aligned}$$

das heisst es ist

$$F(r,t) = l(*(r+1),t). \qquad (2)$$

Satz 2: Die Wahrscheinlichkeit, dass bis zum Zeitpunkt t höchstens r Erneuerungsfälle auftreten, ist gleich dem Wert der Verbleibsordnung $(r+1)$-ten Grades im Zeitpunkt t.

B. Zwei Erweiterungen

Die verhältnismässig engen Voraussetzungen des Elementarmodelles, welche zu den Sätzen 1 und 2 geführt haben, lassen sich leicht erweitern.

a) Zunächst sei der Fall betrachtet, bei dem das ursprüngliche Element nicht nulljährig ist, sondern ein höheres Anfangsalter x aufweist. Dieser allgemeinere Fall läuft darauf hinaus, dass für die Anfangsgeneration eine andere Verbleibsordnung $\bar{l}(t)$ gilt als für die

späteren Neueintritte, welche nach der Ordnung $l(t)$ ausscheiden. Unter diesen etwas allgemeineren Voraussetzungen ergibt sich für die Frequenzfunktion an Stelle der Formel (1_2^*) der Ausdruck

$$\bar{f}(r,t) = \int_0^t \{\bar{q}(\tau) * q^{*(r-1)}(\tau) - \bar{q}(\tau) * q^{*r}(\tau)\}\, d\tau\,. \tag{$\bar{2}$}$$

b) Die Formeln für die Frequenz- und Verteilungsfunktionen lassen sich ferner auf Bestände mit n Elementen erweitern, wenn die Frequenzfunktionen für alle Einzelelemente untereinander stochastisch unabhängig sind. Für die Frequenzfunktion ${}^{(n)}f(r,t)$ des aus n Elementen zusammengesetzten Bestandes gilt dann, wenn für die einzelnen Elemente die Frequenzfunktionen $f_1(r,t), f_2(r,t) \ldots f_n(r,t)$ bestimmt werden,

$${}^{(n)}f(r,t) = f_1(r,t) * f_2(r,t) \ldots * f_n(r,t). \tag{$1^{(n)}$}$$

Die Faltungsoperation ist hier nach der diskontinuierlichen Methode hinsichtlich der Variablen r durchzuführen.

* * *

Bemerkenswert ist, dass die Verteilung der akkumulierten Erneuerungszahl r nicht – wie beim Moserschen Modell – über den Umweg einer Integralgleichung gefunden werden kann, sondern direkt durch Faltung aus der gegebenen Ausscheidedichte $q(t)$ hervorgeht.

3. Charakteristische Funktion und Potenzmomente

A. Die charakteristische Funktion

Die der Frequenzfunktion $f(r,t)$ zugeordnete charakteristische Funktion ist definiert durch

$$\varphi_r(u,t) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{iur} f(r,t)\,. \tag{3_1}$$

Unter Berücksichtigung der Integralrekursion (1) lässt sich diese Beziehung umformen in

$$\begin{aligned}\varphi_r(u,t) &= l(t) + \sum_{r=1}^{\infty} e^{iur} \int_0^t f(r-1, t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau \\ &= l(t) + \int_0^t e^{iu} q(\tau)\, d\tau \sum_{r=0}^{\infty} e^{iur} f(r, t-\tau)\,.\end{aligned}$$

Es ergibt sich somit die Integralgleichung

$$\varphi_r(u,t) = l(t) + e^{iu} \int_0^t \varphi_r(u, t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau\,. \tag{3_2}$$

Diese Integralgleichung lässt sich mit Hilfe der Laplace-Transformation überführen in

$$L\{\varphi\} = L\{l\} + e^{iu} L\{\varphi\} L\{q\}\,.$$

Daraus folgt für die charakteristische Funktion die Lösung

$$\varphi_r(u,t) = L^{-1}\left\{\frac{L\{l\}}{1 - e^{iu} L\{q\}}\right\}. \tag{3_3}$$

B. Integralgleichungen für die Momente

Die unter A abgeleitete charakteristische Funktion ist vor allem als momentenerzeugende Funktion nützlich. Die Potenzmomente der Verteilung $f(r,t)$ ergeben sich nämlich durch fortgesetztes Differenzieren der charakteristischen Funktion nach u und anschliessendes Nullsetzen von u. Für das k-te Moment um Null

$$m_k(t) = \sum_{r=0}^{\infty} r^k f(r,t) \tag{4}$$

gilt die Beziehung

$$m_k(t) = i^{-k} \varphi_r^{(k)}(u,t) \quad \text{für } u = 0 \tag{5}$$

worin $\varphi_r^{(k)}$ die k-te Ableitung von φ_r bedeutet.

a) Für das erste Moment um Null oder den Mittelwert erhält man auf Grund der Beziehung (5)

$$m_1(t) = i^{-1} \varphi_r'(u,t) \quad \text{für } u = 0\,. \tag{5_1}$$

Die Ableitung der Integralgleichung (3_2) nach u führt auf

$$\varphi_r'(u,t) = i\, e^{iu} \int_0^t \varphi_r(u, t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau + e^{iu} \int_0^t \varphi_r'(u, t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau\,.$$

Setzt man $u = 0$ und substituiert man

$$\varphi_r(0,t) = 1 \quad \text{und} \quad \int_0^t q(\tau)\, d\tau = Q(t)\,,$$

so erhält man für den Mittelwert $m_1(t)$ die Integralgleichung

$$m_1(t) = Q(t) + \int_0^t m_1(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau\,. \tag{6}$$

Die Integralgleichung (6) ist identisch mit der Moserschen Integralgleichung (Id) für die Erneuerungsfunktion. Daraus lässt sich schliessen, dass die Erneuerungsfunktion $m(t)$ beim Moserschen Modell identisch ist mit dem Mittelwert der akkumulierten Erneuerungszahl r im Rahmen des erweiterten Modells.

Durch die Integralgleichung (6) ist gewissermassen die Brücke zwischen den beiden Modellen gefunden; es besteht hier ein analoger Zusammenhang wie in der Risikotheorie, wo das erste Moment der Verteilung des Gesamtschadens auf die Prämie führt, welche sich auf Grund des Modells der elementaren Versicherungsmathematik ergibt.

b) Um das zweite Moment der Frequenzfunktion $f(r,t)$ zu bestimmen, wird zunächst die zweite Ableitung der charakteristischen Funktion (3) gebildet und anschliessend wiederum $u = 0$ gesetzt. Man erhält so die Integralgleichung

$$m_2(t) = 2m_1(t) - Q(t) + \int_0^t m_2(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau\,. \tag{7}$$

Mit Hilfe der Laplace-Transformation lässt sich die Lösung folgendermassen darstellen

$$m_2(t) = L^{-1}\left\{\frac{2L\{m_1\} - L\{Q\}}{1 - L\{q\}}\right\}. \tag{7'}$$

Unter Berücksichtigung von Formel (6) und der aus (Ic) sich ergebenden Beziehung

$$1 + L\{m_1'\} = \frac{1}{1 - L\{q\}} \tag{8}$$

kann (7′) umgeformt werden in

$$\begin{aligned} L\{m_2\} &= 2L\{m_1\}\,[1 + L\{m_1'\}] - L\{m_1\} \\ &= 2L\{m_1\}\,L\{m_1'\} + L\{m_1\}\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt nach Rücktransformation

$$m_2(t) = 2\int_0^t m_1(t-\tau)\, m_1'(\tau)\, d\tau + m_1(t)$$

oder unter Benützung der Faltungssymbolik

$$m_2(t) = 2m_1(t) * m_1'(t) + m_1(t)\,. \tag{9*}$$

c) Für das dritte und vierte Moment führen analoge Rechnungen auf die Schlussformeln

$$m_3(t) = 6\,m_1(t) * \{m_1'(t)\}^{*2} + 6\,m_1(t) * m_1'(t) + m_1(t)\,, \qquad (10^*)$$

$$m_4(t) = 24\,m_1(t) * \{m_1'(t)\}^{*3} + 36\,m_1(t) * \{m_1'(t)\}^{*2} + 14\,m_1(t) * m_1'(t) + m_1(t)\,. \qquad (11^*)$$

d) Die Formeln (9*), (10*) und (11*) lassen vermuten, dass die höheren Momente durch den Mittelwert $m_1(t)$ allein darstellbar sind. Dieser Sachverhalt lässt sich nachweisen, indem man aus der transformierten Integralgleichung (3_2) $L\{l\}$ und $L\{q\}$ vermittelst der Beziehungen (6) und (8) eliminiert. Man erhält so die neue transformierte Integralgleichung

$$L\{\varphi\}\,[1 + L\{m_1'\}\,(1 - e^{iu})] = L\{1\}\,,$$

aus der durch Rücktransformation

$$\varphi_r(u,t) = 1 - (1 - e^{iu}) \int_0^t \varphi_r(u, t-\tau)\, m_1'(\tau)\, d\tau \qquad (12)$$

folgt. Da in Gleichung (12) nur die Erneuerungsdichte $m_1'(t)$ als gegebene Funktion auftritt, und weil charakteristische Funktion und Verteilung einander umkehrbar eindeutig entsprechen, so gilt unter den getroffenen Voraussetzungen der

Satz 3: Die Verteilung der akkumulierten Erneuerungszahl r ist durch den Verlauf der Erneuerungsdichte $m_1'(t)$ vollständig bestimmt.

4. Der Beharrungszustand

Beim stochastischen Erneuerungsmodell kann im Gegensatz zum Moserschen Modell selbstredend keine «eigentliche Stabilisierung» auftreten, weil das Ausscheiden der Elemente stets unregelmässig erfolgt. Hingegen kann sich eine «Stabilisierung im Mittel» ergeben, nämlich dann, wenn

$$\lim_{t \to \infty} \frac{m_1(t)}{t}$$

gegen einen endlichen Grenzwert strebt. Dieser Fall tritt ein, wenn – wie verschiedene Autoren gezeigt haben – die mittlere Verbleibszeit eines Elementes, das heisst das erste Moment in der Altersverteilung der Sterbefälle $q(t)$, endlich ist.

Richter [44] hat den Begriff der «wahrscheinlichkeitstheoretischen Stabilisierung» eingeführt. Diese tritt ein, wenn die «Stabilisierung im Mittel» zustande kommt und darüber hinaus der Grenzwert

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sigma(t)}{m_1(t)}$$

gegen Null strebt. Darin bedeutet $\sigma(t)$ die mittlere Abweichung der Verteilung $f(r,t)$

$$\sigma(t) = \sqrt{m_2(t) - \{m_1(t)\}^2} \, .$$

Richter zeigt, dass wahrscheinlichkeitstheoretische Stabilisierung eintritt, wenn die beiden ersten Momente der Altersverteilung der Sterbefälle $q(t)$ endlich sind. Schwarz [51] und weitere Autoren haben demgegenüber gezeigt, dass die Existenz des ersten Moments, das heisst der mittleren Lebenserwartung, für das Eintreten der wahrscheinlichkeitstheoretischen Stabilisierung genügt. Das bedeutet nichts anderes, als dass die Stabilisierung im Mittel die wahrscheinlichkeitstheoretische Stabilisierung automatisch nach sich zieht.

Neben der Erweiterung dieser Stabilisierungskriterien erscheint es vor allem wichtig, die Existenz und die Form der Grenzverteilung für grosse t näher abzuklären. Eine eingehende Erörterung dieser Frage soll späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben. Immerhin lassen sich auf Grund der abgeleiteten Formeln bereits einige Hinweise über die vermutliche Lösung abgeben.

Nach dem Satz 2 ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $F(r,t)$ für das Auftreten von höchstens r Erneuerungsfällen durch r-fache Faltung der gegebenen Ausscheidedichte $q(t)$. Nun führt aber nach dem zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung die fortgesetzte Faltung einer Funktion – sofern gewisse Momentenbedingungen erfüllt sind – schliesslich auf eine Gauss-Verteilung als Grenzfunktion. Daraus folgt, dass

$$\left.\begin{aligned} \lim_{r \to \infty} F(r,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = 1 - \Phi(x) \\ \text{mit } x &= \frac{t - (r+1)\, e_1}{\sqrt{(r+1)\, \bar{e}_2}} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

worin e_1 und $\bar{e}_2$ Mittelwert und Streuung der gegebenen Ausscheidefunktion $q(t)$ bedeuten. Nach Formel (13) ergibt sich somit die

Grenzwahrscheinlichkeit für jeden Argumentwert r je aus einer Gauss-Verteilung. Daraus lässt sich noch nicht schliessen, dass die Verteilung $F(r,t)$ selbst in eine Gauss-Verteilung übergeht; immerhin liegt die Vermutung nahe, dass unter noch näher abzuklärenden Voraussetzungen eine Gauss-Verteilung als Grenzfunktion auftritt. Beispielsweise ergibt sich in den im nächsten Kapitel behandelten Sonderfällen A und B eine Gauss-Verteilung als Grenzfunktion. Die nähere Abklärung der Natur der Grenzverteilung für grosse t stellt eine noch der Lösung harrende Aufgabe dar.

III. Theoretische Untersuchungen über einige Sonderfälle

1. Allgemeine Voraussetzungen

Im folgenden werden die theoretischen Ergebnisse des vorigen Kapitels auf einige im Rahmen des Erneuerungsproblems typische Sonderfälle angewendet. In allen Fällen wird die Zeitvariable t so transformiert, dass die mittlere Verbleibszeit für ein nulljähriges Element (die sogenannte mittlere Lebenserwartung)

$$e(0) = \int_0^\infty \tau q(\tau)\, d\tau \equiv 1$$

wird. Dadurch wird die ungleiche Ausscheidegeschwindigkeit bei den verschiedenen Ausscheidegesetzen standardisiert, und es wirkt sich nur noch die Form des Ausscheidegesetzes aus.

Zunächst wird die Klasse der Ausscheidegesetze betrachtet, bei denen die Ausscheidedichte $q(t)$ sich in der Form

$$q_k(t) = \frac{k^k e^{-tk} t^{k-1}}{\Gamma(k)} \tag{14}$$

darstellen lässt. Dieses von verschiedenen Autoren bereits benützte Funktionensystem (siehe Seite 270) erfüllt einige einfache Faltungsbeziehungen und erlaubt daher eine Lösung des Erneuerungsproblems in expliziter Form. Überdies lassen sich die praktisch vorkommenden Ausscheidegesetze fast immer mit hinreichender Näherung aus Gesetzen von der Form (14) zusammensetzen. Für die weiteren Untersuchungen werden die drei Sonderfälle von (14) näher untersucht, welche den Parameterwerten $k = 1$, 2 und $\frac{1}{2}$ entsprechen.

$$\text{Fall A mit } k = 1: \quad \left.\begin{aligned} q(t) &= e^{-t} \\ Q(t) &= 1 - e^{-t} \\ l(t) &= e^{-t} \\ \mu(t) &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{14A}$$

Der Fall A entspricht einem Ausscheidegesetz mit stets gleichbleibender Ausscheideintensität; bei ihm liegt von Anfang an der Beharrungszustand vor. Dieser Fall nimmt innerhalb der Gesamtheit aller Ausscheidegesetze eine zentrale Stellung ein.

$$\text{Fall B mit } k = 2: \quad \left.\begin{aligned} q(t) &= 4t\,e^{-2t} \\ Q(t) &= 1 - e^{-2t}(1 + 2t) \\ l(t) &= e^{-2t}(1 + 2t) \\ \mu(t) &= \frac{4t}{1 + 2t} \end{aligned}\right\} \tag{14B}$$

Der Fall B entspricht einem Ausscheidegesetz mit monoton ansteigender Ausscheideintensität. Abgesehen vom durch die Standardisierung bedingten Zahlenfaktor entsteht die Ausscheidedichte $q(t)$ im Fall B durch einmalige Faltung aus der Ausscheidedichte beim Fall A. In gleicher Weise ergäben sich durch weitere Faltungen die Sterbegesetze (14) mit $k = 3, 4, 5$ usw.

$$\text{Fall C mit } k = \tfrac{1}{2}: \quad \left.\begin{aligned} q(t) &= \frac{e^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{2\pi}} \\ Q(t) &= \int_0^t \frac{e^{-\frac{\tau}{2}}\, \tau^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{2\pi}}\, d\tau \\ l(t) &= 1 - Q(t) \\ \mu(t) &= \frac{q(t)}{l(t)} \end{aligned}\right\} \tag{14C}$$

Das Gesetz C stellt den inversen Fall zum Gesetz B dar. Während die unter B erwähnten Fälle mit $k = 2, 3, 4$ usw. durch fortgesetzte Faltung aus dem Fall A entstehen, ergibt sich der Fall C gewissermassen als Faltungswurzel aus dem Gesetz A. Im Gegensatz zum Fall B mit steigender Sterbeintensität führt der Fall C zu einer von $\mu(0) = +\infty$ auf $\mu(\infty) = \frac{1}{2}$ monoton fallenden Ausscheideintensität.

Die Ausscheidefunktion $Q(t)$ lässt sich im Fall C nicht in expliziter Form darstellen, aber vermittelst der Substitution

$$t = \tau^2$$

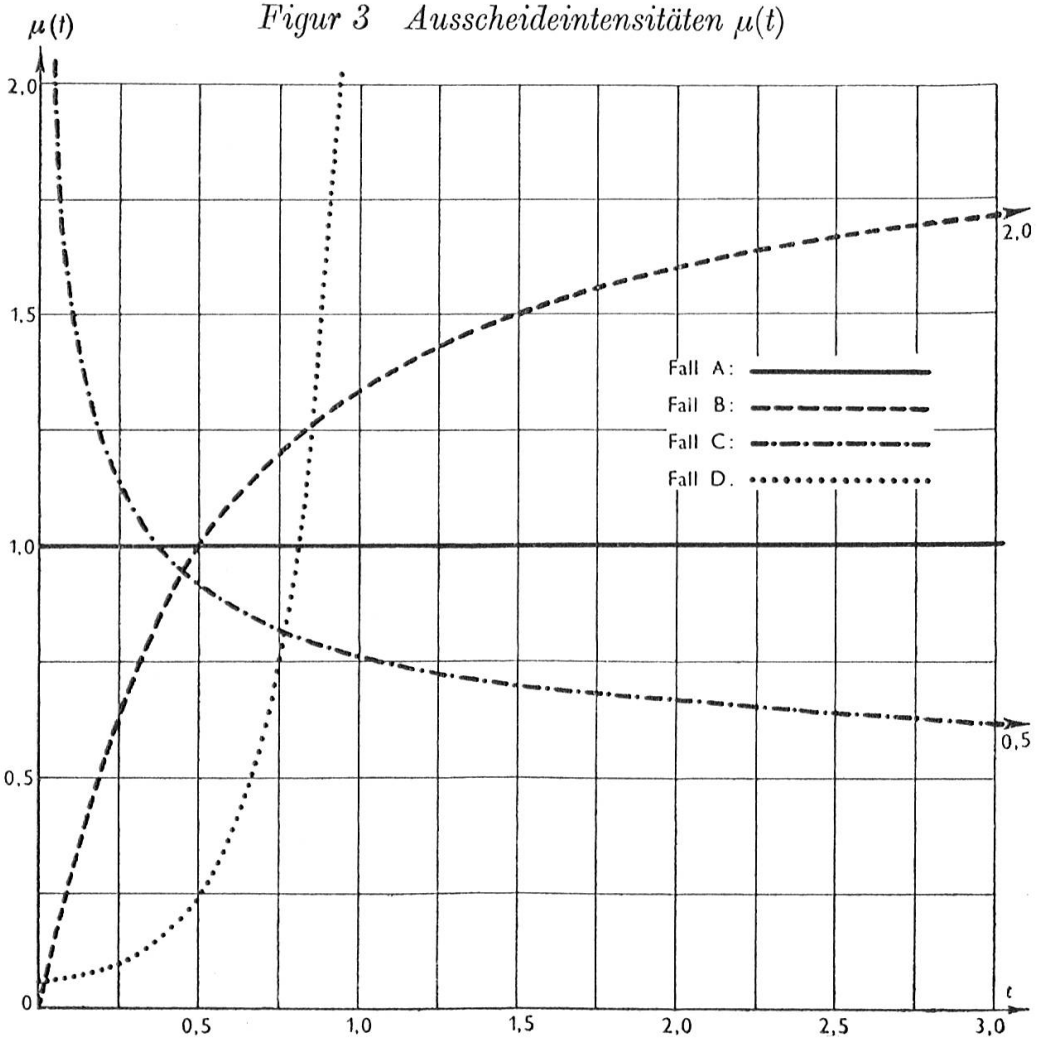
auf das Gauss-Laplacesche Wahrscheinlichkeitsintegral

$$Q(t) = 2 \int_0^{\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{\tau^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \, d\tau$$

zurückführen und numerisch auswerten.

Fall D: Der Fall D stützt sich auf die Gruppenversicherungssterbetafel RMG 1953 [65], wobei $t = 0$ für $x = 25$ angenommen und zur

Figur 3 Ausscheideintensitäten $\mu(t)$



Vereinfachung der Rechnung je 5 Altersjahre zusammengefasst werden. Die mittlere Lebenserwartung für $x = 25$ beträgt 49,405 Jahre und wird analog wie bei den Fällen A, B und C als Zeiteinheit aufgefasst. Alle Berechnungen für den Fall D werden nach der diskontinuierlichen Methode durchgeführt.

Die Verläufe der Sterbeintensitäten in den Fällen A–D sind in der nebenstehenden Figur 3 graphisch dargestellt.

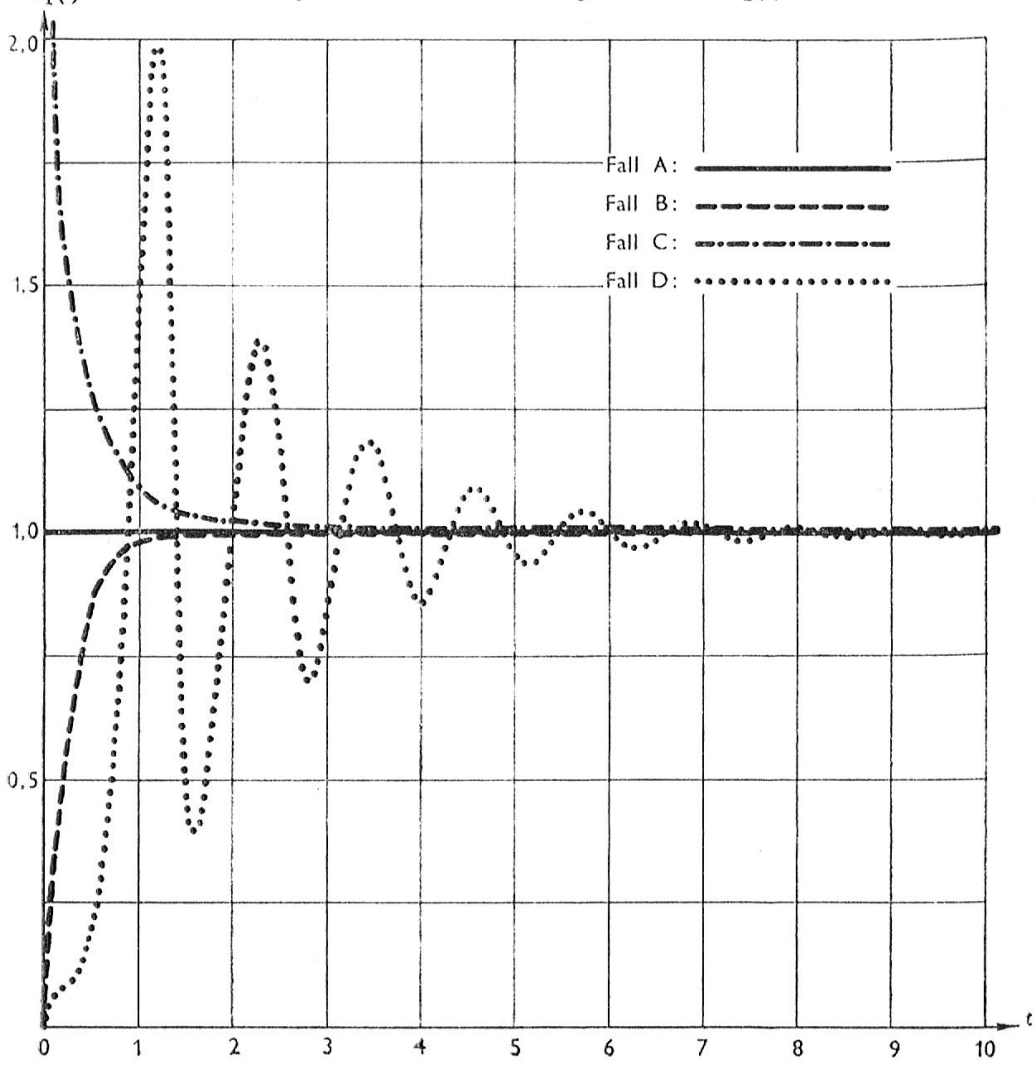
2. Erneuerungsdichte und Erneuerungsfunktion

In den Figuren 4a und 4b sind die Verläufe der Erneuerungsdichte und der Erneuerungsfunktion für die Fälle A–D graphisch dargestellt, und zwar für einen Versicherungsbestand, der sich anfänglich nur aus nulljährigen Elementen zusammensetzt, die beim Ausscheiden jeweils durch ein neues nulljähriges Element ersetzt werden.

Die Figur 4a zeigt, dass im Fall A die Erneuerungsdichte $m_1'(t)$ horizontal verläuft; das bedeutet, dass hier von Anfang an der Beharrungszustand vorliegt. Im Fall B nähert sich die Erneuerungsdichte von unten und im Fall C von oben her dem Grenzwert, welcher für alle vier Fälle im Niveau der für den Fall A geltenden Horizontalen liegt. Die inverse Stellung der Fälle B und C kommt somit auch in der zugehörigen Erneuerungsdichte zum Ausdruck. Bemerkenswert ist ferner, dass die Erneuerungsdichten bei den Fällen B und C sich nicht wellenartig, sondern einseitig dem Grenzwert nähern. Der Fall D, der – obschon es sich um eine diskontinuierliche Erneuerung handelt – ebenfalls als glatte Kurve eingezeichnet wurde, führt zu dem bei den praktisch vorkommenden Ausscheidefunktionen charakteristischen wellenartigen Kurvenverlauf. Die gewählten Beispiele umfassen somit vier typische Fälle für den Übergang in den Beharrungszustand.

In Figur 4b sind die Verläufe der Erneuerungsfunktion $m_1(t)$ dargestellt. Im Fall A ergibt sich eine schräg ansteigende Gerade als Erneuerungsfunktion; diese Gerade stellt gleichzeitig die Asymptotenrichtung der Erneuerungsfunktion in den drei anderen Fällen dar. Wie zu erwarten war, verlaufen die Erneuerungsfunktionen B und C einseitig der Geraden A. Trotz des wellenartigen Verlaufs der Erneuerungsdichte ergibt sich auch im Fall D eine einseitig von der Geraden A anwachsende Erneuerungsfunktion.

Figur 4a Erneuerungsdichten $m_1'(t)$

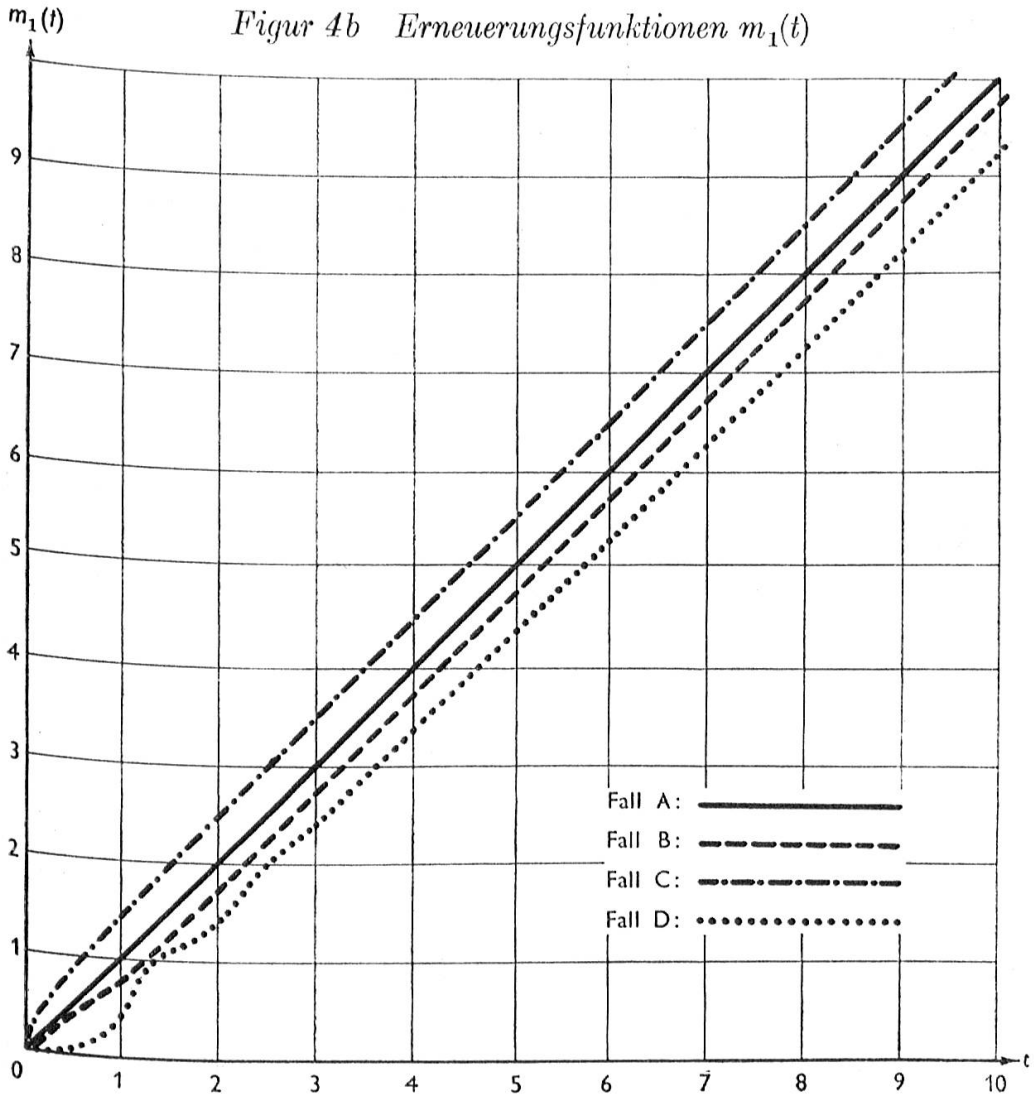


3. Die Frequenzfunktionen der akkumulierten Erneuerungszahlen

In den Figuren 5 sind die Frequenzfunktionen der akkumulierten Erneuerungszahlen $f(r,t)$ für die Zeitpunkte $t_1 = 1{,}012$, $t_2 = 5{,}060$ und $t_3 = 10{,}120$ dargestellt. Diesen Argumentwerten entsprechen beim Fall D die ganzzahligen Jahre 50, 250 und 500. Alle Frequenzfunktionen beziehen sich auf den Elementarfall, bei dem die sich erneuernde Gesamtheit anfänglich nur aus einem nulljährigen Element besteht, das bei jedem Ausscheiden durch ein neues nulljähriges Element ersetzt wird.

Die Berechnung der Frequenzfunktionen stützt sich in allen Fällen auf die Formeln (1_2^*) und (1_3^*). Es ergeben sich folgende Formeln:

Figur 4b Erneuerungsfunktionen $m_1(t)$



Fall A: Im Fall A gilt für die Ausscheidedichte die Formel

$$q_A(t) = e^{-t}.$$

Die zugehörige Transformierte oder charakteristische Funktion lautet

$$L\{q_A\} = (1-iv)^{-1}.$$

Nach dem Faltungssatz erhält man die charakteristische Funktion der r-ten Faltungspotenz von $q_A(t)$ durch r-maliges Potenzieren der charakteristischen Funktion von $q_A(t)$; das heisst man hat

$$L\{q_A^{*r}\} = (1-iv)^{-r},$$

woraus durch Rücktransformation für die r-te Faltungspotenz von $q_A(t)$

der Ausdruck

$$q_A^{*r}(t) = \frac{e^{-t}\, t^{r-1}}{(r-1)!}$$

folgt. Die zugehörige Verbleibsordnung lautet

$$l_A(*r,t) = \int_t^\infty \frac{e^{-\tau}\, \tau^{r-1}}{(r-1)!}\, d\tau = e^{-t}\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} \cdots \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\right).$$

Nun ist nach Formel (1_3^*)

$$f(r,t) = l(*(r+1),t) - l(*r,t),$$

daraus folgt

$$f_A(r,t) = \frac{e^{-t}\, t^r}{r!}. \tag{15A}$$

Der Ausdruck rechts in Formel (15A) stellt die bekannte Poisson-Verteilung dar, welche für den homogenen stochastischen Prozess charakteristisch ist und welche zu den wichtigsten Verteilungsgesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Risikotheorie gehört. Dieses Ergebnis ist plausibel, weil der Erneuerungsprozess sich im Fall A von Anfang an im Beharrungszustand befindet.

Der Fall A stellt die Brücke dar zwischen dem Modell des stochastischen Erneuerungsprozesses und dem klassischen Urnenschema mit Zurücklegen der gezogenen Kugeln, bei dem die Zusammensetzung des Urneninhaltes stets gleich bleibt und das beim Übergang auf kontinuierlich erfolgende Ziehungen ebenfalls auf die Poisson-Verteilung führt.

Fall B: Im Fall B führt eine analoge Rechnung wie beim Fall A auf das Schlussergebnis

$$f_B(r,t) = \frac{e^{-2t}\,(2t)^{2r}}{(2r)!} + \frac{e^{-2t}\,(2t)^{2r+1}}{(2r+1)!}, \tag{15B}$$

das eine verallgemeinerte zweigliedrige Poisson-Verteilung darstellt.

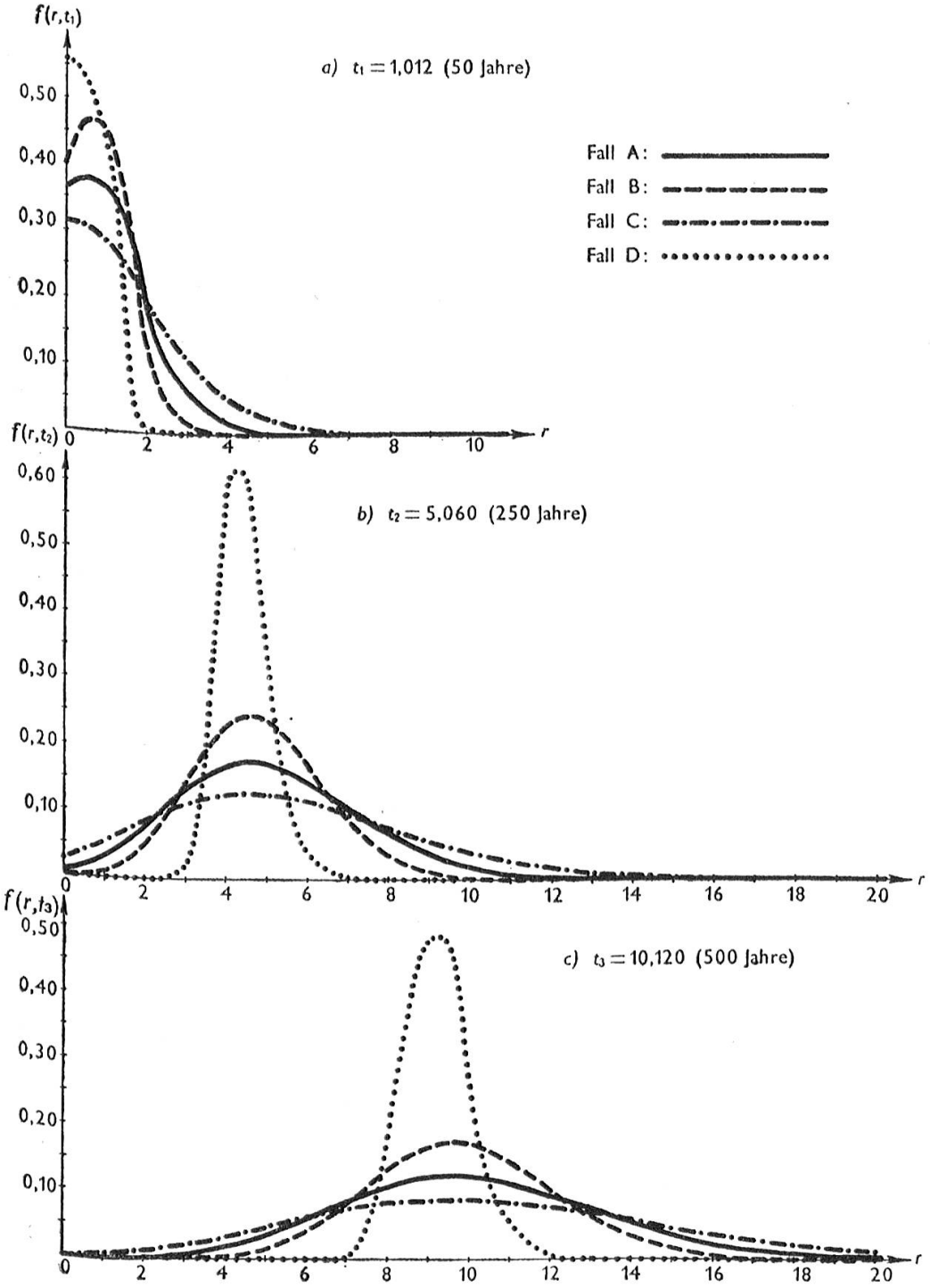
Fall C: Im Fall C ergibt sich in ähnlicher Weise die Schlussformel

$$f_C(r,t) = \int_0^t \left\{ \frac{e^{-\frac{\tau}{2}}\, \tau^{\frac{r}{2}-1}}{2^{\frac{r}{2}}\, \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} - \frac{e^{-\frac{\tau}{2}}\, \tau^{\frac{r+1}{2}-1}}{2^{\frac{r+1}{2}}\, \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)} \right\} d\tau, \tag{15C}$$

welche die Frequenzfunktion $f(r,t)$ auf die Differenz der χ^2-Verteilungen für r und $r+1$ Freiheitsgrade zurückführt.

Fall D: Die Rechnung erfolgt nach der im Abschnitt IV, 1 näher dargelegten numerischen Methode.

Figur 5 *Frequenzfunktionen $f(r,t)$ der akkumulierten Erneuerungszahl r*



Verfolgt man die Frequenzkurven für den gleichen Fall jeweils für die drei Werte $t_1 = 1{,}012$, $t_2 = 5{,}060$ und $t_3 = 10{,}120$, so stellt man eine mit t fortgesetzt sich verbessernde Symmetrisierung der Frequenzfunktion fest. In allen Fällen scheint die Frequenzfunktion gegen die symmetrische Normalverteilung zu streben; in den Fällen A und B lässt es sich nachweisen, dass die Frequenzfunktion im Beharrungszustand tatsächlich in eine Normalverteilung übergeht.

Für festes t weist die Verteilung D die kleinste und die Verteilung C die grösste Streuung auf. Die Poisson-Verteilung A nimmt eine Mittelstellung ein. Der Fall A ist durch die sogenannte «normale Dispersion» gekennzeichnet, bei der

$$m_1(t) = \overline{m}_2(t) = t$$

ist, das heisst der Mittelwert $m_1(t)$ und die Streuung $\overline{m}_2(t)$ sind gleich gross. Bei den Verteilungen B und D ist die Streuung $\overline{m}_2(t)$ kleiner und im Fall C grösser als der Mittelwert $m_1(t)$. Als Mass dieser Streuungseigenschaften des stochastischen Erneuerungsprozesses wird der Erneuerungs-Divergenzquotient

$$E^2(t) = \frac{\overline{m}_2(t)}{m_1(t)}$$

eingeführt. Diese Masszahl nimmt in den Fällen A–D für $t = 10{,}120$ zum Beispiel folgende Werte an:

Fall	$E^2(t)$
A	1,000
B	0,519
C	1,882
D	0,078

In den Fällen B und D liegt der Divergenzquotient unter und im Fall C über dem Normalwert 1. Die entsprechenden Verteilungskurven weisen demnach unternormale und übernormale Dispersion auf.

Mit Hilfe des Divergenzquotienten lässt sich näherungsweise die Güte des Ausgleichs bei verschiedenen Ausscheidegesetzen messen. Beispielsweise kann man das Verhältnis der erforderlichen Elementenzahlen für zwei sich erneuernde Gesamtheiten angeben, welche zu gleich grossen relativen mittleren Abweichungen

$$\frac{\sqrt{\overline{m}_2(t)}}{m_1(t)}$$

führen. Es ist

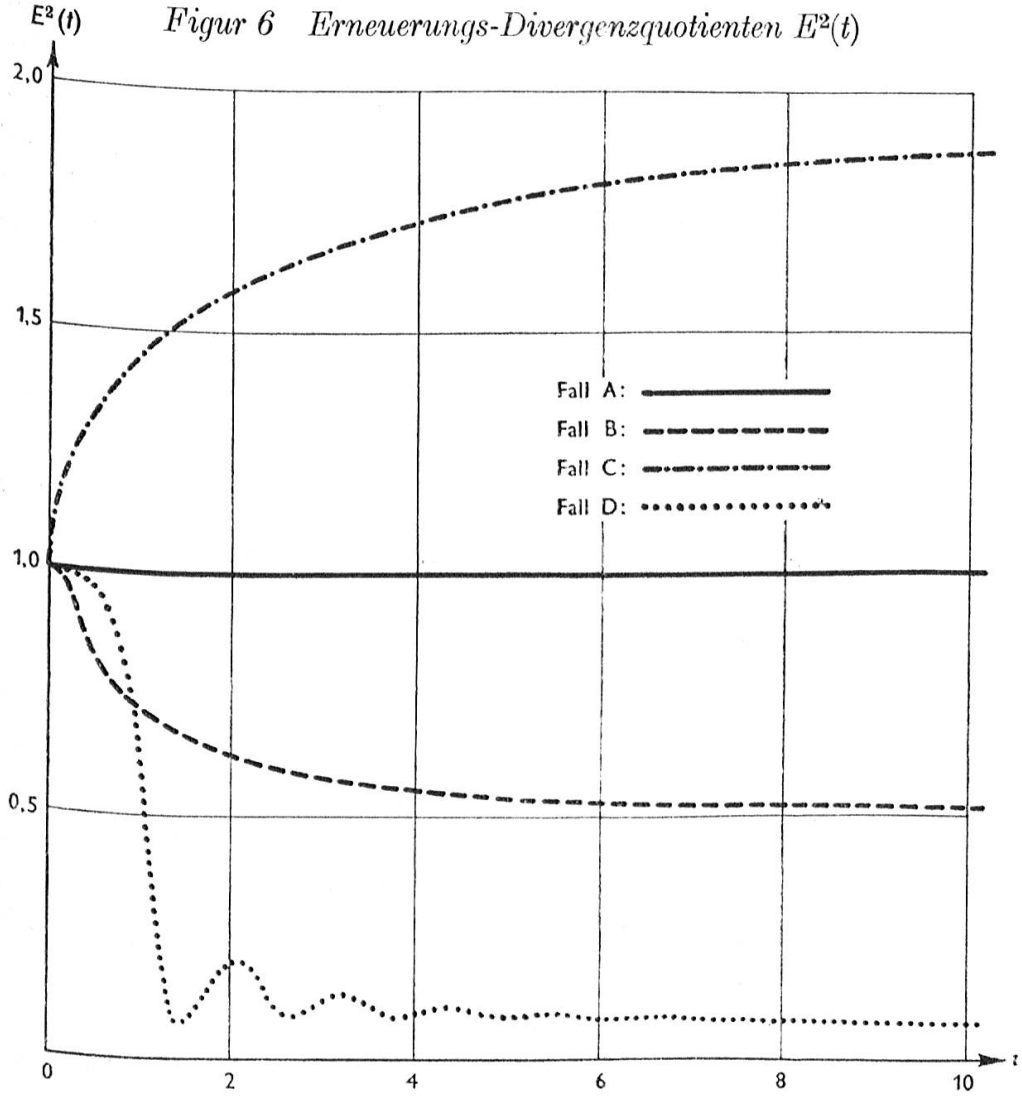
$$\frac{n_A}{n_D} = \frac{E_A^2(t)}{E_D^2(t)} \cdot \frac{m_1^D(t)}{m_1^A(t)} \sim \frac{E_A^2(t)}{E_D^2(t)},$$

weil unter den getroffenen Annahmen das Verhältnis der Mittelwerte $m_1(t)$ gegen Eins strebt. Für $t = 10{,}120$ ergibt sich für die geschilderten Ausscheidegesetze A und D näherungsweise das Verhältnis der äquivalenten Elementzahlen

$$n_A : n_D \sim 12 : 1 .$$

Dieses Verhältnis veranschaulicht, dass die üblichen Sterbegesetze bei sich erneuernden Gesamtheiten zu einem bedeutend besseren Ausgleich führen als der homogene stochastische Prozess.

Figur 6 Erneuerungs-Divergenzquotienten $E^2(t)$



Die Entstehung der unter- und übernormalen Dispersion in den Fällen B und D einerseits und C anderseits lässt sich leicht erklären. Die Fälle mit unternormaler Dispersion entstehen bei den Ausscheidegesetzen mit steigender Ausscheideintensität. In diesen Fällen bewirkt das Eintreten eines Erneuerungsfalles eine Senkung und umgekehrt das Ausbleiben eine Steigerung in der Wahrscheinlichkeit für einen weiteren Erneuerungsfall. Bei fallender Ausscheideintensität (Fall C) liegen die Verhältnisse umgekehrt. Steigende und fallende Ausscheideintensitäten bewirken somit eine Art negativer oder positiver Wahrscheinlichkeitsansteckung, ähnlich wie sie im Urnenschema von Eggenberger-Polya für Wahrscheinlichkeitsansteckung in Erscheinung tritt.

Aufschlussreich ist der Verlauf des Erneuerungs-Divergenzquotienten $E^2(t)$, wie er in der Figur 6 dargestellt ist. In allen Fällen beginnt die Kurve bei $t = 0$ mit dem Wert $E^2(0) \equiv 1$. Im Fall A verläuft der Divergenzquotient horizontal; in den übrigen Fällen entfernt sich $E^2(t)$ zuerst schnell und nachher immer langsamer vom Ausgangswert und nähert sich je einem Grenzwert; bemerkenswert sind wiederum der monotone Verlauf in den Fällen B und C und die wellenartigen Schwingungen im Fall D. Die Frage bleibt offen, welchen Grenzwerten die drei Verläufe von $E^2(t)$ zustreben.

IV. Anwendungen

Im folgenden wird versucht, einige Anwendungen der theoretischen Ergebnisse in den Kapiteln II und III zu skizzieren.

1. Die praktische Berechnung der Erneuerungsfunktion

Für viele praktische Aufgaben ist die Erneuerungsfunktion $m_1(t)$ (oder die Erneuerungsdichte $m_1'(t)$) zu berechnen. Die Ermittlung dieser Funktion ist an sich nicht schwierig, artet aber – wenn längere Zeiträume in Betracht fallen – in eine kaum zu bewältigende Häufung von elementaren Rechenoperationen aus. Für die praktische Durchführung derartiger Berechnungen ist eine neue Lage entstanden, seit die modernen Rechenautomaten auf elektronischer Grundlage dazu herangezogen werden können. Dank der in freundlicher Weise von der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt erhaltenen

Erlaubnis konnte versuchsweise der im vorigen Kapitel geschilderte Fall D (Gruppenversicherungstafel RMG 1953) mit Hilfe eines Elektronenrechners ausgewertet werden.

Die aufeinanderfolgenden Erneuerungszahlen können nach verschiedenen Methoden berechnet werden. Gewöhnlich erfolgt die Berechnung nach einer der Integralgleichung (Ib) nachgebildeten diskontinuierlichen Rekursionsformel. An Stelle dieser aus dem Moserschen Modell folgenden Methode kann man die Erneuerungsfunktion aber auch als Mittelwert der Erneuerungszahl r bestimmen. Dabei ist von den aufeinanderfolgenden Faltungen der Funktion $q(t)$ oder auch von den auf die diskontinuierliche Methode übertragenen Faltungsformeln (1) auszugehen. Die für den Fall D durchgeführten Berechnungen stützen sich auf diese letztgenannte Methode.

Als Ausgangswerte für die numerischen Rechnungen dienten die für je fünfjährige Intervalle gebildeten Funktionen $q(t)$ und $l(t)$, wie sie sich aus der Tafel RMG 1953 ergeben, wenn $t = 0$ für $x = 25$ gesetzt wird. Diese Ausgangswerte sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt.

t	$q(t)$	$l(t) = f(0,t)$
0	0,000 000	1,000 000
1	0,006 245	0,993 755
2	0,007 548	0,986 207
3	0,009 771	0,976 436
4	0,013 449	0,962 987
5	0,019 471	0,943 516
6	0,029 282	0,914 234
7	0,044 772	0,869 462
8	0,068 205	0,801 257
9	0,101 013	0,700 244
10	0,140 633	0,559 611
11	0,174 937	0,384 674
12	0,179 546	0,205 128
13	0,133 816	0,071 312
14	0,059 255	0,012 057
15	0,011 452	0,000 605
16	0,000 605	0,000 000

Die Rechnung erfolgt nach der in folgender Weise auf die diskontinuierliche Methode umgestellten Formel (1):

$$\left.\begin{aligned} f(r,t) &= \sum_{\tau=1}^{16} f(r-1,t-\tau)\,q(\tau) \\ \text{mit} \quad f(0,t) &= l(t)\,. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Für die Randwerte sind die Summationsgrenzen sinngemäss anzupassen.

Die Erneuerungsfunktion und das zweite Moment ergeben sich anschliessend zu

$$\left.\begin{aligned} m_1(t) &= \sum_{r=1}^{\infty} r\,f(r,t) \\ m_2(t) &= \sum_{r=1}^{\infty} r^2 f(r,t)\,. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Die praktische Auswertung von Formel (16) läuft darauf hinaus, die Faltungsoperation der numerischen Rechnung zu erschliessen. Eine praktisch befriedigende Lösung dieses Problems ist nicht nur für das Erneuerungsproblem, sondern für viele weitere Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik von Bedeutung. Beim vorliegenden Versuch hat man sich mit der fortgesetzten Faltung bis zur 15. Potenz begnügt. Die Erneuerungsfunktion konnte auf diese Weise für nicht weniger als 500 Jahre vorausberechnet werden. Das Ergebnis der Berechnung ist in den Figuren 4a und 4b festgehalten.

Mit Hilfe eines Elektronenrechners [1]) liess sich die Rechnung im vorliegenden Fall nach Erstellung von 32 Ausgangskarten vollständig automatisch abwickeln [2]). Zu berücksichtigen ist immerhin, dass die Rechnungsvoraussetzungen im vorliegenden Beispiel ziemlich einfach gewählt wurden. Die Erweiterung des Rechenapparates auf allgemeinere Voraussetzungen – zum Beispiel nicht homogene Bestände – sowie die Übertragung der Rechnung auf mit der offenen Gesamtheit verknüpfte Vorgänge – zum Beispiel die Bildung eines Deckungskapitals – sind Aufgaben, welche noch ihrer Lösung harren.

---

[1]) Es handelt sich um den Elektronenrechner Gamma 3 der Compagnie des machines Bull, Paris.

[2]) Das angewandte Verfahren wurde in verdankenswerter Weise von Dr. Osc. W. Spring entwickelt, der die technischen Einzelheiten in einem besonderen Artikel veröffentlichen wird.

Bei der Ermittlung der Erneuerungsfunktion handelt es sich um eine Extrapolationsaufgabe, welche – abgesehen von allfälligen Unsicherheiten in den Voraussetzungen – dank des stochastischen Charakters der in Betracht fallenden Vorgänge noch durch die Angabe des zugehörigen Schwankungsbereiches ergänzt werden sollte. Für den Elementarfall, wo die in Frage stehende, sich erneuernde Gesamtheit nur aus einem Element besteht, lassen sich diese Schwankungsbereiche aus den in der Figur 5 graphisch dargestellten Frequenzfunktionen $f(r,t)$ herauslesen. Für Gesamtheiten, welche aus mehr als einem Element zusammengesetzt sind, ergibt sich die zugehörige Frequenzfunktion durch fortgesetzte Faltung der für den Elementarfall bestimmten Funktion $f(r,t)$, welche – wenn ein genaues Resultat gewünscht wird – wiederum zweckmässig mit Hilfe eines Elektronenrechners durchzuführen wäre. Wenn eine Näherung genügt, so kann die Frequenzfunktion für n Elemente aus den zugehörigen Momenten gefunden werden, welche ihrerseits aus den Momenten der Einzelbestände hervorgehen. Unter der Annahme des Gesetzes D und bei $n = 100$ Elementen ergeben sich beispielsweise folgende Vergleichswerte:

t	Mittelwert (Erneuerungsfunktion)	Mittlere Abweichung	Relative mittlere Abweichung in % des Mittelwertes
0,506	5,711	2,348	41,1
1,012	45,134	5,190	11,5
5,060	440,017	6,216	1,4
10,120	921,230	8,482	0,9

Diese Zahlenwerte veranschaulichen den Schwankungsbereich der Erneuerungszahlen, welcher bei praktischen Anwendungen gebührend zu berücksichtigen ist. Dieser Schwankungsbereich wird mit zunehmender Elementenzahl und mit wachsender Zeit verhältnismässig immer enger.

2. Risikotheorie für sich erneuernde Bestände

Die abgeleiteten Formeln über das Verteilungsgesetz der akkumulierten Erneuerungszahl erlauben es, an den Aufbau einer besonderen Risikotheorie für sich erneuernde Versicherungsbestände heranzutreten. Eine derartige Risikotheorie würde es gestatten, die für die risikotheoretische Stabilität erforderlichen Sicherheitsmittel bei sich erneuernden Versicherungsbeständen auf objektiver Grundlage zu ermitteln.

Auf eine eingehende Diskussion dieses besonderen Fragenkreises wird hier verzichtet; es wird lediglich versucht, auf die zu lösenden Probleme hinzuweisen.

Die risikotheoretische Stabilität eines Versicherungsbestandes wird gewöhnlich anhand der Überschadenwahrscheinlichkeit $1-F(u)$ oder der Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u)$ beurteilt, welche unter Berücksichtigung der verfügbaren Mittel u hinreichend klein ausfallen sollten. Die Überschadenwahrscheinlichkeit $1-F(u)$ lässt sich mit Hilfe der Formeln (1) in Verbindung mit der Schadensummenverteilung $s(z)$ berechnen. Es ist

$$1-F(u,t) = \int_u^\infty \sum_{r=1}^\infty f(r,t)\, s^{*r}(z)\, dz\,, \tag{18}$$

worin $s^{*r}(z)$ wie üblich die r-te Faltung der gegebenen Schadensummenverteilung $s(z)$ bedeutet. Für $l(t) = q(t) = e^{-t}$ (Fall A im Kapitel III) geht Formel (18) in den aus der kollektiven Risikotheorie bekannten Ausdruck

$$1-F(u,t) = \int_u^\infty \sum_{r=1}^\infty \frac{e^{-t}\, t^r}{r!}\, s^{*r}(z)\, dz \tag{18'}$$

über. In ähnlicher Weise lassen sich die übrigen Formeln der kollektiven Risikotheorie direkt auf den Fall A übertragen. Dies gilt zum Beispiel auch für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u)$.

Von besonderer Bedeutung für viele risikotheoretische Anwendungen ist es, dass bei den praktisch vorkommenden Ausscheidegesetzen mit steigender Ausscheideintensität die resultierende Verteilung $f(r,t)$ eine stark ins Gewicht fallende unternormale Dispersion aufweist. Dadurch wird die risikotheoretische Stabilität verbessert und vermag bis zu einem gewissen Grad die durch die Summenstreuung eintretende Verschlechterung wettzumachen. Dies erlaubt es, bei mit dem Alter ansteigender Ausscheideintensität das Maximum des Selbstbehaltes höher anzusetzen als bei gleichbleibender Ausscheideintensität. Die nähere Abklärung dieser Verbesserung der risikotheoretischen Stabilität und darüber hinaus der systematische Aufbau einer Risikotheorie für sich erneuernde Gesamtheiten bieten noch ein weites Feld für fruchtbare theoretische und praktische Untersuchungen.

* * *

Abschliessend sei versucht, die wichtigsten Ergebnisse der dargelegten Untersuchungen in vier Punkte zusammenzufassen:

1. Die Erweiterung des Moserschen Modelles auf stochastische Prozesse lässt die aus dem Moserschen Modell abgeleiteten Ergebnisse, insbesondere den Verlauf der Erneuerungsfunktion und Erneuerungsdichte unberührt. Das verallgemeinerte Modell erlaubt es, den durch die stochastische Natur der beteiligten Vorgänge bedingten Schwankungsbereich anzugeben.

2. Beim Moserschen Modell ergibt sich die Erneuerungsfunktion als Lösung einer Integralgleichung. Im erweiterten Modell erhält man demgegenüber die Verteilungsfunktion der akkumulierten Erneuerungszahl – ohne Integralgleichung – direkt aus Verbleibsordnungen $l(*r,t)$ höheren Grades, welche im wesentlichen durch fortgesetzte Faltung aus der gegebenen Ausscheidedichte $q(t)$ hervorgehen. Der Mittelwert der akkumulierten Erneuerungszahl führt auf die Erneuerungsfunktion im Moserschen Modell.

3. Die Streuung der Erneuerungszahlen ist kleiner, gleich gross oder grösser als beim homogenen stochastischen Prozess, je nachdem die Ausscheideintensität $\mu(t)$ des zugrunde liegenden Ausscheidegesetzes mit t steigt, gleich bleibt oder sinkt. Das Ausscheidegesetz $q(t) = e^{-t}$ mit $\mu(t) \equiv 1$ führt auf den homogenen stochastischen Prozess, bei dem die klassische Verteilung von Poisson ensteht.

4. Im Rahmen des stochastischen Modells harren noch eine Reihe von Fragen ihrer Lösung. Insbesondere sind die Eigenschaften der Grenzverteilung für grosse t der akkumulierten Erneuerungszahl näher abzuklären.

Literaturverzeichnis

[1] *A. Alder:* Beiträge zur Kenntnis einiger Funktionen der Versicherungsmathematik. Bern 1923.

[2] *J. Brans* und *C. Campagne:* Le financement de l'assurance sociale. Verzekeringsarchief 1950.

[3] *A. Brown:* A note on the use of a Pearson type III function in renewal theory. Ann. of Math. Stat. 1940.

[4] *K. L. Chung* und *W. H. J. Fuchs:* On the distribution of values of sums of random variables. Memoirs of the American Mathematical Society, 1951.

[5] *K. L. Chung* und *H. Pollard:* An extension of renewal theory. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 3, 1952.

[6] *K. L. Chung* und *J. Wolfowitz:* On a limit theorem in renewal theory. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 55, 1952.

[7] *K. L. Chung:* On the renewal theorem in higher dimensions. Skand. Aktuarietidskrift 1952.

[8] *G. Doetsch:* Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin 1937.

[9] *J. L. Doob:* Renewal theory from the point of view of the theory of probability. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 63, 1948.

[10] *W. Feller:* On the integral equation of renewal theory. Ann. of Math. Stat. 1941.

[11] — An introduction to probability theory and its applications. New York 1950.

[12] — Fluctuation theory of reccurent events. Transactions of the American Mathematical Society 1949.

[13] *L. Féraud:* Le renouvellement, quelques problèmes connexes et les équations intégrales du cycle fermé. Mitt. Schweiz. Versich. Math. 1941.

[14] *E. Franckx:* Relation entre les ensembles renouvelés et les probabilités en chaîne. Comptes rendus des séances de l'académie des sciences Paris 1950.

[15] *H. Hadwiger:* Zur Berechnung der Erneuerungsfunktion nach einer Formel von Kostitzin. Mitt. Schweiz. Vers. Math. 1937.

[16] — Untersuchungen über das asymptotische Verhalten rekurrenter Zahlenreihen. Mitt. Schweiz. Vers. Math. 1938.

[17] — Ein Konvergenzkriterium für Erneuerungszahlen. Skand. Aktuarietidskrift 1938.

[18] — Zur Frage des Beharrungszustandes bei kontinuierlich sich erneuernden Gesamtheiten. Arch. f. Math. Wirtschaft u. Sozialforschung 1939.

[19] — Natürliche Ausscheidefunktion für Gesamtheiten und die Lösung der Erneuerungsgleichung. Mitt. Schweiz. Vers. Math. 1940.

[20] *H. Hadwiger* und *W. Wegmüller:* Entwicklung und Umschichtung von Personengesamtheiten. Berichte d. XII. Int. Kongresses der Vers. Math., Luzern 1940.

[21] *H. Hadwiger:* Ein transzendentes Additionstheorem und die Neumannsche Reihe. Mitt. Schweiz. Vers. Math. 1942.

[22] *T. E. Harris:* Some mathematical models for branding processes. Proceedings of the second Berkeley Symposium 1951.

[23] *L. Herbelot:* Application d'un théorème d'analyse à l'étude de la répartition par âge. Bull. Trim. de l'Inst. des Act. Fr. 1909.

[24] *P. J. A. Kanters:* Considérations sur le problème de renouvellement. Amsterdam 1953.

[25] *H. Kinkelin:* Die Elemente der Lebensversicherungsrechnung. Basel 1869.

[26] *H. Kreis:* Stabilität einer sich jährlich erneuernden Gesamtheit. Mitt. Schweiz. Vers. Math. 1936.

[27] *P. Legras:* Über das asymptotische Verhalten der Erneuerungsfunktion. Mitt. Schweiz. Vers. Math. 1942.

[28] *H. Liechti:* Beitrag zum Erneuerungsproblem. Bern 1942.

[29] *A. Lotka:* Application of recurrent series in renewal theory. Ann. of Math. Stat. 1948.

30] *A. Maret:* Untersuchungen über diskontinuierlich sich erneuernde Gesamtheiten. Bern 1936.

[31] — Direkte Berechnung der Vorgangsfunktion einer offenen Gesamtheit. Berichte d. XII. Int. Kongresses der Vers. Math., Luzern 1940.

[32] — De la fonction d'événement d'un ensemble ouvert et variable. Mitt. Schweiz. Vers. Math. 1947.

[33] *C. Moser:* Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes bei einer sich erneuernden Gesamtheit. Mitt. Schweiz. Vers. Math. 1926.

[34] — Integralgleichungen und sich erneuernde Gesamtheiten. Berichte d. IX. Int. Kongresses f. Vers.-Wissenschaft, Stockholm 1930, Band 3.

[35] *W. Moeschler:* Abbau und Erneuerung des Bestandes einer Sterbekasse. Festgabe Moser, Bern 1931.

[36] — Untersuchungen über Eintrittsgewinn und Fehlbetrag einer Versicherungskasse. Mitt. Schweiz. Vers. Math. 1935.

[37] *H. Muenzner:* Die Erneuerung von Gesamtheiten. Arch. f. Math. Wirtschaft u. Sozialforschung 1938.

[38] — Der Grenzwert der Erneuerungszahlen. Arch. f. Math. Wirtschaft u. Sozialforschung 1939.

[39] *H. Muenzner* und *H. Schwarz:* Ein Zusammenhang zwischen Erneuerungszahlen und dem Moivreschen Problem. Arch. f. Math. Wirtschaft u. Sozialforschung 1940.

[40] *A. Pestalozzi:* Untersuchungen über den Verlauf des latenten Fehlbetrages bei offenen Versicherungskassen. Zürich 1948.

[41] *M. Pressburger:* Sur l'étude générale des collectivités de personnes. Berichte d. XII. Int. Kongresses der Vers. Math., Luzern 1940.

[42] *H. Richter:* Die Konvergenz der Erneuerungsfunktion. Blätter f. Vers. Math. u. verwandte Gebiete 1940.

[43] — Eine Bemerkung zum Erneuerungsproblem. Arch. f. Math. Wirtschaft u. Sozialforschung 1940.

[44] — Untersuchungen zum Erneuerungsproblem. Math. Annalen 1941.

[45] *R. Risser:* Sur une application d'une équation fonctionnelle à un problème d'assurance. Bull. trim. de l'Inst. des Act. Fr. 1912.

[46] *W. Saxer:* Zur Frage des Beharrungszustandes. Mitt. Schweiz. Vers. Math. 1932.

[47] — Über die Laplace-Transformation und ihre Anwendungen. Mitt. Schweiz. Vers. Math. 1945.

[48] *G. Schaertlin:* Die Altersversorgung der eidgenössischen Beamten und Angestellten. Zeitschr. f. schweiz. Statistik 1889.

[49] *O. Schenker:* Eine lineare Integralgleichung auf dem Gebiete der Lebensversicherung. Mitt. Schweiz. Vers. Math. 1918.

[50] *H. Schulthess:* Über das Erneuerungsproblem bei Verwendung eines analytischen Sterbegesetzes. Mitt. Schweiz. Vers. Math. 1937.

[51] *H. Schwarz:* Zur «wahrscheinlichkeitstheoretischen Stabilisierung» beim Erneuerungsproblem. Math. Ann. 1943.

[52] *S. Taecklind:* Elementare Behandlung vom Erneuerungsproblem. Skand. Aktuarietidskrift 1944.

[53] — Fourieranalytische Behandlung vom Erneuerungsproblem. Skand. Aktuarietidskrift 1945.

[54] *R. Tarjan:* Untersuchungen über den Kapitalbedarf des Lebensversicherungsgeschäfts. Berichte d. XII. Int. Kongresses der Vers. Math., Luzern 1940.

[55] — Untersuchungen zum Erneuerungsproblem nichtkonstanter Gesamtheiten. Mitt. Schweiz. Vers. Math. 1944.

[56] *W. Thalmann:* Der Beharrungszustand in der sozialen Unfallversicherung. Festgabe Moser, Bern 1931.

[57] *H. Wyss:* Die Bemessung der Reserven schweizerischer Krankenkassen. Zeitsch. f. Schweiz. Statistik u. Volkswirtschaft, 1927.

[58] — Lage, Entwicklung und Beharrungszustand der eidgenössischen Versicherungskasse. Mitt. Schweiz. Vers. Math. 1929.

[59] — Über die Prämiensysteme der Gruppenversicherung. Festgabe Moser, Bern 1931.

[60] *E. Zwinggi:* Die Witwenversicherung als Teil der allgemeinen Alters- und Hinterlassenenversicherung. Mitt. Schweiz. Vers. Math. 1931.

[61] — Das Problem der Erneuerung. Festgabe Moser, Bern 1931.

[62] — Zum Problem der Erneuerung. Blätter f. Vers. Math. u. verwandte Gebiete 1931.

[63] — Bemerkungen zum Erneuerungsproblem. Mitt. Schweiz. Vers. Math. 1938.

[64] — Über Zusammenhänge zwischen der technischen Stabilität einer Sozialversicherungskasse und der Entwicklungsformel für den Versichertenbestand. Berichte d. XII. Int. Kongresses d. Vers. Math., Luzern 1940.

[65] Technische Grundlagen und Bruttotarife für Gruppenversicherungen 1953, Zürich 1953.