Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 55 (1955)

Artikel: Überlebensordnungen, für welche sich der Leibrentenbarwert durch Zeitrenten darstellen lässt

Autor: Rufener, Ernst

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-551615

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Überlebensordnungen, für welche sich der Leibrentenbarwert durch Zeitrenten darstellen lässt

Von *Ernst Rufener*, Zürich

Einleitung

Angeregt durch eine Studie von H. Jecklin und W. Leimbacher [1]) hat der Verfasser in einem früheren Beitrag zur Konstruktion eines Sterbegesetzes mit gegebenen analytischen Eigenschaften gezeigt, dass die Überlebensordnung $l(x)$ mit der Eigenschaft

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = A_1(t,\delta)\,\Phi_1(x) + A_2(t,\delta)\,\Phi_2(x)$$

durch eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten charakterisiert wird [2]). Die darin entwickelten Hilfsmittel sind auf den allgemeinen Fall

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = A_1(t,\delta)\,\Phi_1(x) + A_2(t,\delta)\,\Phi_2(x) + \ldots + A_k(t,\delta)\,\Phi_k(x),\ (k \geqq 2), \quad (1)$$

dem die vorliegende Arbeit gewidmet ist, übertragbar. Die k Summanden dieser Barwertformel sind Produkte von je zwei Faktoren; der eine enthält nur Rentendauer t und Zinsintensität δ, der andere ist nur mit der Altersvariablen x veränderlich [3]). Mittels der symbolischen Beziehung $A(t,\delta) = \mathfrak{F}\{\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta)\}$, die zum Ausdruck bringen soll,

---

[1]) «Über ein Sterbegesetz, welches eine exakte Darstellung der Leibrenten durch Zeitrentenwerte erlaubt», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 53. Band, 1953, S. 129–139.

[2]) «Sterbegesetze, für welche sich der Leibrentenbarwert durch Zeitrenten darstellen lässt», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 54. Band, 1954, S. 169–184.

[3]) $\bar{a}_{x:\overline{t}|}$ ist Skalarprodukt der beiden k-dimensionalen Vektoren:

$\vec{A}(t,\delta) = \{A_1(t,\delta), A_2(t,\delta), \ldots, A_k(t,\delta)\}$ und $\vec{\Phi}(x) = \{\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_k(x)\}$.

dass die von Rentendauer t und Zins δ abhängige Grösse $A(t,\delta)$ als «Zeitrentenfunktion» interpretierbar ist, lässt sich (1) auch in der Form

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \Phi_1(x)\,\mathfrak{F}_{(1)}\{\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta)\} + \Phi_2(x)\,\mathfrak{F}_{(2)}\{\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta)\} + \ldots + \Phi_{(k)}(x)\,\mathfrak{F}_{(k)}\{\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta)\}, \quad (k \geqq 2) \qquad (1')$$

schreiben. (1′) vermag die Besonderheit der gewählten Darstellungsart anschaulich hervorzuheben.

Unsere Darlegungen können insofern als geschlossen betrachtet werden, als es gelingt, Sterbegesetze mit dieser Eigenschaft durch eine einfache Relation zu charakterisieren und zu zeigen, dass die in (1) enthaltenen Funktionen durch die Natur der Barwertformel bestimmt und explizite angebbar sind.

Barwertformel (1) wird zunächst in einen äquivalenten, als Normalform bezeichneten Ausdruck,

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = y_1(t) + y_2(t)\,\frac{l'(x)}{l(x)} + y_2(t)\,\frac{l''(x)}{l(x)} + \ldots + y_k(t)\,\frac{l^{(k-1)}(x)}{l(x)},$$

übergeführt und hierauf gezeigt, dass ein durch Darstellungseigenschaft (1) ausgezeichnetes Sterbegesetz $l(x)$ als notwendige und hinreichende Bedingung eine lineare homogene Differentialgleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu erfüllen hat. Die Funktionen $y_i(t)$ sowie die mit ihnen durch eine lineare Transformation verknüpften $A_i(t,\delta)$ erscheinen dann als Lösungen eines linearen inhomogenen Systems von k Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Durch gegebene Anfangsbedingungen werden diese Funktionen eindeutig als Linearverbindungen von k Zeitrentenbarwerten bestimmt und dadurch den Operationen $\mathfrak{F}_{(i)}$ ein konkreter Sinn beigelegt. Die in diese Barwerte eingehenden Zinsintensitäten sind die negativen Wurzeln der Säkulargleichung der zugeordneten homogenen Systeme; diese Wurzeln unterscheiden sich von den Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung der Überlebensordnung nur durch die Zinsintensität δ. In den Linearverbindungen der Zeitrentenbarwerte bestimmen deren Koeffizienten eine Matrix, welche kontragredient ist zur Wronskischen Matrix eines Hauptsystems der Differentialgleichung der Überlebensordnung in $x = 0$. Mehrfache Wurzeln des charakteristischen Polynoms oder der Säkulargleichung äussern sich im Auftreten von Zeitrentenbarwerten höherer Ordnung.

Bemerkenswert ist die Feststellung, dass für Sterbeformeln mit Darstellungseigenschaft (1) auch der diskontinuierlich ermittelte Leibrentenbarwert $\mathsf{a}_{x:\overline{t}|}$ [1]) eine gleichlautende Beziehung

$$\mathsf{a}_{x:\overline{t}|} = B_1(t,v)\,\Psi_1(x) + B_2(t,v)\,\Psi_2(x) + \ldots + B_k(t,v)\,\Psi_k(x), \quad (k \geqq 2) \qquad (2)$$

oder

$$\mathsf{a}_{x:\overline{t}|} = \Psi_1(x)\,\mathfrak{G}_{(1)}\{\mathsf{a}_{x:\overline{t}|}\} + \Psi_2(x)\,\mathfrak{G}_{(2)}\{\mathsf{a}_{x:\overline{t}|}\} + \ldots + \Psi_k(x)\,\mathfrak{G}_{(k)}\{\mathsf{a}_{x:\overline{t}|}\}, \quad (k \geqq 2) \qquad (2')$$

erfüllt. Ausgehend von Ansatz (2) kann, wie in Abschnitt 5 gezeigt wird, mit Hilfe der Theorie der linearen Differenzengleichungen eine ähnliche Lösungstheorie entwickelt werden wie bei kontinuierlicher Betrachtungsweise.

Unsere Darlegungen sind auf Barwertformeln mit endlicher Gliederzahl und nur einer Altersvariablen beschränkt. Erwägungen über den Grenzfall

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(t,\delta)\,\Phi_i(x)\,,$$

der bei äquidistanten Nullstellen des charakteristischen Polynoms auf Makehams Sterbegesetz führen kann, sowie die Ausdehnung der Untersuchungen auf Verbindungsrenten bleiben einer spätern Mitteilung vorbehalten.

1. Der Leibrentenbarwert für Sterbegesetze, welche Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten sind

Satz 1. *Der Leibrentenbarwert $\bar{a}_{x:\overline{t}|}$ ist für ein Sterbegesetz $l(x)$ dann durch eine k-gliedrige Formel $\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{i=1}^{k} A_i(t,\delta)\,\Phi_i(x)$ darstellbar, wenn $l(x)$ eine lineare homogene Differentialgleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten erfüllt.*

---

[1]) Mit Rücksicht darauf, dass die Ableitungen nach der Rentendauer t durch Punkte bezeichnet werden, $\frac{dA(t)}{dt} = \dot{A}(t)$, $\frac{d^2A(t)}{dt^2} = \ddot{A}(t)$ usw., wurde für den vorschüssigen Rentenbarwert – in Abweichung zu der am XIV. Internationalen Kongress der Versicherungsmathematiker gutgeheissenen Bezeichnungsweise $\ddot{a}$ – das frühere übliche Symbol a beibehalten.

Beweis: Die Sterbeformel sei im allgemeinen Integral der Differentialgleichung

$$l^{(k)}(x) + P_1 l^{(k-1)}(x) + P_2 l^{(k-2)}(x) + \ldots + P_{k-1} l'(x) + P_k l(x) = 0,$$

deren charakteristisches Polynom

$$\varrho^k + P_1 \varrho^{k-1} + P_2 \varrho^{k-2} + \ldots + P_{k-1} \varrho + P_k = 0$$

die Wurzeln ϱ_1 (α_1-fach), ϱ_2 (α_2-fach), $\ldots, \varrho_j$ (α_j-fach), $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j = k$, habe, enthalten. $\Lambda_\nu(x)$, $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ sei ein Hauptsystem; $l(x) = \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu \Lambda_\nu(x)$ ist daher von der Form

$$l(x) = \sum_{i=1}^{j} Q_i(x)\, e^{\varrho_i x}, \quad Q_i(x) = \lambda_{i1} + \lambda_{i2}\, x + \ldots + \lambda_{i\alpha_i}\, x^{\alpha_i - 1}, \tag{3}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, j;\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_j = k),$$

und die Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_tp_x$ ist gegeben durch

$${}_tp_x = \frac{l(x+t)}{l(x)} = \frac{1}{l(x)} \sum_{i=1}^{j} \sum_{\nu=1}^{\alpha_i} \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} Q_i^{(\nu-1)}(x)\, e^{\varrho_i(x+t)}.$$

Das Barwertintegral $\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \int_0^t {}_\xi p_x\, e^{-\delta\xi}\, d\xi$ führt zum Ausdruck

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \frac{1}{l(x)} \sum_{i=1}^{j} e^{\varrho_i x} \sum_{\nu=1}^{\alpha_i} Q_i^{(\nu-1)}(x) \frac{1}{(\nu-1)!} \int_0^t \xi^{\nu-1} e^{-(\delta-\varrho_i)\xi}\, d\xi,$$

und nach der Festsetzung

$$\varrho_i = r_i + \delta, \tag{4}$$

zur Beziehung

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \frac{1}{l(x)} \sum_{i=1}^{j} e^{\varrho_i x} \sum_{\nu=1}^{\alpha_i} Q_i^{(\nu-1)}(x)\, (I^{\nu-1}\bar{a})_{\overline{t}|}(-r_i)\ ^{1)}, \tag{5}$$

in welcher die Variablen x und t im Sinne des Ansatzes (1), $\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{i=1}^{k} A_i(t,\delta)\, \Phi_i(x)$, getrennt sind. Die Eigenschaft der Über-

---

[1]) Der Zeitrentenbarwert ν-ter Ordnung sei definiert durch

$$(I^\nu \bar{a})_{\overline{t}|}(r) = \frac{1}{\nu!} \int_0^t \xi^\nu e^{-r\xi}\, d\xi, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

insbesondere

$$(I^0 \bar{a})_{\overline{t}|}(r) = \bar{a}_{\overline{t}|}(r).$$

lebensordnung, eine lineare Differentialgleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu erfüllen, ist demnach hinreichend für die Darstellungseigenschaft (1).

Satz 1 ist insofern für unsere Problemstellung bedeutungsvoll, als er die Existenz von «Lösungsfunktionen» $l(x)$ sichert und damit für alle spätern Betrachtungen einen natürlichen Rückhalt bildet. Durch Beziehung (3) wird, wie in der Umkehrung des Satzes gezeigt wird, die allgemeine Form eines Sterbegesetzes mit Eigenschaft (1) gegeben; auch im allgemeinen Fall wird es uns möglich sein, durch verhältnismässig einfache Rechnung die aus der Darstellungseigenschaft (1) hergeleiteten Ergebnisse zu verifizieren.

Das zur Differentialgleichung der Überlebensordnung gehörende Hauptsystem $\Lambda_\nu(x)$, $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$, aus dem das Sterbegesetz durch lineare Kombination entsteht, ist dadurch ausgezeichnet, dass seine Wronskische Determinante

$$W(x) = \left| \left(\frac{d}{dx}\right)^{i-1} \Lambda_h(x) \right| = \begin{vmatrix} \Lambda_1(x) & \Lambda_2(x) & \ldots \Lambda_k(x) \\ \Lambda_1'(x) & \Lambda_2'(x) & \ldots \Lambda_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Lambda_1^{(k-1)}(x) & \Lambda_2^{(k-1)}(x) & \ldots \Lambda_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

nirgends verschwindet. Da $W(x)$ der Differentialgleichung

$$W'(x) = -P_1 W(x), \quad P_1 = -(\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_k)$$

genügt, ist

$$W(x) = W(0)\, e^{-P_1 x} = W(0)\, e^{(\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_k)x}.$$

Im Hinblick auf unsere Ausführungen ist es angezeigt, für die zur Determinante $W(0)$ gehörende Matrix P, für ihre inverse P^{-1} und die kontragrediente P^* besondere Bezeichnungen einzuführen:

$$P = \left\| \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{i-1} \Lambda_h(x) \right]_{x=0} \right\| = \| \varrho_{ih} \|, \qquad |P| = W(0),$$

$$P^{-1} = \| \varrho^{ih} \| = \left\| \frac{P^{hi}}{|P|} \right\|,$$

$$P^* = (P')^{-1} = (P^{-1})' = \| \varrho^{hi} \|, \qquad (i,h = 1, 2, \ldots, k).$$

Sonderfälle

a) Die Wurzeln des charakteristischen Polynoms sind reell und voneinander verschieden.

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 1$; die Funktionen $\Lambda_\nu(x) = e^{\varrho_\nu x}$, $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ bilden ein Hauptsystem, für das

$$P = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots & \varrho_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varrho_1^{k-1} & \varrho_2^{k-1} & \cdots & \varrho_k^{k-1} \end{Vmatrix} \text{ und } |P| = \prod_{\substack{i,h=1 \\ (i>h)}}^{k} (\varrho_i - \varrho_h) \neq 0$$

ausfällt. Es ist $Q_i(x) = \lambda_i$ und

$$l(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, e^{\varrho_i x}. \tag{6}$$

Man findet

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \frac{1}{l(x)} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, e^{\varrho_i x} \, \bar{a}_{\overline{t}|}(\delta - \varrho_i)$$

und hieraus

$$A_i(t,\delta) = \bar{a}_{\overline{t}|}(\delta - \varrho_i), \quad \Phi_i(x) = \frac{\lambda_i \, e^{\varrho_i x}}{l(x)}. \tag{7}$$

b) Die Wurzel der charakteristischen Gleichung ist reell und k-fach.

$\alpha_1 = k$, $\varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho_k = \varrho$; $\quad \Lambda_\nu(x) = x^{\nu-1} e^{\varrho x}$, $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ bestimmen ein Hauptsystem mit

$$P = \left\| (h-1)! \binom{i-1}{h-1} \varrho^{i-h} \right\|, \quad |P| = 1!\,2! \ldots (k-1)!.$$

Für das Sterbegesetz

$$l(x) = \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu \Lambda_\nu(x) = Q(x)\, e^{\varrho x}, \quad Q(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \ldots + \lambda_k x^{k-1} \tag{8}$$

wird

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{i=1}^{k} \frac{Q^{(i-1)}(x)}{Q(x)} (I^{i-1} \bar{a})_{\overline{t}|}(\delta - \varrho),$$

also

$$A_i(t,\delta) = (I^{i-1} \bar{a})_{\overline{t}|}(\delta - \varrho), \quad \Phi_i(x) = \frac{Q^{(i-1)}(x)}{Q(x)}. \tag{9}$$

Mehrfache Wurzeln der charakteristischen Gleichung äussern sich, wie bereits (5) lehrt, im Auftreten von Zeitrentenbarwerten höherer Ordnung.

c) Die Wurzeln des charakteristischen Polynoms sind reell und äquidistant.

Äquidistante reelle Wurzeln

$$\varrho_\nu = -a-(\nu-1)\,b = \log s + (\nu-1)\log c\,, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

führen durch die Festsetzung

$$\lambda_\nu = \Lambda \binom{k-1}{\nu-1} \alpha^{\nu-1}$$

auf die dreiparametrige Überlebensformel

$$l(x) = \Lambda\, e^{-ax}(1+\alpha\, e^{-bx})^{k-1} = \Lambda\, s^x(1+\alpha\, c^x)^{k-1},$$

deren Sterbensintensität die einfache Form

$$\mu(x) = a + (k-1)\,\frac{\alpha b}{e^{bx}+\alpha}$$

annimmt und die E. Albrecht für $k = 3$ seinen Untersuchungen [1]) zugrunde gelegt hat.

Für ein Sterbegesetz der Folge

$$L_k(x) = \Lambda\, e^{-ax}(1+\alpha\, e^{-bx})^k = \Lambda\, s^x(1+\alpha\, c^x)^k, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

wird

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|,k} = \frac{1}{(e^{bx}+\alpha)^k} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \alpha^\nu\, e^{(k-\nu)bx}\, \bar{a}_{\overline{t}|}(\delta + a + \nu b)$$

$$= \frac{1}{(1+\alpha\, c^x)^k} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \alpha^\nu\, c^{\nu x}\, \bar{a}_{\overline{t}|}(\delta - \log s - \nu \log c)\,, \qquad (10)$$

mithin

$$A_\nu(t,\delta) = \bar{a}_{\overline{t}|}(\delta + a + \nu b) = \bar{a}_{\overline{t}|}(\delta - \log s - \nu \log c) = a_{\overline{t}|}(-(\varkappa+\nu)\log c)\,,$$

$$\Phi_{\nu,k}(x) = \frac{1}{(1+\alpha\, c^x)^k} \binom{k}{\nu} \alpha^\nu\, c^{\nu x}, \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, k)$$

mit

$$\varkappa = -\frac{\log \frac{1}{s} + \delta}{\log c}.$$

---

[1]) «Beiträge zur gruppenweisen Berechnung der Prämienreserve», Diss. Bern, Stämpfli & Cie., 1947.

Lässt man α in einer für den Grenzübergang $k \to \infty$ geeigneten Weise von k abhangen,

$$\alpha = \frac{\gamma}{k}, \qquad \gamma = \log g,$$

so konvergiert die Folge $\{L_k(x)\}$ gleichmässig gegen die Grenzfunktion

$$L(x) = \lim_{k \to \infty} L_k(x) = A s^x \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{\gamma c^x}{k}\right)^k = A s^x g^{c^x}.$$

Makehams Sterbegesetz wird auf diese Weise erzeugt durch eine Folge von Überlebensordnungen, welche die Darstellungseigenschaft (1) haben. Die für die Funktionen $L_k(x)$ gerechneten Barwerte (10),

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|,k} = \sum_{\nu=0}^{k} A_\nu(t,\delta)\, \Phi_{\nu,k}(x),$$

streben mit $k \to \infty$ gegen einen Makehamschen Rentenbarwert

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(t,\delta)\, \Phi_\nu(x), \tag{11}$$

dessen Reihenglieder durch

$$A_\nu(t,\delta) = \bar{a}_{\overline{t}|}(-(\varkappa + \nu) \log c) = \frac{1}{\log c} \frac{c^{(\varkappa+\nu)t} - 1}{\varkappa + \nu}$$

und

$$\Phi_\nu(x) = \lim_{k \to \infty} \Phi_{\nu,k}(x) = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{\left(c^x \log \frac{1}{g}\right)^\nu}{e^{-c^x \log \frac{1}{g}}} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \lambda^\nu e^\lambda \text{ [1]},$$

$$\lambda = c^x \log \frac{1}{g}$$

bestimmt sind:

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = e^\lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^\nu}{\nu!} \bar{a}_{\overline{t}|}(-(\varkappa + \nu) \log c) \text{ [2]}.$$

---

[1]) Unter Berücksichtigung von

$$\binom{k}{\nu} = \frac{k^\nu}{\nu!} e^{-\theta \frac{\nu^2}{k-\nu}}, \qquad 0 < \theta < \frac{1}{2}, \quad k \geqslant \nu$$

aus

$$\Phi_\nu(x) = \frac{(\gamma c^x)^\nu}{\nu!} \lim_{k \to \infty} \frac{e^{-\theta \frac{\nu^2}{k-\nu}}}{\left(1 + \frac{\gamma c^x}{k}\right)^k} = \frac{1}{\nu!} \frac{(\gamma c^x)^\nu}{e^{\gamma c^x}}$$

erhalten.

[2]) Siehe Note *) folgende Seite.

d) Im Falle (einfacher oder mehrfacher) komplexer Wurzeln sind die Funktionen $A_i(t,\delta)$ als Barwerte variabler Zeitrenten, die sich nach Sinus- oder Cosinusfunktionen verändern, interpretierbar; in unsern Darlegungen wird dieser Fall nicht weiter verfolgt.

2. Reduktion des Leibrentenbarwertes auf seine Normalform

Wie im Falle $k = 2$ gelingt es, die allgemeine Beziehung

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{h=1}^{k} A_h(t,\delta)\, \Phi_h(x)\,, \qquad (k \geqq 2) \tag{1}$$

auf eine «Normalform» zurückzuführen und damit die mit unserer Problemstellung sich aufdrängenden Fragen einer Klärung wesentlich näherzubringen.

Über die zeitabhängigen Funktionen $A_h(t,\delta) = A_h(t), (h = 1, 2, \ldots, k)$ werde k-malige stetige Differenzierbarkeit nach t vorausgesetzt. Die von den Ableitungen

$$\frac{\partial^i A_h(t,\delta)}{\partial t^i} = A_h^{(i)}(t)\ ^{1)} \quad \text{in } t = 0 \text{ angenommenen Werte}$$

$$A_h^{(i)}(0) = a_{ih}\,, \quad (i,h = 1, 2, \ldots, k)$$

bestimmen die Matrizen

$$A = \|a_{ih}\| \text{ und } A^{-1} = \|a^{ih}\| = \left\| \frac{A_{hi}}{|A|} \right\|$$

mit den Determinanten $|A| = |a_{ih}|$ und $|A^{-1}| = |a^{ih}| = |A|^{-1}$;

---

*) Mittels der Integraldarstellung

$$A_\nu(t,\delta)\, \Phi_\nu(x) = \frac{e^\lambda \lambda^{-\varkappa}}{\log c} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int_\lambda^{\lambda c^t} \xi^{\varkappa+\nu-1}\, d\xi$$

für das Reihenglied wird Barwertformel (11) auf das bekannte Integral

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \frac{e^\lambda \lambda^{-\varkappa}}{\log c} \int_\lambda^{\lambda c^t} e^{-\xi}\, \xi^{\varkappa-1}\, d\xi$$

zurückgeführt.

[1]) Auf die Abhängigkeit der Funktionen $A_h(t)$ von weiteren Argumenten, z. B. Zinsintensität δ, soll in der Bezeichnung nicht mehr besonders hingewiesen werden; Punkte bezeichnen Ableitungen nach t.

$A_{ih} = (-1)^{i+h}\,\overline{A}_{ih}$ ist das dem Elemente a_{ih} zugeordnete algebraische Komplement, $\overline{A}_{ih}$ die entsprechende Unterdeterminante. – Schliesslich werde noch die aus den Funktionen $A_h^{(i)}(t)$ gebildete Determinante

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \dot{A}_1(t) & \dot{A}_2(t) & \dots & \dot{A}_k(t) \\ \ddot{A}_1(t) & \ddot{A}_2(t) & \dots & \ddot{A}_k(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^{(k)}(t) & A_2^{(k)}(t) & \dots & A_k^{(k)}(t) \end{vmatrix}, \quad \Delta(0) = |a_{ik}| = |A| \tag{12}$$

eingeführt.

Satz 2. *Der Barwertformel*

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{h=1}^{k} A_h(t)\,\Phi_h(x)$$

entspricht

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \begin{cases} y_1(t) + y_2(t)\dfrac{l'(x)}{l(x)} + y_3(t)\dfrac{l''(x)}{l(x)} + \dots + y_k(t)\dfrac{l^{(k-1)}(x)}{l(x)}, \text{ falls } |A| \neq 0, \\[2ex] y_1(t) + y_2(t)\dfrac{l'(x)}{l(x)} + \dots + y_r(t)\dfrac{l^{(r-1)}(x)}{l(x)}, \ (1 \leqq r < k), \text{ falls } |A| = 0. \end{cases}$$

Beweis: Wiederholtes Ableiten von

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{h=1}^{k} A_h(t)\,\Phi_h(t) = \int_0^t {}_{\xi}p_x\, e^{-\delta\xi}\, d\xi$$

nach t führt zu den Beziehungen

$$\frac{\partial^i \bar{a}_{x:\overline{t}|}}{\partial t^i} = \sum_{h=1}^{k} A_h^{(i)}(t)\,\Phi_h(x) = \frac{1}{l(x)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1}[l(x+t)\,e^{-\delta t}]$$

$$= \frac{1}{l(x)}\sum_{\lambda=1}^{t}\binom{i-1}{\lambda-1}(-\delta)^{i-\lambda}\,l^{(\lambda-1)}(x+t), \qquad (i = 1, 2, \dots, k),$$

aus denen man für $t = 0$ das in den $\Phi_h(x)$ lineare System

$$\sum_{h=1}^{k} a_{ih}\,\Phi_h(x) = \frac{1}{l(x)}\sum_{\lambda=1}^{i}\binom{i-1}{\lambda-1}(-\delta)^{i-\lambda}\,l^{(\lambda-1)}(x), \quad (i = 1, 2, \dots, k) \tag{13}$$

gewinnt, welches die Funktionen $\Phi_h(x)$, $(h = 1, 2, \dots, k)$ durch die Überlebensordnung und deren Ableitungen bestimmt.

a) Falls $|A| \neq 0$, lassen sich in $\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{h=1}^{k} A_h(t)\, \Phi_h(x)$ die Funktionen $\Phi_h(x)$ mittels (13) eliminieren; man erhält

$$\begin{vmatrix} l(x)\,\bar{a}_{x:\overline{t}|} & A_1(t) & A_2(t) & \dots & A_k(t) \\ l(x) & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ l'(x) - \delta\, l(x) & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ l''(x) - 2\delta\, l'(x) + \delta^2 l(x) & a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{\lambda=1}^{k} \binom{k-1}{\lambda-1} (-\delta)^{k-\lambda}\, l^{(\lambda-1)}(x) & a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = 0.$$

Sind $\mathfrak{A}_0 = |A|$ und $\mathfrak{A}_\mu(t)$, $(\mu = 1, 2, \dots, k)$ die zu den Elementen der ersten Kolonne gehörenden Unterdeterminanten, dann schliesst man aus der nach der ersten Kolonne entwickelten Determinante

$$|A|\, l(x)\, \bar{a}_{x:\overline{t}|} + \sum_{\mu=1}^{k} (-1)^{\mu}\, \mathfrak{A}_\mu(t) \sum_{\lambda=1}^{\mu} \binom{\mu-1}{\lambda-1} (-\delta)^{\mu-\lambda}\, l^{(\lambda-1)}(x) = 0$$

auf

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{\lambda=1}^{k} \left\{ \frac{(-1)^{\lambda-1}}{|A|} \sum_{\mu=\lambda}^{k} \binom{\mu-1}{\lambda-1} \delta^{\mu-\lambda}\, \mathfrak{A}_\mu(t) \right\} \frac{l^{(\lambda-1)}(x)}{l(x)}$$

oder, nachdem wir Funktionen $y_\lambda(t)$ durch

$$y_\lambda(t) = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{|A|} \sum_{\mu=\lambda}^{k} \binom{\mu-1}{\lambda-1} \delta^{\mu-\lambda}\, \mathfrak{A}_\mu(t) \tag{14}$$

definiert haben, auf den als Normalform bezeichneten Ausdruck

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{\lambda=1}^{k} y_\lambda(t)\, \frac{l^{(\lambda-1)}(x)}{l(x)}. \tag{15}$$

Der sich auf $|A| \neq 0$ beziehende Teil des Satzes ist damit bewiesen.

b) Aus der Lösbarkeitsbedingung für System (13),

$$\operatorname{Rang} \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{Vmatrix} = \operatorname{Rang} \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & l(x) \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & l'(x) - \delta\, l(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & \sum_{\lambda=1}^{k} \binom{k-1}{\lambda-1} (-\delta)^{k-\lambda}\, l^{(\lambda-1)}(x) \end{Vmatrix},$$

schliesst man zunächst, wenn $|A| = |a_{ih}| = 0$, Rang $\|a_{ih}\| = r < k$ vorausgesetzt wird, dass $l(x)$ eine lineare homogene Differentialgleichung $(k-1)$-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten erfüllt. Der Rentenbarwert $\bar{a}_{x:\overline{t}|}$ ist mithin nach Satz 1 bereits durch $\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{h=1}^{k-1} A_h(t)\, \Phi_h(x)$ gegeben. Dieser Darstellung entspricht ein System (13) mit der Determinante $|A|_{k-1}$, die verschwindet, falls $r < k-1$ ist. In Verbindung mit der Lösbarkeitsbedingung für das lineare inhomogene System (13) lässt sich nach Satz 1 die Gliederzahl der Barwertformel solange verringern, bis man

$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{h=1}^{r} A_h(t)\, \Phi_h(x)$, mit $|A|_r \neq 0$ erhält, also Fall a eintrifft.

Satz 3. *Die Funktionen $y_h(t)$ sind lineare Transformationen der $A_h(t)$, $(h = 1, 2, \ldots, k)$. Die Transformationsdeterminante hat den Wert $\frac{1}{|A|}$, $\left(|A| \neq 0\right)$. Für die Anfangswerte $y_h^{(i)}(0) = y_{ih}$ gilt*

$$y_{ih} = \begin{cases} \binom{i-1}{h-1} (-\delta)^{i-h}, & i \geqq h, \\ 0, & i < h. \end{cases}$$

Beweis: Wir substituieren den durch Entwickeln von

$$\mathfrak{A}_\mu(t) = \begin{vmatrix} A_1(t) & A_2(t) & \ldots & A_k(t) \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\mu-1,1} & a_{\mu-1,2} & \ldots & a_{\mu-1,k} \\ a_{\mu+1,1} & a_{\mu+1,2} & \ldots & a_{\mu+1,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

sich ergebenden Ausdruck

$$\mathfrak{A}_\mu(t) = \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu+1}\, \bar{A}_{\mu\nu}\, A_\nu(t) = (-1)^{\mu+1} \sum_{\nu=1}^{k} A_{\mu\nu}\, A_\nu(t)$$

in (14) und erhalten

$$y_h(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{k} \binom{\mu-1}{h-1} (-\delta)^{\mu-h} \frac{A_{\mu\nu}}{|A|} A_\nu(t).$$

Wir beachten, dass $\frac{A_{\mu\nu}}{A} = a^{\nu\mu}$ ist und setzen

$$\binom{\mu-1}{h-1}(-\delta)^{\mu-h} = d_{\mu h}, \quad \|d_{ih}\| = D \text{ [1]};$$

der Zusammenhang zwischen den Funktionen $y_h(t)$ und $A_h(t)$ erscheint dann in der Gestalt

$$y_h(t) = \sum_{\nu=1}^{k}\left(\sum_{\mu=1}^{k} a^{\nu\mu} d_{\mu h}\right) A_\nu(t) = \sum_{\nu=1}^{k} t_{\nu h} A_\nu(t) \tag{16'}$$

und kann als Matrizenrelation

$$Y(t) = T' A(t), \quad T = A^{-1} D, \tag{16''}$$

$$Y(t) = \left\| \begin{matrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{matrix} \right\|, \quad A(t) = \left\| \begin{matrix} A_1(t) \\ A_2(t) \\ \vdots \\ A_k(t) \end{matrix} \right\| \text{ geschrieben werden.}$$

---

[1]) Aus

$$\theta_n(\xi, m) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{n-1}(\delta+\xi)^{m-1} = \binom{m-1}{n-1}(\delta+\xi)^{m-n}$$

$$= \sum_{\lambda=n}^{m}\binom{m-1}{\lambda-1}\binom{\lambda-1}{n-1}\delta^{m-\lambda}\xi^{\lambda-n}, \quad (m \geqq n)$$

ergibt sich für $\xi \to -\delta$ die Nullentwicklung

$$\theta_n(-\delta, m) = \sum_{\lambda=1}^{m}\binom{m-1}{\lambda-1}\delta^{m-\lambda}\binom{\lambda-1}{n-1}(-\delta)^{\lambda-n} = \delta_{mn}. \tag{17}$$

Nach (17) bestimmen daher die Elemente

$$d_{ih} = \binom{i-1}{h-1}(-\delta)^{i-h} \text{ und } d^{ih} = \binom{i-1}{h-1}\delta^{i-h}, \quad d_{i\lambda} d^{\lambda h} = \delta_{ih},$$

inverse Matrizen; beispielsweise ist für $k = 4$

$$D = \|d_{ih}\| = \left\|\binom{i-1}{h-1}(-\delta)^{i-h}\right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta & 1 & 0 & 0 \\ \delta^2 & -2\delta & 1 & 0 \\ -\delta^3 & 3\delta^2 & -3\delta & 1 \end{matrix} \right\|,$$

$$D^{-1} = \|d^{ih}\| = \left\|\binom{i-1}{h-1}\delta^{i-h}\right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \delta & 1 & 0 & 0 \\ \delta^2 & 2\delta & 1 & 0 \\ \delta^3 & 3\delta^2 & 3\delta & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Wegen $|D| = 1$ wird $|T'| = |T| = |A^{-1}|\,|D| = \dfrac{1}{|A|}$. Endlich erhält man aus (16′) durch Ableiten nach t

$$y_h^{(i)}(0) = y_{ih} = \sum_{\nu=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{k} a^{\nu\mu}\, d_{\mu h}\, a_{i\nu} = \sum_{\mu=1}^{k} \delta_{i\mu}\, d_{\mu h} = d_{ih} = \binom{i-1}{h-1}(-\delta)^{i-h}$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, k) \qquad (18)$$

und $|y_{ih}| = |D| = 1$.

Durch die Zahlen a_{ih}, $|a_{ih}| \neq 0$, wird die lineare Transformation T und damit auch die Normalform bestimmt. Umgekehrt kann aus ihr mittels

$$A(t) = T^* Y(t), \qquad T^* = (T')^{-1} = (T^{-1})'$$

jede k-gliedrige Barwertformel, in der die Variablen für Rentendauer und Eintrittsalter getrennt sind, hergeleitet werden.

Formel (15) deckt die Struktur der Barwertformel auf und zeigt, dass das Zusammenfassen von Rentendauer und Zins in den Funktionen $A_i(t,\delta)$ durchaus sinnvoll ist. In Verbindung mit der Differentialgleichung des Leibrentenbarwertes lässt die Normalform die Umkehrung von Satz 1 zu und ermöglicht uns gleichzeitig, die Funktionen $y_i(t)$ und $A_i(t)$ als Zeitrentenbarwerte darzustellen, ohne die Überlebensordnung heranzuziehen. Sie wird damit wesentliches Hilfsmittel für den geschlossenen Aufbau einer «Lösungstheorie».

3. Die Differentialgleichung der Überlebensordnung

Satz 4. *Durch die nicht weiter verkürzbare Darstellung*

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{\lambda=1}^{k} y_\lambda(t)\, \frac{l^{(\lambda-1)}(x)}{l(x)}, \qquad |A| \neq 0$$

wird die Überlebensordnung $l(x)$ als Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten bestimmt.

Beweis: In der aus der Differentialgleichung des Leibrentenbarwertes

$$\frac{\partial \bar{a}_{x:\overline{t}|}}{\partial x} = \bar{a}_{x:\overline{t}|}(\mu_x + \delta) - 1 + \frac{\partial \bar{a}_{x:\overline{t}|}}{\partial t}$$

sich ergebenden Form

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[l(x)\, \bar{a}_{x:\overline{t}|}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[l(x)\, \bar{a}_{x:\overline{t}|}\right] = \delta\, l(x)\, \bar{a}_{x:\overline{t}|} - l(x)$$

ersetzt man die partiellen Ableitungen durch die Relationen

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[l(x)\,\bar{a}_{x:\overline{t}|}\right] = \sum_{\lambda=1}^{k} y_\lambda(t)\, l^{(\lambda)}(x)\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[l(x)\,\bar{a}_{x:\overline{t}|}\right] = \sum_{\lambda=0}^{k-1} \dot{y}_{\lambda+1}(t)\, l^{(\lambda)}(x)\,,$$

die eine unmittelbare Folge des Ansatzes (15) sind. Durch geeignetes Zusammenfassen der Glieder findet man die Beziehung

$$y_k(t)\, l^{(k)}(x) - \sum_{\lambda=1}^{k-1} \left[\dot{y}_{\lambda+1}(t) + \delta\, y_{\lambda+1}(t) - y_\lambda(t)\right] l^{(\lambda)}(x) - \left[\dot{y}_1(t) + \delta\, y_1(t) - 1\right] l(x) = 0\,,$$

in der $y_k(t) \not\equiv 0$ vorausgesetzt werden kann, so dass

$$l^{(k)}(x) - \sum_{\lambda=1}^{k-1} \frac{\dot{y}_{\lambda+1}(t) + \delta\, y_{\lambda+1}(t) - y_\lambda(t)}{y_k(t)}\, l^{(\lambda)}(x) - \frac{\dot{y}_1(t) + \delta\, y_1(t) - 1}{y_k(t)} = 0$$

und nach den Festsetzungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dot{y}_{\lambda+1}(t) + \delta\, y_{\lambda+1}(t) - y_\lambda(t)}{y_k(t)} &= -P_{k-1,\lambda}(t)\,, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, k-1)\,, \\ \frac{\dot{y}_1(t) + \delta\, y_1(t) - 1}{y_k(t)} &= -P_{k-1,0}(t)\,, \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

$$l^{(k)}(x) + \sum_{\lambda=0}^{k-1} P_{k-1,\lambda}(t)\, l^{(\lambda)}(x) = 0 \qquad (20)$$

wird.

Eine Separation der Variablen in (20) erreicht man durch fortgesetztes Ableiten nach t. Definiert man

$$P_{k-\nu,\lambda}(t) = \frac{\dot{P}_{k-\nu+1,\lambda}(t)}{\dot{P}_{k-\nu+1,k-\nu+1}(t)}\,, \quad (\nu = 2, 3, \ldots, k;\ \lambda = 0, 1, \ldots, k-\nu)\,, \quad (21)$$

und nimmt man an, dass die Ableitungen nach t des Koeffizienten der höchsten Ableitung von $l(x)$ in der jeweils erhaltenen Beziehung nicht identisch verschwindet,

$$\dot{P}_{k-\nu,k-\nu}(t) \not\equiv 0\,, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k-1)\,, \quad (22)$$

dann wird durch jede Differentiation nach t die Ordnung der Differentialrelation hinsichtlich x um eins verringert; (20) wird durch r aufeinanderfolgende Ableitungen auf

$$\sum_{\lambda=0}^{k-r} \dot{P}_{k-r,\lambda}(t)\, l^{(\lambda)}(x) = 0 \qquad (20.r)$$

erniedrigt, und nach $k-2$, $k-1$ und k Schritten erhält man

$$\dot{P}_{22}(t)\, l''(x) + \dot{P}_{21}(t)\, l'(x) + \dot{P}_{20}(t)\, l(x) = 0, \qquad (20.k-2)$$

$$\dot{P}_{11}(t)\, l'(x) + \dot{P}_{10}(t)\, l(x) = 0, \qquad (20.k-1)$$

$$\dot{P}_{00}(t)\, l(x) = 0. \qquad (20.k)$$

Aus der letzten Relation schliesst man wegen $l(x) \not\equiv 0$ auf

$$\dot{P}_{00}(t) \equiv 0 \quad \text{oder} \quad P_{00}(t) = C_{00},$$

so dass

$$\dot{P}_{10}(t) = C_{00}\, \dot{P}_{11}(t)$$

und (20.$k-1$)

$$\dot{P}_{11}(t)\, [l'(x) + C_{00}\, l(x)] = 0$$

wird. Die Annahme

$$\dot{P}_{11}(t) \not\equiv 0$$

ist nur statthaft für $k = 1$ und führt zu einer Dormoyschen Überlebensordnung.

Aus

$$\dot{P}_{11}(t) \equiv 0, \quad P_{11}(t) = C_{11}$$

hat man nun für $k > 1$ aus (20.$k-1$)

$$\dot{P}_{10}(t) \equiv 0, \quad P_{10}(t) = C_{10}$$

und wegen (21)

$$\frac{\dot{P}_{2\lambda}(t)}{\dot{P}_{22}(t)} = P_{1\lambda}(t), \qquad (\lambda = 0,1)$$

$$\dot{P}_{20}(t) = C_{10}\, \dot{P}_{22}(t), \quad \dot{P}_{21}(t) = C_{11}\, \dot{P}_{22}(t)$$

zu folgern. (20.$k-2$) wird zu

$$\dot{P}_{22}(t)\, [l''(x) + C_{11}\, l'(x) + C_{10}\, l(x)] = 0,$$

woraus für $k > 2$ auf das identische Verschwinden der Funktion $\dot{P}_{22}(t)$ geschlossen werden kann. Die Annahme (22) kann für $\nu > 0$ nie zutreffen.

Wäre (22) beispielsweise erstmals für $\nu = r$ richtig, dann müsste wegen (20.r),

$$\dot{P}_{k-r,k-r}(t)\left[l^{(k-r)}(x) + C_{k-r-1,k-r-1}\, l^{(k-r-1)}(x) + \ldots + C_{k-r-1,1}\, l'(x) + C_{k-r-1,0}\, l(x)\right] = 0,$$

$l(x)$ eine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten der Ordnung $k-r$ erfüllen; nach Satz 1 würde – im Widerspruch zur Voraussetzung – die Barwertformel bloss $k-r$ Glieder umfassen.

Da nun $\dot{P}_{k-1,k-1}(t) \equiv 0$ ist, müssen wegen (21) auch die Ableitungen $\dot{P}_{k-1,\lambda}(t)$, $(\lambda = 0, 1, \ldots, k-2)$ identisch verschwinden, und die Funktionen $P_{k-1,\lambda}(t)$ sind Konstante:

$$P_{k-1,\lambda}(t) = \varkappa_{k-\lambda}, \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, k-1). \tag{23}$$

Die Überlebensordnung $l(x)$ hat demnach der homogenen linearen Differentialgleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$l^{(k)}(x) + \varkappa_1\, l^{(k-1)}(x) + \ldots + \varkappa_{k-1}\, l'(x) + \varkappa_k\, l(x) = 0 \tag{24}$$

zu genügen.

$$\varrho^k + \varkappa_1\, \varrho^{k-1} + \ldots + \varkappa_{k-1}\, \varrho + \varkappa_k = 0 \tag{25}$$

ist zugeordnete charakteristische Gleichung.

Die in Satz 1 für die Darstellbarkeit des Rentenbarwertes nach (1), $\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\, \Phi_i(x)$, als hinreichend erkannte Eigenschaft der Überlebensordnung ist mithin auch notwendig. Es gibt kein Sterbegesetz mit dieser Darstellungseigenschaft, welches nicht in der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (24) enthalten und durch Formel (3) gegeben ist.

4. Darstellung der Zeitrentenfunktion $y_i(t)$ und $A_i(t)$

Satz 5. *Durch die nicht weiter verkürzbare Normalform (15)*

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{i=1}^{k} y_i(t)\, \frac{l^{(i-1)}(x)}{l(x)}, \quad [y_i(0) = 0,\ (i = 1, 2, \ldots, k)]\ ^{*)}$$

sind die Funktionen $y_i(t)$ als Zeitrentenbarwerte eindeutig bestimmt.

---

*) Siehe Note auf folgender Seite.

Beweis: Wegen (23),

$$P_{k-1,\lambda}(t) = \varkappa_{k-\lambda}, \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, k-1),$$

stellt (19) ein lineares System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Funktionen $y_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ dar

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -\delta y_1 && && -\varkappa_k\ y_k + 1 \\
\dot{y}_2 &= \quad y_1 - \delta y_2 && && -\varkappa_{k-1} y_k \\
\dot{y}_3 &= \qquad\quad y_2 - \delta y_3 && && -\varkappa_{k-2} y_k \\
&\vdots && && \vdots \\
\dot{y}_k &= \qquad\qquad\qquad && y_{k-1} && -(\delta + \varkappa_1)\, y_k
\end{aligned} \tag{27'}$$

das in Matrizenform

$$\dot{Y}(t) = PY(t) + Q \tag{27''}$$

mit

$$P = \begin{Vmatrix} -\delta & & & & & -\varkappa_k \\ 1 & -\delta & & 0 & & -\varkappa_{k-1} \\ & 1 & -\delta & & & -\varkappa_{k-2} \\ & & 1 & -\delta & & -\varkappa_{k-3} \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & -(\delta + \varkappa_1) \end{Vmatrix}, \qquad Q = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}$$

geschrieben werden kann. (27) bestimmt mit den Anfangswerten (26)

$$y_i(0) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

die Funktionen $y_i(t)$ eindeutig.

---

*) Das Verschwinden der Anfangswerte

$$y_i(0) = A_i(0) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{26}$$

ist eine Folge der Voraussetzung, dass (1) und (15) Barwertformeln minimaler Gliederzahl sind. Andernfalls würde nämlich aus

$$\bar{a}_{x:\overline{0}|} = \sum_{i=1}^{k} A_i(0)\, \Phi_i(x) = 0$$

die lineare Abhängigkeit der Funktionen $\Phi_i(x)$ und hieraus, $A_k(0) \neq 0$ vorausgesetzt,

$$\Phi_k(x) = -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{A_i(0)}{A_k(0)}\, \Phi_i(x)$$

und

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{i=1}^{k-1} \left[A_i(t) - \frac{A_i(0)}{A_k(0)}\, A_k(t) \right] \Phi_i(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \bar{A}_i(t)\, \Phi_i(x),$$

die Darstellbarkeit des Rentenbarwertes durch eine $(k-1)$-gliedrige Formel folgen.

Da

$$\ddot{Y}(t) = P\dot{Y}(t), \tag{28}$$

ist es naheliegend, das in den Ableitungen

$$\dot{y}_i(t) = z_i(t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

homogene System

$$\dot{Z}(t) = PZ(t) \tag{28'}$$

mit den Anfangswerten

$$z_i(0) = \delta_{1i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

zu lösen und dann durch

$$y_i(t) = \int_0^t z_i(\tau)\, d\tau, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

auf die Funktionen $y_i(t)$ zu schliessen.

Die den Systemen (27) oder (28) zugeordnete Säkulargleichung

$$|P - rE| = (-1)^k \begin{vmatrix} r+\varrho & & & & & \varkappa_k \\ -1 & r+\varrho & & & 0 & \varkappa_{k-1} \\ & -1 & r+\varrho & & & \varkappa_{k-2} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & -1 & r+\varrho & \varkappa_2 \\ & & & & -1 & r+\varrho+\varkappa_1 \end{vmatrix} = \tag{29}$$

$$(-1)^k \left[(r+\delta)^k + \varkappa_1 (r+\delta)^{k-1} + \ldots + \varkappa_{k-1}(r+\delta) + \varkappa_k\right] = 0$$

oder

$$r^k + \omega_1 r^{k-1} + \omega_2 r^{k-2} + \ldots + \omega_{k-1} r + \omega_k = 0 \text{ [1]}$$

stimmt nach der Substitution

$$r + \delta = \varrho$$

mit dem charakteristischen Polynom (25) der Überlebensordnung überein. Einer α_ν-fachen Nullstelle ϱ_ν des charakteristischen Polynoms (25) entspricht die α_ν-fache Wurzel $r_\nu = \varrho_\nu - \delta$ der Säkulargleichung (29).

---

[1]) Die Koeffizienten des nach fallenden Potenzen von r geordneten Polynomes sind gegeben durch

$$\omega_{k-\nu} = \sum_{\lambda=\nu}^{k} \binom{\lambda}{\nu} \delta^{\lambda-\nu} \varkappa_{k-\lambda}, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, k-1), \qquad \omega_0 = \varkappa_0 = 1.$$

Die diesen Wurzeln entsprechenden Hauptsysteme, $\{\Lambda_\nu(x)\}$ von (24) und $\{\chi_\nu(t)\}$ der Systeme (27) oder (28), sind durch

$$\chi_\nu(t) = e^{-\delta t}\,\Lambda_\nu(t)\,, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k) \tag{30}$$

miteinander verknüpft, und zwischen den Matrizen

$$P = \|\varrho_{ih}\| = \left\| \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{i-1} \Lambda_h(x) \right]_{x=0} \right\|,$$

$$R = \|r_{ih}\| = \left\| \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1} \chi_h(t) \right]_{t=0} \right\|$$

bestehen die Relationen

$$R = DP, \quad P^{-1} = R^{-1}D, \quad |R| = |P| \text{ [1]}. \tag{31}$$

System (28′),

$$\dot{Z}(t) = PZ(t)\,,$$

entspricht für jede Funktion $z_i(t)$ eine lineare homogene Differentialgleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$z_i^{(k)}(t) + \omega_1 z_i^{(k-1)}(t) + \ldots + \omega_{k-1}\dot{z}_i(t) + \omega_k z_i(t) = 0\,, \tag{32}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k);$$

ihre Lösungen sind durch die Anfangsbedingungen (18)

$$z_i^{(j-1)}(0) = y_i^{(j)}(0) = y_{ji} = \binom{j-1}{i-1}(-\delta)^{j-i} = d_{ji}, \quad (i,j = 1, 2, \ldots, k)$$

eindeutig bestimmt.

---

[1]) Nach (30) ist

$$r_{ih} = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1}\chi_h(t)\right]_{t=0} = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1} e^{-\delta t}\,\Lambda_h(t)\right]_{t=0}$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{i}\binom{i-1}{\lambda-1}(-\delta)^{i-\lambda}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{\lambda-1}\Lambda_h(x)\right]_{x=0} = \sum_{\lambda=1}^{k} d_{i\lambda}\,\varrho_{\lambda h}\,,$$

mithin $R = DP$ (31).

a) Das charakteristische Polynom (25) hat reelle und voneinander verschiedene Nullstellen.

Im Falle reeller verschiedener Wurzeln ϱ_ν des charakteristischen Polynoms (25) stellen die Funktionen

$$e^{r_1 t},\ e^{r_2 t},\ \ldots,\ e^{r_k t}, \qquad (r_\nu = \varrho_\nu - \delta)$$

ein Hauptsystem dar, so dass

$$z_i(t) = c_{i1}\, e^{r_1 t} + c_{i2}\, e^{r_2 t} + \ldots + c_{ik}\, e^{r_k t}, \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

und

$$y_i(t) = c_{i1} \frac{e^{r_1 t} - 1}{r_1} + c_{i2} \frac{e^{r_2 t} - 1}{r_2} + \ldots + c_{ik} \frac{e^{r_k t} - 1}{r_k}, \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

die allgemeine Lösung von $\dot{Y}(t) = P\,Y(t) + Q$, durch eine Summe von Zeitrentenbarwerten dargestellt wird. Die Beziehungen

$$z_i^{(j-1)}(0) = r_1^{j-1} c_{i1} + r_2^{j-1} c_{i2} + \ldots + r_k^{j-1} c_{ik} = \binom{j-1}{i-1} (-\delta)^{j-1} = d_{ji},$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

bilden für $i = 1, 2, \ldots, k$ je ein lineares System zum Ermitteln der k^2 Integrationskonstanten und ermöglichen deren Elimination. Man erhält so

$$\begin{vmatrix} z_i(t) & e^{r_1 t} & e^{r_2 t} & \ldots & e^{r_k t} \\ d_{1i} & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ d_{2i} & r_1 & r_2 & \ldots & r_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{ki} & r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \ldots & r_k^{k-1} \end{vmatrix} = 0 \tag{33a}$$

und durch wiederholtes Anwenden des Entwicklungssatzes

$$z_i(t) = \dot{y}_i(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{k} r^{\nu\mu}\, d_{\mu i}\, e^{r_\nu t}.$$

Da $P^{-1} = R^{-1} D$ (31) ist [1]), lassen sich hieraus die bemerkenswert einfachen Ausdrücke

$$\dot{y}_i(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \varrho^{\nu i}\, e^{r_\nu t}, \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{34a}$$

---

[1]) Z. B. auch aus

$$P = \|\varrho_h^{i-1}\| = \|(r_h + \delta)^{i-1}\| = \left\| \sum_{\lambda=1}^{i} \binom{i-1}{\lambda-1} \delta^{i-\lambda} r_h^{\lambda-1} \right\| = \|d^{i\lambda} r_{\lambda h}\| = D^{-1} R.$$

und

$$y_i(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \varrho^{\nu i} \frac{e^{r_\nu t}-1}{r_\nu} = \sum_{\nu=1}^{k} \varrho^{\nu i} \bar{a}_{\overline{t}|}(-r_\nu), \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{35a}$$

für die zeitabhängigen Funktionen der Normalform herleiten.

Die Ableitungen $\dot{y}_i(t)$ sind mithin lineare Verbindungen der Fundamentalfunktionen $e^{r_\nu t}$ mit den Elementen der zu $P = \|\varrho_h^{i-1}\|$ kontragredienten Matrix als Koeffizienten. Die Funktionen $y_i(t)$ sind entsprechend gebildete Linearkombinationen der zu den Zinsintensitäten $-r_\nu$ gerechneten Zeitrentenbarwerte $\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta - \varrho_\nu)$ [1]).

b) Das charakteristische Polynom (25) hat eine k-fache reelle Nullstelle ϱ.

Die durch Hauptsystem

$$e^{rt}, \quad te^{rt}, \quad \ldots, \quad t^{k-1}e^{rt}, \qquad (r = \varrho - \delta)$$

und Anfangsbedingungen (18)

$$\dot{y}_i^{(j-1)}(0) = y_{ji} = d_{ji}, \qquad (i,j = 1, 2, \ldots, k)$$

bestimmten Lösungen von (32) ermittelt man aus

$$\begin{vmatrix} \dot{y}_i(t) & e^{rt} & te^{rt} & \ldots & t^{k-1}e^{rt} \\ d_{1i} & & & & \\ d_{2i} & & r_{\mu\nu} & & \\ \vdots & & & & \\ d_{ki} & & & & \end{vmatrix} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{33b}$$

---

[1]) Beispielsweise ist für $k = 2$, $\bar{a}_{x:\overline{t}|} = y_1(t) + y_2(t)\dfrac{l'(x)}{l(x)}$,

$$P = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ \varrho_1 & \varrho_2 \end{Vmatrix}, \; R = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{Vmatrix}, \; |P| = |R| = \varrho_2 - \varrho_1 = r_2 - r_1,$$

$$P^{11} = \varrho_2, \; P^{12} = -\varrho_1, \; P^{21} = -1, \; P^{22} = 1,$$

$$\varrho^{11} = \frac{\varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_1}, \; \varrho^{21} = -\frac{\varrho 1}{\varrho_2 - \varrho_1}, \; \varrho^{12} = -\frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1}, \; \varrho^{22} = \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1},$$

somit

$$y_1(t) = \varrho^{11}\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta - \varrho_1) + \varrho^{21}\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta - \varrho_2) = \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1}[\varrho_2 \bar{a}_{\overline{t}|}(\delta - \varrho_1) - \varrho_1 \bar{a}_{\overline{t}|}(\delta - \varrho_2)],$$

$$y_2(t) = \varrho^{12}\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta - \varrho_1) + \varrho^{22}\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta - \varrho_2) = \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1}[-\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta - \varrho_1) + \bar{a}_{\overline{t}|}(\delta - \varrho_2)],$$

in Übereinstimmung mit einem bereits früher mitgeteilten Ergebnis.

zu

$$\dot{y}_i(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \left(\sum_{\mu=1}^{k} r^{\nu\mu} d_{\mu i} \right) t^{\nu-1} e^{rt} = \sum_{\nu=1}^{k} \varrho^{\nu i} t^{\nu-1} e^{rt}, \tag{34b}$$

woraus

$$y_i(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \varrho^{\nu i} \int_0^t \tau^{\nu-1} e^{r\tau} d\tau = \sum_{\nu=1}^{k} (\nu-1)!\, \varrho^{\nu i} (I^{\nu-1} \bar{a})_{\overline{t}|} (-r)$$

$$= \sum_{\nu=i}^{k} \binom{\nu-1}{i-1} (-\varrho)^{\nu-i} (I^{\nu-1} \bar{a})_{\overline{t}|} (-r) \text{ [1]}, \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{35b}$$

folgt.

Im Falle einer einzigen k-fachen reellen Wurzel sind die Funktionen $y_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ lineare Kombinationen der bis zur Ordnung $k-1$ gebildeten Zeitrentenbarwerte

$$(I^{\nu-1} \bar{a})_{\overline{t}|} (\delta - \varrho), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k);$$

$y_h(t)$, $(1 \leqq h \leqq k)$ enthält nur Barwerte mit einer Ordnungszahl, die grösser oder gleich $h-1$ ist [2]).

---

[1]) Es ist

$$r_{ih} = \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^{i-1} t^{h-1} e^{rt} \right]_{t=0} = (h-1)! \binom{i-1}{h-1} r^{i-h} = \left(\frac{d}{dr} \right)^{h-1} r^{i-1}, \quad (i \geqq h);$$

$$r_{ih} = 0, \quad (i < h),$$

$$\varrho_{ih} = \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^{i-1} x^{h-1} e^{\varrho x} \right]_{x=0} = (h-1)! \binom{i-1}{h-1} \varrho^{i-h} = \left(\frac{d}{d\varrho} \right)^{h-1} \varrho^{i-1}, \quad (i \geqq h);$$

$$\varrho_{ih} = 0, \quad (i < h),$$

woraus nach (17)

$$r^{ih} = \frac{1}{(i-1)!} \binom{i-1}{h-1} (-r)^{i-h}, \quad \varrho^{ih} = \frac{1}{(i-1)!} \binom{i-1}{h-1} (-\varrho)^{i-h}, \quad (i \geqq h) \tag{36}$$

und

$$r^{ih} = \varrho^{ih} = 0, \quad (i > h).$$

Ferner ist

$$\|\varrho_{ih}\| = \left\| \left(\frac{d}{d\varrho} \right)^{h-1} \varrho^{i-1} \right\| = \left\| \left(\frac{d}{dr} \right)^{h-1} (r + \delta)^{i-1} \right\| = \left\| \sum_{\lambda=1}^{i} \binom{i-1}{\lambda-1} \varrho^{i-\lambda} \left(\frac{d}{dr} \right)^{h-1} r^{\lambda-1} \right\| = \|d^{i\lambda} r_{\lambda h}\|,$$

also

$$P = D^{-1} R \text{ und } P^{-1} = R^{-1} D. \tag{31}$$

[2]) Für $k = 2$: $\quad y_1(t) = \bar{a}_{\overline{t}|}(\delta - \varrho) - \varrho (I\bar{a})_{\overline{t}|}(\delta - \varrho),$

$$y_2(t) = (I\bar{a})_{\overline{t}|}(\delta - \varrho).$$

c) Das charakteristische Polynom (25) hat die Nullstellen ϱ_1 (α_1-fach), ϱ_2 (α_2-fach), ..., ϱ_j (α_j-fach), $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_j = k$.

$r_\nu = \varrho_\nu - \delta$ sind Wurzeln der Säkulargleichung (29), $\{\chi_\nu(t)\}$ ist das entsprechende Hauptsystem. Aus einer analog zu (33) gebildeten Determinante erhält man in Anwendung von (31) für die allgemeine Lösung

$$\dot{y}_i(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \varrho^{\nu i} \chi_\nu(t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \quad (34c)$$

und

$$y_i(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \varrho^{\nu i} \int_0^t \chi_\nu(\tau)\, d\tau, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \quad (35c)$$

Sie kann, $\|\varrho^{hi}\| = P^*$ gesetzt, als Matrixlösung

$$\boxed{\dot{Y}(t) = P^* \chi(t), \quad Y(t) = P^* \int_0^t \chi(\tau)\, d\tau}, \qquad (36)$$

$$Y(t) = \left\| \begin{matrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{matrix} \right\|, \quad \chi(t) = \left\| \begin{matrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \\ \vdots \\ \chi_k(t) \end{matrix} \right\| \text{ zusammengefasst werden.}$$

Satz 6. *Die Funktionen* $y_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *entstehen durch lineare Kombinationen der k-Integrale* $\int_0^t \chi_\nu(\tau)\, d\tau$, *welche bis auf Zahlenfaktoren Zeitrentenbarwerte sind. Zur* α_μ*-fachen Wurzel* ϱ_μ *gehören die* α_μ*-Integrale*

$$\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta - \varrho_\mu), \quad (I\bar{a})_{\overline{t}|}(\delta - \varrho_\mu), \quad (II\bar{a})_{\overline{t}|}(\delta - \varrho_\mu), \quad \ldots, \quad (I^{\alpha_\mu - 1}\bar{a})_{\overline{t}|}(\delta - \varrho_\mu).$$

Die Koeffizienten der Linearverbindung sind die Elemente der zu P kontragredienten Matrix $P^* = \|\varrho^{hi}\|$.

Um nun auf die Funktionen $A_i(t)$ selbst zu schliessen, bemerken wir, dass sie wegen (16″)

$$Y(t) = T' A(t), \quad A(t) = T^* Y(t)$$

und (27″)

$$\dot{Y}(t) = P\, Y(t) + Q$$

das lineare System

$$\dot{A}(t) = T'^{-1} P T' A(t) + T'^{-1} Q = \bar{P} A(t) + \bar{Q} \tag{37}$$

mit

$$A(0) = 0$$

erfüllen, welches in den $\dot{A}_i(t)$ homogen wird:

$$\dot{A}(t) = T^* P T' \dot{A}(t) = \bar{P} \dot{A}(t). \tag{38}$$

Die zur Anfangswertmatrix

$$\| A_h^{(i)}(0) \| = \| a_{ih} \|$$

gehörende Lösung der letzten Gleichung wird wegen (36) durch

$$A(t) = T^* P^* \chi(t) = (TP)^* \chi(t)$$

gegeben. Da nach (16″)

$$T = A^{-1} D$$

und (31)

$$P = D^{-1} R$$

ist, wird

$$TP = A^{-1} R, \quad (TP)^* = [(A^{-1} R)^{-1}]' = (R^{-1} A)',$$

mithin

$$\boxed{\dot{A}(t) = (R^{-1} A)' \chi(t), \quad A(t) = (R^{-1} A)' \int_0^t \chi(\tau)\, d\tau} \tag{39}$$

oder

$$A_i(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \left(\sum_{\mu=1}^{k} r^{\nu\mu} a_{\mu i} \right) \int_0^t \chi_\nu(\tau)\, d\tau, \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{39'}$$

Demnach fallen bei der speziellen Wahl der Anfangswertmatrix

$$A = R \tag{40}$$

die Funktionen $\dot{A}_i(t)$ mit dem Hauptsystem $\{\chi_i(t)\}$ zusammen:

$$\dot{A}_i(t) = \chi_i(t), \quad A_i(t) = \int_0^t \chi_i(\tau)\, d\tau, \quad \text{falls } A = R, \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{41}$$

Insbesondere ist für

a) $\chi_\nu(t) = e^{r_\nu t}, \quad (\alpha_\nu = 1)$: $\int_0^t \chi_\nu(\tau)\, d\tau = \bar{a}_{\overline{t}|}(\delta - \varrho_\nu)$, (7)

b) $\chi_\nu(t) = t^{\nu-1} e^{rt}, \quad (\alpha = k)$: $\int_0^t \chi_\nu(\tau)\, d\tau = (\nu - 1)!\, (I^{\nu-1} \bar{a})_{\overline{t}|}(\delta - \varrho)$. (9)

Um namentlich das Ergebnis (41) anschaulich deuten zu können, führen wir die nur auf die Zinsintensität δ wirksamen Operatoren

$$\mathfrak{F}^{\alpha} \equiv \left(-\frac{\partial}{\partial\delta}\right)^{\alpha-1}, \qquad (\alpha \geqq 1\,,\ \text{ganz})$$

und

$$\mathfrak{F}_{\beta} \equiv E^{-\beta}, \quad E^{-\beta}\{f(\delta)\} = f(\delta-\beta)\,,$$

sowie deren Produkt

$$\mathfrak{F}^{\alpha}\mathfrak{F}_{\beta} = \mathfrak{F}_{\beta}\mathfrak{F}^{\alpha} = \mathfrak{F}^{\alpha}_{\beta}, \quad \mathfrak{F}^{1}_{\beta} = \mathfrak{F}_{\beta}$$

ein und bilden

$$\mathfrak{F}_{\varrho}\{\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta)\} = \bar{a}_{\overline{t}|}(\delta-\varrho)\,,$$

$$\mathfrak{F}^{\mu}\{\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta)\} = \int_0^t \tau^{\mu-1} e^{-\delta\tau}\, d\tau = (\mu-1)!\,(I^{\mu-1}\bar{a})_{\overline{t}|}(\delta)\,.$$

Je nachdem $A_i(t)$ einer einfachen oder mehrfachen Wurzel ϱ zugeordnet ist, gilt dann

$$A_i(t,\delta) = \int_0^t \chi_i(\tau,\delta)\, d\tau = \begin{cases} \mathfrak{F}_{\varrho}\{\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta)\}, & (\alpha = 1) \\ \mathfrak{F}^{\mu}_{\varrho}\{\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta)\}, & (\mu = 1, 2, \ldots, \alpha;\quad \alpha \geqq 1) \end{cases} \tag{42}$$

und

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{i=1}^{j}\sum_{\nu=1}^{\alpha_i} \Phi_{i\nu}(x)\, \mathfrak{F}^{\nu}_{\varrho_i}\{\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta)\} = \sum_{i=1}^{j}\sum_{\nu=1}^{\alpha_i} \Phi_{i\nu}(x) \left(-\frac{\partial}{\partial\delta}\right)^{\nu-1} \bar{a}_{\overline{t}|}(\delta-\varrho_i)\,,$$

wodurch die Operatoren $\mathfrak{F}_{(i)}$, welche in (1) eine mögliche Operation an $\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta)$ symbolisch zum Ausdruck bringen sollen, explizite erklärt werden.

Satz 7. *Unter der Voraussetzung $A = R$ entstehen die Funktionen $A_i(t,\delta)$ aus dem Zeitrentenbarwert $\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta)$ entweder durch Verschieben der Zinsintensität oder durch Schiebung und Differentiation nach δ.*

Für die Determinante (12),

$$\Delta(t) = \left| A_h^{(i)}(t) \right|,$$

lässt sich nach (39) die Beziehung

$$\Delta(t) = \frac{|A|}{|R|} \left| \chi_h^{(i-1)}(t) \right| = \frac{|A|}{|R|}\, V(t)$$

herleiten.

$V(t)$ ist Wronskische Determinante des Hauptsystems $\{\chi_\nu(t)\}$,

$$V(t) = |R|\, e^{(r_1+r_2+\dots+r_k)t}, \text{ [1]}$$

so dass

$$\Delta(t) = |A|\, e^{(r_1+r_2+\dots+r_k)t} \text{ [2]} \tag{43}$$

wird. $\Delta(t)$ fällt mithin für $t \geqq 0$ von Null verschieden aus, falls $|A| \neq 0$ ist. Der Sinn der für unsere Erwägungen grundlegenden Voraussetzung $|A| \neq 0$ werde in Satz 8 festgehalten:

Satz 8. *$|A| \neq 0$ ist notwendig und hinreichend dafür, dass die Barwertformel $\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\, \Phi_i(x)$ nicht durch eine gleichwertige mit kleinerer Gliederzahl ersetzt werden kann.*

Der Beweis des Satzes ergibt sich aus der Bemerkung, dass $\{\chi_\nu(t)\}$ dann und nur dann ein Hauptsystem bildet, wenn $\Delta(t) \neq 0$ ist.

5. Sterbegesetze, für welche $\mathsf{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{i=1}^{k} B_i(t,v)\, \Psi_i(x)$, $(k \geqq 2)$ ist [3]

Bildet man zu einem Sterbegesetz vom Typus (3) den vorschüssigen Leibrentenbarwert $\mathsf{a}_{x:\overline{t}|}$, so stellt man fest, dass auch $\mathsf{a}_{x:\overline{t}|}$ die in Satz 1 für den kontinuierlichen Barwert nachgewiesene Darstellungseigenschaft hat. *H. Jecklin* und *W. Leimbacher* sowie *P. Leepin* [4], deren Arbeiten dem Fall $\mathsf{a}_{x:\overline{t}|} = A(t) + B(t)\, q_x$ gewidmet sind, geben als Lösungsfunktionen Sterbegesetze $l(x) = (\pi_1 + \pi_2 x)\, \sigma^x$ und $l(x) = \pi_1 \sigma_1^x + \pi_2 \sigma_2^x$, die mit den durch $\bar{a}_{x:\overline{t}|} = y_1(t) + y_2(t)\, \dfrac{l'(x)}{l(x)}$ bestimmten Überlebensordnungen übereinstimmen.

---

[1]) Die Wronskideterminante $V(t) = |\chi_h^{(i-1)}(t)|$ erfüllt die Differentialgleichung $V'(t) = (\text{Spur } P)\ V(t)$, $\text{Spur } P = p_{11} + p_{22} + \dots + p_{kk} = -k\delta - \varkappa_1 = r_1 + r_2 + \dots + r_k$.

[2]) Auch aus $\Delta'(t) = (\text{Spur } \overline{P})\, \Delta(t)$, $\overline{P} = T'^{-1} P T'$,

$$\text{Spur } \overline{P} = \text{Spur } P = r_1 + r_2 + \dots + r_k.$$

[3]) Im Falle $k = 1$, ist die Dormoysche Überlebensordnung $l(x) = \lambda\sigma^x$ einzige Lösung mit dieser Eigenschaft.

[4]) «Sterbegesetze, welche eine exakte Darstellung der Leibrenten durch Zeitrenten erlauben», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 54. Band, 1954, S. 163–168.

Die folgenden Erwägungen werden zeigen, dass in der durch die allgemeine Form

$$(2) \qquad \mathsf{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{i=1}^{k} B_i(t,v)\, \Psi_i(x) = \sum_{i=1}^{k} \Psi_i(x)\, \mathfrak{G}_{(i)}\{\mathsf{a}_{\overline{t}|}(v)\}, \qquad (k \geqq 2)$$

erzeugten Lösungsmenge die durch

$$(1) \qquad \bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{i=1}^{k} A_i(t,\delta)\, \Phi_i(x) = \sum_{i=1}^{k} \Phi_i(x)\, \mathfrak{F}_{(i)}\{\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta)\}, \qquad (k \geqq 2)$$

bestimmten Sterbegesetze $l(x)$ enthalten sind und durch alleinige Beschränkung der Argumente auf ganzzahlige Werte hervorgehen. In den übrigen Ergebnissen zeigt sich weitgehend dieselbe formale Analogie, die bei kontinuierlich und diskontinuierlich geschriebenen Relationen zwischen versicherungstechnischen Grössen besteht.

Die nachfolgenden Betrachtungen schliessen sich methodisch den bisherigen Entwicklungen an; wir können uns daher öfters mit einem summarischen Aufzählen der Ergebnisse begnügen.

Wir führen die Bezeichnungen

$$\Delta B_h(i-1) = b_{ih}, \qquad (i,h = 1, 2, \ldots, k),\ ^{1)}$$

$$B = \|b_{ih}\|, \quad B^{-1} = \|b^{ih}\| = \left\| \frac{B_{hi}}{|B|} \right\|, \quad |B| = |b_{ih}|$$

und die Grösse

$$\vartheta(t) = \tag{44}$$

$$\begin{vmatrix} \Delta B_1(t) & \Delta B_2(t) & \ldots & \Delta B_k(t) \\ \Delta B_1(t+1) & \Delta B_2(t+1) & \ldots & \Delta B_k(t+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta B_1(t+k-1) & \Delta B_2(t+k-1) & \ldots & \Delta B_k(t+k-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta B_1(t) & \Delta B_2(t) & \ldots & \Delta B_k(t) \\ \Delta^2 B_1(t) & \Delta^2 B_2(t) & \ldots & \Delta^2 B_k(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta^k B_1(t) & \Delta^k B_2(t) & \ldots & \Delta^k B_k(t) \end{vmatrix},$$

$$\vartheta(0) = |b_{ih}| = |B|$$ ein.

---

[1]) Die zwischen den Funktionswerten $\Delta B_h(i-1) = b_{ih}$ und den Differenzen $\Delta^i B_h(0)$ bestehende Beziehung

$$b_{ih} = \Delta B_h(i-1) = \Delta E^{i-1} B_h(0) = (\Delta + 1)^{i-1} \Delta B_h(0) = \sum_{\lambda=1}^{i} \binom{i-1}{\lambda-1} \Delta^\lambda B_h(0)$$

werde durch $B = G^{-1} \tilde{B}$, $B^{-1} = \tilde{B}^{-1} G$, $B = \|b_{ih}\| = \|\Delta B_h(i-1)\|$, $\tilde{B} = \|\beta_{ih}\| = \|\Delta^i B_h(0)\|$ festgehalten; $G = \|g_{ih}\| = \left\| \binom{i-1}{h-1} (-1)^{i-h} \right\|$, $G^{-1} = \|g^{ih}\| = \left\| \binom{i-1}{h-1} \right\|$ (vgl. Fussnote auf Seite 435).

Wie bei der kontinuierlichen Rente kann $\mathsf{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{h=1}^{k} B_h(t)\, \Psi_h(x)$ auf eine Normalform reduziert werden.

Satz 9. *Der Barwertformel* $\mathsf{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{h=1}^{k} B_h(t)\, \Psi_h(x)$ *entspricht*

$$\mathsf{a}_{x:\overline{t}|} = \begin{cases} \eta_1(t) + \eta_2(t)\dfrac{l(x+1)}{l(x)} + \ldots + \eta_k(t)\dfrac{l(x+k-1)}{l(x)}, & \textit{falls } |B| \neq 0, \\[2ex] \eta_1(t) + \eta_2(t)\dfrac{l(x+1)}{l(x)} + \ldots + \eta_r(t)\dfrac{l(x+r-1)}{l(x)}, & (1 \leqq r < k), \\ & \textit{falls } |B| = 0. \end{cases}$$

Zum *Beweis* beansprucht man das aus

$$\Delta\, \mathsf{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{h=1}^{k} \Delta B_h(t)\, \Psi_h(x) = \frac{1}{l(x)}\, v^t\, l(x+t)\ ^{1)}$$

für $t = i-1$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sich ergebende Gleichungssystem

$$\sum_{h=1}^{k} b_{ih}\, \Psi_h(x) = \frac{1}{l(x)}\, v^{i-1}\, l(x+i-1), \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

um die Funktionen $\Psi_h(x)$ in (2) zu eliminieren. $|B| \neq 0$ vorausgesetzt, kann das Eliminationsresultat

$$\begin{vmatrix} l(x)\, \mathsf{a}_{x:\overline{t}|} & B_1(t) & B_2(t) & \ldots & B_k(t) \\ l(x) & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ v\, l(x+1) & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ v^2\, l(x+2) & b_{31} & b_{32} & \ldots & b_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v^{k-1}\, l(x+k-1) & b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kk} \end{vmatrix} = 0$$

in

$$\mathsf{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{k} b^{\mu\lambda}\, B_\mu(t)\, v^{\lambda-1} \frac{l(x+\lambda-1)}{l(x)}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{k} \eta_\lambda(t) \frac{l(x+\lambda-1)}{l(x)} = \sum_{\lambda=1}^{k} \overline{\eta}_\lambda(t) \frac{D(x+\lambda-1)}{D(x)}, \qquad (45)$$

$$\eta_\lambda(t) = v^{\lambda-1}\, \overline{\eta}_\lambda(t), \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, k) \qquad (46)$$

entwickelt werden.

---

[1]) Δ bezeichnet Differenzenbildung nach t.

Ist $|B| = 0$, so wird das Beweisverfahren von Satz 2 angewendet und beachtet, dass für eine Überlebensordnung, welche Lösung einer linearen homogenen Differenzengleichung r-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist, der Leibrentenbarwert in einer r-gliedrigen Formel (2) erscheint [1]).

Die durch
$$\bar{\eta}_\lambda(t) \sum_{\mu=1}^{k} b^{\mu\lambda} B_\mu(t), \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, k) \tag{47'}$$
definierten Funktionen der Normalform entstehen aus den $B_h(t)$, $(h = 1, 2, \ldots, k)$ durch die lineare Transformation B^*:
$$\bar{H}(t) = (B^{-1})' B(t) = B^* B(t), \quad B(t) = B' \bar{H}(t), \tag{47''}$$
$$B(t) = \begin{Vmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \\ \vdots \\ B_k(t) \end{Vmatrix}, \quad \bar{H}(t) = \begin{Vmatrix} \bar{\eta}_1(t) \\ \bar{\eta}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{\eta}_k(t) \end{Vmatrix};$$
die Werte ihrer ersten Differenzen für ganzzahlige Argumente $i-1$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sind gegeben durch
$$\Delta \bar{\eta}_h(i-1) = \sum_{\nu=1}^{k} b^{\nu h} \Delta B_\nu(i-1) = \sum_{\nu=1}^{k} b_{i\nu} b^{\nu h} = \delta_{ih}. \tag{48}$$

Satz 10. *Durch die nicht weiter verkürzbare Darstellung*
$$\mathrm{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{\lambda=1}^{k} \eta_\lambda(t) \frac{l(x+\lambda-1)}{l(x)} = \sum_{\lambda=1}^{k} \bar{\eta}_\lambda(t) \frac{D(x+\lambda-1)}{D(x)}, \quad |B| \neq 0$$
wird die Überlebensordnung oder die diskontierte Zahl $D(x)$ als Lösung einer linearen homogenen Differenzengleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten bestimmt.

---

[1]) Eine Lösung von $l(x+r) + P_1 l(x+r-1) + \ldots + P_r l(x) = 0$ ist z. B. $l(x) = \pi_1 \sigma_1^x + \pi_2 \sigma_2^x + \ldots + \pi_r \sigma_r^x$; dann wird
$$\mathrm{a}_{x:\overline{t}|} = \frac{1}{l(x)} \sum_{\tau=0}^{t-1} \left(\sum_{i=1}^{r} \pi_i \sigma_i^{x+\tau} \right) v^\tau = \sum_{i=1}^{r} \frac{\pi_i \sigma_i^x}{l(x)} \mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma_i \nu).$$

Beweis: Die leicht zu verifizierende Relation

$$\nabla(N_x - N_{x+t}) - \Delta(N_x - N_{x+t}) = -D_x \text{ [1]}$$

geht für den Ansatz (45),

$$N_x - N_{x+t} = D(x)\, a_{x:\overline{t}|} = \sum_{\lambda=1}^{k} \bar{\eta}_\lambda(t)\, D(x+\lambda-1),$$

unter der Annahme $\bar{\eta}_k(t) \not\equiv 0$ über in

$$D(x+k) - \sum_{\lambda=1}^{k-1} \frac{\bar{\eta}_{\lambda+1}(t+1) - \bar{\eta}_\lambda(t)}{\bar{\eta}_k(t)} D(x+\lambda) - \frac{\bar{\eta}_1(t+1) - 1}{\bar{\eta}_k(t)} D(x) = 0.$$

In einem zum Beweisverfahren von Satz 4 analogen Vorgehen lässt sich zeigen, dass die Koeffizientenfunktionen

$$\left.\begin{aligned} \bar{\Pi}_\lambda(t) &= \frac{\bar{\eta}_{\lambda+1}(t+1) - \bar{\eta}_\lambda(t)}{\bar{\eta}_k(t)}, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, k-1), \\ \bar{\Pi}_0(t) &= \frac{\bar{\eta}_1(t+1) - 1}{\bar{\eta}_k(t)} \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

den Differenzengleichungen

$$\Delta \bar{\Pi}_\lambda(t) = 0, \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

genügen, mithin – wir beschränken uns auf ganzzahlige Argumente – Konstante sind:

$$\bar{\Pi}_\lambda(t) = -\omega_{k-\lambda}, \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, k-1). \tag{50}$$

Die Funktionen $D(x)$ und $l(x)$ erfüllen daher die Differenzengleichungen

$$D(x+k) + \omega_1 D(x+k-1) + \omega_2 D(x+k-2) + \ldots + \omega_{k-1} D(x+1) + \omega_k D(x) = 0$$

und (51)

$$l(x+k) + \varkappa_1 l(x+k-1) + \varkappa_2 l(x+k-2) + \ldots + \varkappa_{k-1} l(x+1) + \varkappa_k l(x) = 0 \tag{52}$$

mit

$$\omega_\lambda = v^\lambda \varkappa_\lambda, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k).$$

---

[1]) Die Differenzenbildung nach t wird mit Δ, diejenige nach x mit ∇ bezeichnet.

Das Sterbegesetz $l(x)$ lässt sich als allgemeine Lösung von (52) in der Gestalt

$$l(x) = \pi_1(x)\,\sigma_1^x + \pi_2(x)\,\sigma_2^x + \ldots + \pi_k(x)\,\sigma_k^x \tag{53}$$

oder

$$\begin{aligned} l(x) = {} & [\pi_{11}(x) + x\,\pi_{12}(x) + \ldots + x^{\alpha_1-1}\,\pi_{1\alpha_1}(x)]\,\sigma_1^x + \ldots \\ & + [\pi_{j1}(x) + \pi_{j2}(x) + \ldots + x^{\alpha_j-1}\,\pi_{j\alpha_j}(x)]\,\sigma_j^x \end{aligned} \tag{54}$$

schreiben, je nachdem die charakteristische Gleichung

$$\sigma^k + \varkappa_1\,\sigma^{k-1} + \varkappa_2\,\sigma^{k-2} + \ldots + \varkappa_{k-1}\,\sigma + \varkappa_k = 0 \tag{55}$$

k voneinander verschiedene Nullstellen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ oder mit der Vielfachheit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_j = k$, zusammenfallende Wurzeln $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_j$ hat. Die Koeffizientenfunktionen $\pi_i(x)$ sind periodisch mit der Periode 1 und haben für unsere Betrachtungen die Bedeutung von Konstanten.

Dass auch die Umkehrung des Satzes richtig ist, lässt sich durch Substitution der Ausdrücke (53) und (54) für $l(x)$ in

$$\mathsf{a}_{x:\overline{t}|} = \frac{1}{l(x)} \sum_{\tau=0}^{t-1} l(x+\tau)\,v^\tau$$

nachweisen.

Obwohl die durch die Normalformen (15) und (45) erzeugten Relationen – Differentialgleichung (24) und Differenzengleichung (52) –, welche $l(x)$ als Lösung bestimmen, von wesentlich anderer Natur sind, enthalten beide Lösungsmengen bei alleiniger Berücksichtigung ganzzahliger Argumente wegen der Gleichheit ihrer charakteristischen Polynome dieselben Sterbegesetze [1]).

Satz 11. *Die Funktionen* $\bar{\eta}_i(t)$ *und* $\eta_i(t)$,

$$[\bar{\eta}_i(0) = \eta_i(0) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, k)]$$

sind in der nicht weiter verkürzbaren Normalform

$$\mathsf{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{i=1}^{k} \bar{\eta}_i(t)\,\frac{D(x+i-1)}{D(x)} = \sum_{i=1}^{k} \eta_i(t)\,\frac{l(x+i-1)}{l(x)}$$

als Zeitrentenbarwerte eindeutig bestimmt.

---

[1]) Sowohl die Wurzeln der charakteristischen Gleichung wie die Integrationskonstanten haben im Sterbegesetz die Bedeutung von Parametern.

Beweis: Unter Berücksichtigung von (50) stellen die Beziehungen (49) für die Funktionen $\overline{\eta}_i(t)$ ein lineares inhomogenes System von Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten dar:

$$\begin{array}{lllll}
\overline{\eta}_1(t+1) = & & & & -\omega_k \;\; \overline{\eta}_k(t) + 1 \\
\overline{\eta}_2(t+1) = & \overline{\eta}_1(t) & & & -\omega_{k-1}\, \overline{\eta}_k(t) \\
\overline{\eta}_3(t+1) = & & \overline{\eta}_2(t) & & -\omega_{k-2}\, \overline{\eta}_k(t) \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
\overline{\eta}_k(t+1) = & & & \overline{\eta}_{k-1}(t) & -\omega_1 \;\; \overline{\eta}_k(t)
\end{array} \tag{56'}$$

oder

$$\overline{H}(t+1) = M\,\overline{H}(t) + N \tag{56''}$$

mit

$$M = \left\| \begin{array}{cccccc}
0 & & & & & -\omega_k \\
1 & 0 & & & \mathbf{0} & -\omega_{k-1} \\
 & 1 & 0 & & & -\omega_{k-2} \\
 & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & \mathbf{0} & & & 1 & -\omega_1
\end{array} \right\|, \qquad N = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\|.$$

Für die Funktionen

$$\zeta_i(t) = \Delta\overline{\eta}_i(t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

wird das System homogen:

$$Z(t+1) = M\,Z(t). \tag{57}$$

Seine Säkulargleichung

$$|M - sE| = (-1)^k \left\| \begin{array}{cccccc}
s & & & & & \omega_k \\
-1 & s & & & \mathbf{0} & \omega_{k-1} \\
 & -1 & s & & & \omega_{k-2} \\
 & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & \mathbf{0} & & & -1 & \omega_1 + s
\end{array} \right\| = (-1)^k (s^k + \omega_1 s^{k-1} + \ldots + \omega_{k-1} s + \omega_k) = 0 \tag{58}$$

stimmt nach der Substitution

$$s = v\sigma \tag{59}$$

mit dem charakteristischen Polynom der Differenzengleichung der Überlebensordnung überein.

Die k linearen Differenzengleichungen k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Funktionen $\zeta_i(t)$,

$$\zeta_i(t+k) + \omega_1 \zeta_i(t+k-1) + \ldots + \omega_{k-1} \zeta_i(t+1) + \omega_k \zeta_i(t) = 0, \quad (60)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k),$$

sind System (57) äquivalent [1]).

Die zu (60) gehörende charakteristische Gleichung (58)

$$s^k + \omega_1 s^{k-1} + \ldots + \omega_{k-1} s + \omega_k = 0$$

ist durch (59) mit dem charakteristischen Polynom der Überlebensordnung verbunden; mithin müssen zwischen den Hauptsystemen $\{\Lambda_\nu(x)\}$ von (52) und $\{\Omega_\nu(t)\}$ von (60) und (57) die Relationen

$$\Omega_\nu(t) = v^t \Lambda_\nu(t), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

und zwischen den Elementen der Matrizen

$$S = \|s_{ih}\| = \|\Omega_h(i-1)\|, \quad \Sigma = \|\sigma_{ih}\| = \|\Lambda_h(i-1)\|$$

---

[1]) Um diese Äquivalenz einzusehen, schreibe man (57),

$$\begin{aligned}
\zeta_1(t+1) &= \qquad\qquad - \omega_k \zeta_k(t), && (57.1)\\
\zeta_2(t+1) &= \zeta_1(t) \qquad - \omega_{k-1} \zeta_k(t), && (57.2)\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\zeta_k(t+1) &= \quad \zeta_{k-1}(t) - \omega_1 \zeta_k(t), && (57.\mathrm{k})
\end{aligned}$$

in der Form

$$\begin{aligned}
\zeta_1(t+1) &= \qquad\qquad - \omega_k \zeta_k(t), \\
\zeta_{\lambda+1}(t+\lambda+1) &= \zeta_\lambda(t+\lambda) - \omega_{k-\lambda} \zeta_k(t+\lambda), \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, k-1)
\end{aligned}$$

und addiere beidseitig; man erhält

$$\zeta_k(t+k) + \sum_{\lambda=1}^{k} \omega_\lambda \zeta_k(t+k-\lambda) = 0, \quad \text{also (60.k)}.$$

Setzt man darin gemäss (57.1)

$$\zeta_k(t) = -\frac{1}{\omega_k} \zeta_1(t+1), \qquad \text{so folgt (60.1)}.$$

Die übrigen Differenzengleichungen von (60) ergeben sich, wenn die durch (57.2), (57.3) usw. festgelegten Ausdrücke für $\zeta_k(t)$ der Reihe nach in (60.k) eingesetzt werden und man die bereits nachgewiesenen Relationen für Funktionen mit niedrigerem Index heranzieht.

und ihren Inversen die Beziehungen

$$s_{ih} = v^{i-1}\sigma_{ih}, \quad \sigma^{ih} = v^{h-1}s^{ih}\ ^{1)} \tag{61}$$

bestehen.

Wenn $\{\Omega_\nu(t)\}$ ein Fundamentalsystem bildet, lässt sich jede für uns in Betracht fallende Lösung von (60) durch

$$\zeta_i(t) = \pi_{i1}\Omega_1(t) + \pi_{i2}\Omega_2(t) + \ldots + \pi_{ik}\Omega_k(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

darstellen. Die durch Vorgabe der ersten k^2 Funktionswerte (48)

$$\zeta_i(j-1) = \delta_{ji}, \qquad (i,j = 1, 2, \ldots, k)$$

bestimmten Lösungen sind nach Elimination der Konstanten π_{ih} in der Gestalt

$$\begin{vmatrix} \zeta_i(t) & \Omega_1(t) & \Omega_2(t) & \ldots & \Omega_k(t) \\ \delta_{1i} & & & & \\ \delta_{2i} & & & s_{\mu\nu} & \\ \vdots & & & & \\ \delta_{ki} & & & & \end{vmatrix} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

angebbar, welche nach $\zeta_i(t)$ auflösbar ist:

$$\zeta_i(t) = \sum_{\nu=1}^{k} s^{\nu i}\Omega_\nu(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{62}$$

---

[1]) Aus

$$s_{\mu\lambda}s^{\lambda h} = v^{\mu-1}\sigma_{\mu\lambda}s^{\lambda h} = \delta_{\mu h}$$

folgt

$$\sigma^{i\mu}\sigma_{\mu\lambda}s^{\lambda h} = \delta_{i\lambda}s^{\lambda h} = s^{ih} = \sum_{\mu=1}^{k} r^{\mu-1}\sigma^{i\mu}\delta_{\mu h} = r^{h-1}\sigma^{ih}.$$

Mit Hilfe der Matrizen

$$\Gamma = \|\gamma_{ih}\| = \|\delta_{ih}v^{h-1}\| = \begin{Vmatrix} 1 & & & 0 \\ & v & & \\ & & v^2 & \\ 0 & & & \ddots \; v^{k-1} \end{Vmatrix},$$

$$\Gamma^{-1} = \|\gamma^{ih}\| = \|\delta_{ih}r^{i-1}\| = \begin{Vmatrix} 1 & & & 0 \\ & r & & \\ & & r^2 & \\ 0 & & & \ddots \; r^{k-1} \end{Vmatrix}$$

können Relationen (61) in einer (31) analogen Form als Produkt geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} S &= \Gamma\Sigma\ , & S^{-1} &= \Sigma^{-1}\Gamma^{-1}, \\ \Sigma &= \Gamma^{-1}S, & \Sigma^{-1} &= S^{-1}\Gamma\ . \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

a) Das charakteristische Polynom (55) hat k voneinander verschiedene Nullstellen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$.

$s_\nu = v\sigma_\nu$ sind einfache Wurzeln der Säkulargleichung (58); die Funktionen

$$s_1^t, s_2^t, \ldots, s_k^t, \qquad (s_\nu = v\sigma_\nu)$$

bilden ein Hauptsystem, für welches

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_1^{k-1} & s_2^{k-1} & \ldots & s_k^{k-1} \end{Vmatrix}, \qquad |S| = \prod_{\substack{i,h=1 \\ (i>h)}}^{k} (s_i - s_h) \neq 0$$

ist. Man erhält aus (62)

$$\bar{\eta}_i(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} \zeta_i(\tau) = \sum_{\nu=1}^{k} s^{\nu i} \sum_{\tau=0}^{t-1} s_\nu^\tau = \sum_{\nu=1}^{k} s^{\nu i} \mathrm{a}_{\overline{t}|}(s_\nu)$$

und unter Berücksichtigung von (46) und (61)

$$\eta_i(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \sigma^{\nu i} \mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma_\nu v), \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{63a}$$

Im Falle lauter verschiedener Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind die Funktionen $\eta_i(t)$ der Normalform mit den Elementen der Matrix $\Sigma^* = \|\sigma^{hi}\|$ als Koeffizienten gebildete lineare Verbindungen der Zeitrentenbarwerte $\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma_\nu v)$, $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ [1]).

---

[1]) Für $k = 2$,

$$\mathrm{a}_{x:\overline{t}|} = \eta_1(t) + \eta_2(t) \frac{l(x+1)}{l(x)}, \qquad [l(x) = \lambda_1 \sigma_1^x + \lambda_2 \sigma_2^x],$$

ist

$$\Sigma = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{Vmatrix}, \qquad |\Sigma| = \sigma_2 - \sigma_1.$$

$$\sigma^{11} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1}, \quad \sigma^{21} = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}, \quad \sigma^{12} = -\frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1}, \quad \sigma^{22} = \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1},$$

damit

$$\eta_1(t) = \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1} [\sigma_2 \mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma_1 v) - \sigma_1 \mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma_2 v)],$$

$$\eta_2(t) = \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1} [-\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma_1 v) + \mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma_2 v)].$$

b) Das charakteristische Polynom (55) hat eine einzige k-fache Nullstelle.

$$s = v\sigma \text{ ist } k\text{-fache Wurzel von (58)},$$

$$s^t,\ ts^t,\ t^2 s^t,\ \ldots,\ t^{k-1} s^t$$

das dazugehörende Hauptsystem für (60), so dass (62)

$$\zeta_i(t) = \sum_{\nu=1}^{k} s^{\nu i} t^{\nu-1} s^t,$$

$$\bar{\eta}_i(t) = \sum_{\nu=1}^{k} s^{\nu i} \sum_{\tau=0}^{t-1} \tau^{\nu-1} s^\tau$$

und

$$\eta_i(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \sigma^{\nu i} \sum_{\tau=0}^{t-1} \tau^{\nu-1} s^\tau, \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \qquad (63\,\mathrm{b})$$

wird. Die Summen $\sum_{\tau=0}^{t-1} \tau^{\nu-1} s^\tau$ sind – allerdings nicht im üblichen Sinne definierte – Zeitrentenbarwerte höherer Ordnung, die sich jedoch auf die Barwerte

$$(I^n \mathrm{a})_{\overline{t}|}(s) = \sum_{\tau=0}^{t-1} \binom{n+\tau}{\tau} s^\tau, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$(I^0 \mathrm{a})_{\overline{t}|}(s) = \mathrm{a}_{\overline{t}|}(s),$$

zurückführen lassen. Man bilde hierzu aus

$$t^{n-1} = \sum_{\lambda=1}^{n} C_{n\lambda} \binom{t+\lambda-1}{\lambda-1}, \quad (n \geqq 1, \text{ ganz}) \qquad (64)$$

die Folge

$$\Delta^{m-1} t^{n-1} = \sum_{\lambda=m}^{n} C_{n\lambda} \binom{t+\lambda-1}{\lambda-m}, \quad (m = 1, 2, \ldots, n),$$

welche für $t = 0$ das in den $C_{n\lambda}$ lineare System

$$[\Delta^{m-1} t^{n-1}]_{t=0} = \Delta_{mn} = \sum_{\lambda=m}^{n} C_{n\lambda} \binom{\lambda-1}{m-1} = \sum_{\lambda=1}^{k} C_{n\lambda} g^{\lambda m}$$

oder
$$\Delta' = C\,G^{-1},$$
$$G = \|g_{mn}\|\ ^{1)}, \quad \Delta = \|\Delta_{mn}\|\ ^{2)}, \quad C = \|C_{mn}\|\ ^{3)},$$
bestimmt, dessen Lösung
$$C = \Delta' G$$
oder
$$C_{mn} = \sum_{\lambda=1}^{k} \Delta_{\lambda m}\, g_{\lambda n} = \sum_{\lambda=n}^{k} \binom{\lambda-1}{n-1} (-1)^{\lambda-n} \Delta_{\lambda m}$$
beträgt. Nach (64) sind die Summen $\sum_{\tau=0}^{t-1} \tau^{n-1} s^{\tau}$ Linearverbindungen von Barwerten bis zur Ordnung $n-1$, deren Koeffizienten Elemente der Matrix $C = \Delta' G$ sind [4]:
$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \tau^{n-1} s^{\tau} = \sum_{\lambda=1}^{n} C_{n\lambda} (I^{\lambda-1}\mathrm{a})_{\overline{t}|}(s)\,, \quad (n \geqq 1)\,. \tag{65}$$

---

[1]) Vgl. Fussnoten auf S. 435 und 450.

[2]) $(e^t-1)^{m-1} = \sum_{\nu=m}^{\infty} \Delta_{m\nu} \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$ ist erzeugende Funktion der Zahlen Δ_{mn}; ihre Ermittlung aus $[\Delta^{m-1} t^{n-1}]_{t=0}$ führt zu
$$\Delta_{mn} = \sum_{\lambda=1}^{m} (-1)^{\lambda-1} \binom{m-1}{\lambda-1} (m-\lambda)^{n-1} = \sum_{\lambda=1}^{m} \binom{m-1}{\lambda-1} (-1)^{m-\lambda} (\lambda-1)^{n-1}.$$
$$\|\Delta_{mn}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{Vmatrix}.$$

[3])
$$\|C_{mn}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -12 & 6 & 0 \\ 1 & -15 & 50 & -60 & 24 \end{Vmatrix},$$
insbesondere ist $C_{mm} = (m-1)!$ und $\sum_{\nu=1}^{m} C_{m\nu} = 0$.

[4]) Unter Berücksichtigung von $\sum_{\nu=1}^{m} C_{m\nu} = 0$.

Durch Einsetzen dieser Beziehung in (63b) gewinnen wir

$$\eta_i(t) = \sum_{\lambda=1}^{k} \left(\sum_{\nu=\lambda}^{k} \sigma^{\nu i} C_{\nu\lambda}\right) (I^{\lambda-1}\mathrm{a})_{\overline{t}|}(s) = \sum_{\lambda=1}^{k} \theta^{\lambda i} (I^{\lambda-1}\mathrm{a})_{\overline{t}|}(\sigma v), \tag{66}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

mit

$$\theta^{hi} = \sum_{\nu=1}^{k} \sigma^{\nu i} C_{\nu h}, \quad \theta^* = \|\theta^{hi}\|$$

oder

$$\theta^* = \Sigma^* C = \Sigma^* \Delta' G. \tag{67}$$

Ist σ einzige k-fache Wurzel des charakteristischen Polynomes, dann sind die Funktionen $\eta_i(t)$ der Normalform Linearverbindungen entweder der Summen

(a) $$\sum_{\tau=0}^{t-1} s^\tau, \ \sum_{\tau=1}^{t-1} \tau s^\tau, \ \ldots, \ \sum_{\tau=1}^{t-1} \tau^{k-1} s^\tau, \quad (s = \sigma v)$$

oder der Zeitrentenbarwerte

(b) $$\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma v), \ (I\mathrm{a})_{\overline{t}|}(\sigma v), \ \ldots, \ (I^{k-1}\mathrm{a})_{\overline{t}|}(\sigma v).$$

Die Koeffizienten sind in der Darstellung nach (a) Elemente der Matrix $\Sigma^* = \|\sigma^{hi}\|$, in der Darstellung nach (b) Elemente des Produktes $\theta^* = \Sigma^* \Delta' G = \|\theta^{hi}\|$ [1]).

---

[1]) Im Fall $k = 2$ gehören zur Doppelwurzel σ die Matrizen

$$\Sigma = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & \sigma \end{Vmatrix}, \quad \Sigma^* = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{\sigma} \end{Vmatrix} \quad \text{mit } |\sigma_{ih}| = \sigma,$$

so dass nach (67)

$$\theta^* = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{\sigma} & \frac{1}{\sigma} \end{Vmatrix}$$

und nach (66)

$$\eta_1(t) = 2\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma v) - (I\mathrm{a})_{\overline{t}|}(\sigma v),$$

$$\eta_2(t) = \frac{1}{\sigma}[-\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma v) + (I\mathrm{a})_{\overline{t}|}(\sigma v)],$$

also

$$\mathrm{a}_{x:\overline{t}|} = 2\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma v) - (I\mathrm{a})_{\overline{t}|}(\sigma v) + \frac{1}{\sigma}[-\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma v) + (I\mathrm{a})_{\overline{t}|}(\sigma v)] \frac{l(x+1)}{l(x)}$$

wird.

c) Das charakteristische Polynom (55) hat die Nullstellen σ_1 (α_1-fach), σ_2 (α_2-fach), ..., σ_j (α_j-fach), $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_j = k$.

$s_\nu = v\sigma_\nu$ sind Wurzeln von (58) mit entsprechender Vielfachheit. Nach (62) ergeben sich die durch das Hauptsystem $\{\Omega_\nu(t)\}$ bestimmten Lösungen zu

$$\bar{\eta}_i(t) = \sum_{\nu=1}^{k} s^{\nu i} \sum_{\tau=0}^{t-1} \Omega_\nu(\tau)$$

und

$$\eta_i(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \sigma^{\nu i} \sum_{\tau=0}^{t-1} \Omega_\nu(\tau), \quad (i = 1, 2, \ldots, k); \tag{63c}$$

sie können,

$$\Omega(t) = \begin{Vmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \vdots \\ \Omega_k(t) \end{Vmatrix} \quad \text{gesetzt, in}$$

$$\Delta \bar{H}(t) = S^* \Omega(t)$$

und

$$\boxed{H(t) = \Sigma^* \left(\sum_{\tau=0}^{t-1} \Omega(\tau) \right) = \sum_{\tau=0}^{t-1} (\Sigma^* \Omega(\tau))} \tag{63}$$

zusammengefasst werden.

Satz 12. *Die Funktionen $\eta_i(t)$ der Normalform entstehen durch lineare Kombination der Summen $\sum_{\tau=0}^{t-1} \Omega_\nu(\tau)$; Koeffizienten dieser Linearverbindung sind die Elemente der zu Σ kontragredienten Matrix $\Sigma^* = \|\sigma^{hi}\|$. Die Grössen $\sum_{\tau=0}^{t-1} \Omega_\nu(\tau)$ sind ihrerseits lineare Verbindungen von Zeitrentenbarwerten. Zur α_μ-fachen Wurzel σ_μ gehören die Summen*

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} s^\tau = \mathsf{a}_{\overline{t}|}(\sigma_\mu v),$$

$$\sum_{\tau=1}^{t-1} \tau s^\tau = -\mathsf{a}_{\overline{t}|}(\sigma_\mu v) + (I\mathsf{a})_{\overline{t}|}(\sigma_\mu v),$$

$$\sum_{\tau=1}^{t-1} \tau^2 s^\tau = \mathsf{a}_{\overline{t}|}(\sigma_\mu v) - 3(I\mathsf{a})_{\overline{t}|}(\sigma_\mu v) + 2(II\mathsf{a})_{\overline{t}|}(\sigma_\mu v),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{\tau=1}^{t-1} \tau^{\alpha_\mu - 1} s^\tau = \sum_{\lambda=1}^{\alpha_\mu} C_{\alpha_\mu \lambda} (I^{\lambda-1}\mathsf{a})_{\overline{t}|}(\sigma_\mu v), \qquad C = \Delta' G.$$

Um die Funktionen $B_i(t)$ darzustellen, beachten wir, dass die $\Delta B_i(t)$ wegen

$$(47'') \quad \Delta \overline{H}(t) = B^* \Delta B(t) = (B')^{-1} \Delta B(t), \quad \Delta B(t) = B' \Delta \overline{H}(t)$$

und (57)

$$\Delta \overline{H}(t+1) = M \Delta \overline{H}(t)$$

das lineare homogene System

$$\Delta B(t+1) = B' M (B')^{-1} \Delta B(t) = \overline{M} \Delta B(t) \tag{68}$$

erfüllen, dessen Säkulargleichung

$$|\overline{M} - sE| = |B' M (B')^{-1} - sE| = (-1)^k (s^k + \omega_1 s^{k-1} + \ldots + \omega_{k-1} s + \omega_k) = 0$$

mit (58) identisch ist. $\{\Omega_\nu(t)\}$ ist mithin auch Hauptsystem zu (68) und die durch

$$\Delta B_h(i-1) = b_{ih}$$

festgelegten Lösungen sind durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} B_i(t) & \Omega_1(t) & \Omega_2(t) & \ldots & \Omega_k(t) \\ b_{1i} & & & & \\ b_{2i} & & & & \\ \vdots & & s_{\mu\nu} & & \\ b_{ki} & & & & \end{vmatrix} = 0$$

oder durch

$$\Delta B_i(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \left(\sum_{\mu=1}^{k} s^{\nu\mu} b_{\mu i} \right) \Omega_\nu(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{69}$$

gegeben, woraus

$$B_i(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \left(\sum_{\mu=1}^{k} s^{\nu\mu} b_{\mu i} \right) \sum_{\tau=0}^{t-1} \Omega_\nu(\tau), \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{70'}$$

und die (39) entsprechenden Ausdrücke

$$\boxed{\Delta B(t) = (S^{-1} B)' \Omega(t), \quad B(t) = (S^{-1} B)' \sum_{\tau=0}^{t-1} \Omega(\tau)} \tag{70}$$ [1]

folgen.

---

[1]) Auch aus (63), $\Delta \overline{H}(t) = S^* \Omega(t)$ und (47''), $\Delta \overline{H}(t) = (B')^{-1} \Delta B(t)$, durch Elimination von $\overline{H}(t)$: $\Delta B(t) = B' S^* \Omega(t) = (S^{-1} B)' \Omega(t)$.

Formel (70) lehrt, dass für die besonders naheliegende Wahl der Anfangswertmatrix B,

$$B = S, \tag{71}$$

die Lösungen $\Delta B_i(t)$ mit dem Hauptsystem $\{\Omega_i(t)\}$ zusammenfallen:

$$\Delta B_i(t) = \Omega_i(t), \quad B_i(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} \Omega_i(t), \tag{72}$$

$$\text{falls } B = S, \ (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Insbesondere ist für

a) $\Omega_\nu(t) = s_\nu^t$, $(\alpha_\nu = 1)$: $B_\nu(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} s_\nu^\tau = \mathsf{a}_{\overline{t}|}(\sigma_\nu v)$,

b) $\Omega_\nu(t) = t^{\nu-1} s^t$, $(\alpha = k)$: $B_\nu(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} \tau^{\nu-1} s^\tau = \sum_{\mu=1}^{\nu} C_{\nu\mu} (I^{\mu-1}\mathsf{a})_{\overline{t}|}(\sigma v)$.

Auch bei der diskontinuierlich gerechneten Leibrente ist eine Deutung der in (2) enthaltenen Symbole $\mathfrak{G}_{(i)}$ möglich. Man betrachte die beiden nur auf den Diskontfaktor v wirksamen Operatoren

$$\mathfrak{G}^\alpha \equiv \left(v \frac{\partial}{\partial v}\right)^{\alpha-1}, \quad (\alpha \geqq 1, \text{ ganz})$$

und

$$\mathfrak{G}_\beta \equiv \beta^{v \frac{\partial}{\partial v}}, \qquad (\beta > 0),$$

der eine Vervielfachung der Variablen v erzeugt,

$$\mathfrak{G}_\beta \{f(v)\} = f(\beta v) \ ^{1)},$$

und bilde das Produkt

$$\mathfrak{G}^\alpha \mathfrak{G}_\beta = \mathfrak{G}_\beta \mathfrak{G}^\alpha = \mathfrak{G}_\beta^\alpha, \qquad \mathfrak{G}_\beta^1 = \mathfrak{G}_\beta.$$

Aus

$$\mathfrak{G}_\sigma \{\mathsf{a}_{\overline{t}|}(v)\} = \mathsf{a}_{\overline{t}|}(\sigma v),$$

$$\mathfrak{G}^\mu \{\mathsf{a}_{\overline{t}|}(v)\} = \left(v \frac{\partial}{\partial v}\right)^{\mu-1} \sum_{\tau=0}^{t-1} v^\tau = \sum_{\tau=0}^{t-1} \tau^{\mu-1} v^\tau, \qquad (\mu \geqq 1)$$

schliesst man auf

$$B_i(t,v) = \begin{cases} \mathfrak{G}_\sigma \{\mathsf{a}_{\overline{t}|}(v)\}, & (\alpha = 1) \\ \mathfrak{G}_\sigma^\mu \{\mathsf{a}_{\overline{t}|}(v)\}, & (\mu = 1, 2, \ldots, \alpha; \ \alpha \geqq 1). \end{cases} \tag{73}$$

---

1) $$\beta^{v \frac{\partial}{\partial v}} \{f(v)\} = e^{v \frac{\partial}{\partial v} \log \beta} \{f(v)\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(\log\beta)^\nu}{\nu!} \frac{f^{(\mu)}(0)}{\mu!} \left(v \frac{\partial}{\partial v}\right)^\nu v^\mu$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\mu \log\beta)^\nu}{\nu!} \frac{f^{(\mu)}(0)}{\mu!} v^\mu = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{f^{(\mu)}(0)}{\mu!} (\beta v)^\mu = f(\beta v).$$

Satz 13. *Die Funktionen $B_i(t)$ sind im Falle $B = S$ Produkte $\mathfrak{G}_\sigma\{\mathsf{a}_{\overline{t}|}(v)\}$ und $\mathfrak{G}_\sigma^\mu\{\mathsf{a}_{\overline{t}|}(v)\}$. Die Operatoren sind den Nullstellen σ_ν des charakteristischen Polynomes der Überlebensordnung in dem Sinne zugeordnet, dass einer einfachen Nullstelle σ der Operator $\mathfrak{G}_\sigma$, der α-fachen Nullstelle σ die α Operatoren $\mathfrak{G}_\sigma^\mu$, $(\mu = 1, 2, \ldots, \alpha)$ entsprechen.*

In der Theorie der linearen Differenzengleichungen wird gezeigt, dass die zum Hauptsystem $\{\Omega_\nu(t)\}$ der Gleichung $\sum_{\lambda=0}^{k} \omega_{k-\lambda}\,\zeta(t+\lambda) = 0$ gehörende Differenzendeterminante $\mathfrak{W}(t) = |\Omega_h(t+i-1)|$ der linearen Gleichung

$$\mathfrak{W}(t+1) = (-1)^k \omega_k \mathfrak{W}(t)$$

genügt und dass ein Hauptsystem dadurch charakterisiert wird, dass $\mathfrak{W}(t)$ in keinem Punkte eines beliebig gewählten Intervalls $t_0 \leqq t < t_0 + 1$ verschwindet [1]).

Durch

$$\Delta B(t) = (S^{-1}B)'\,\Omega(t) \tag{70}$$

wird aus $\{\Omega_\nu(t)\}$ ein weiteres Fundamentalsystem durch lineare Transformation erzeugt, für dessen Differenzendeterminante

$$\vartheta(t) = |\Delta B_h(t+i-1)|$$

wegen

$$\vartheta(t+1) = (-1)^k \omega_k \vartheta(t), \quad \omega_k = (-1)^k s_1 s_2 \ldots s_k$$

bis auf eine periodische Funktion die Darstellung

$$\vartheta(t) = (s_1 s_2 \ldots s_k)^t\, \vartheta(0) \tag{74}$$

richtig ist.

Satz 14. *$\vartheta(t) \neq 0$, $(t_0 \leqq t < t_0 + 1)$ ist notwendig und hinreichend dafür, dass die Barwertformel (2)*

$$\mathsf{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{i=1}^{k} \Psi_i(x)\, B_i(t)$$

nicht verkürzbar ist [2]).

---

[1]) Etwa N. E. Nörlund, Differenzenrechnung, Julius Springer, Berlin 1924, S. 275.

[2]) Bei Beschränkung auf ganzzahlige Argumente genügt die Voraussetzung $\vartheta(0) \neq 0$.

Beweis: Dass durch $\vartheta(t) \neq 0$, $(t_0 \leqq t < t_0 + 1)$ die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $\Delta B_i(t)$ in $\sum_{i=1}^{k} l(x)\, \Psi_i(x)\, \Delta B_i(t)$ charakterisiert wird, geht aus den einleitenden Bemerkungen zu Satz 14 hervor.

Aus der Identität

$$\sum_{i=1}^{k} l(x)\, \Psi_i(x)\, B_i(t) = \sum_{\mu=1}^{k} \bar{\eta}_\mu(t)\, v^{\mu-1}\, l(x+\mu-1)$$

schliesst man mittels (47) auf

$$l(x)\, \Psi_i(x) = \sum_{\mu=1}^{k} b^{i\mu}\, v^{\mu-1}\, l(x+\mu-1) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \sum_{\mu=1}^{k} b^{i\mu}\, v^{\mu-1}\, \Lambda_j(x+\mu-1)$$

und hieraus in den Fällen

a) $\Lambda_j(x) = \sigma_j^x$ auf

$$l(x)\, \Psi_i(x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(\sum_{\mu=1}^{k} b^{i\mu}\, s_{\mu j} \right) \sigma_j^x, \tag{75}$$

aa) für $B = S$: $\quad \Psi_i(x) = \dfrac{\lambda_i\, \sigma_i^x}{l(x)}$.

b) $\Lambda_j(x) = x^{j-1}\, \sigma^x$ auf

$$l(x)\, \Psi_i(x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \sum_{\nu=1}^{k} \left(\sum_{\mu=1}^{k} b^{i\mu}\, s_{\mu\nu} \right) \binom{j-1}{\nu-1} x^{j-\nu}\, \sigma^x, \tag{76}$$

bb) für $B = S$: $\quad \Psi_i(x) = \dfrac{1}{l(x)} \sum_{j=i}^{k} \lambda_j \binom{j-1}{i-1} x^{j-i}\, \sigma^x$.

Mit $\{\Omega_\nu(t)\}$ ist auch $\{\Lambda_\nu(x)\}$ Fundamentalsystem. Die Funktionen $l(x)\, \Psi_i(x)$ sind nach (75) und (76) linear unabhängig und können daher keinen Anlass zur Reduktion der Gliederzahl in (2) geben. – Auf den naheliegenden Beweis der Umkehrung soll nicht näher eingetreten werden.

6. Beispiel: Der Fall $k = 3$

Unter den zu den Barwertdarstellungen

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = y_1(t) + y_2(t) \frac{l'(x)}{l(x)} + y_3(t) \frac{l''(x)}{l(x)} \tag{1}$$

und (2) $$a_{x:\overline{t}|} = \eta_1(t) + \eta_2(t)\frac{l(x+1)}{l(x)} + \eta_3(t)\frac{l(x+2)}{l(x)}$$

gehörenden Sterbeformeln, die durch

(24) $$l'''(x) + \varkappa_1 l''(x) + \varkappa_2 l'(x) + \varkappa_3 l(x) = 0$$

und

(52) $$l(x+3) + \varkappa_1 l(x+2) + \varkappa_2 l(x+1) + \varkappa_3 l(x) = 0$$

ausgezeichnet sind, wählen wir jene, welche zu reellen Wurzeln der charakteristischen Gleichung

(25), (55) $$\xi^3 + \varkappa_1 \xi^2 + \varkappa_2 \xi + \varkappa_3 = 0$$

gehören [1]). Ausserdem werden die Ausführungen auf die Darstellung der Barwertfunktionen $y_i(t)$ und $\eta_i(t)$ der Normalform als Sonderfall der allgemeinen Lösungsformeln (36) und (63) beschränkt. Dann entspricht das Bestimmen der Barwertfunktion im wesentlichen dem Ermitteln einer inversen Matrix. Durch Ausrechnen der Grössen

$$\frac{1}{l(x)}\int_0^t l(x+\tau)\, v^\tau\, d\tau \quad \text{und} \quad \frac{1}{l(x)}\sum_{\tau=0}^{t-1} l(x+\tau)\, v^\tau$$

für das betreffende Sterbegesetz ist ein Verifizieren der Ergebnisse jederzeit möglich.

---

[1])

Wurzel der charakteristischen Gleichung	Fundamentalsystem der Überlebensordnung $\{\Lambda_\nu(x)\}$	Fundamentalsystem der Zeitrentenfunktionen $\{\chi_\nu(t)\}$ oder $\{\Omega_\nu(t)\}$
a) $\varrho_1 \neq \varrho_2 \neq \varrho_3$	$e^{\varrho_1 x},\ e^{\varrho_2 x},\ e^{\varrho_3 x}$	$e^{r_1 t},\ e^{r_2 t},\ e^{r_3 t},\quad (r_i = \varrho_i - \delta)$
$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$	$\sigma_1^x,\ \sigma_2^x,\ \sigma_3^x$	$s_1^t,\ s_2^t,\ s_3^t,\quad (s_i = v\sigma_i)$
b) $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho$	$e^{\varrho x},\ xe^{\varrho x},\ x^2 e^{\varrho x}$	$e^{rt},\ te^{rt},\ t^2 e^{rt},\quad (r = \varrho - \delta)$
$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$	$\sigma^x,\ x\sigma^x,\ x^2\sigma^x$	$s^t,\ ts^t,\ t^2 s^t,\quad (s = v\sigma)$
c) $\varrho_1 \neq \varrho_2,\ \varrho_2 = \varrho_3$	$e^{\varrho_1 x},\ e^{\varrho_2 x},\ xe^{\varrho_2 x}$	$e^{r_1 t},\ e^{r_2 t},\ te^{r_2 t}$
$\sigma_1 \neq \sigma_2,\ \sigma_2 = \sigma_3$	$\sigma_1^x,\ \sigma_2^x,\ x\sigma_2^x$	$s_1^t,\ s_2^t,\ ts_2^t$

a) $\underline{\varrho_1 \neq \varrho_2 \neq \varrho_3, \ \sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3.}$

$$[l(x) = \lambda_1 e^{\varrho_1 x} + \lambda_2 e^{\varrho_2 x} + \lambda_3 e^{\varrho_3 x} = \lambda_1 \sigma_1^x + \lambda_2 \sigma_2^x + \lambda_3 \sigma_3^x].$$

Die inversen Elemente der Matrix $P = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \\ \varrho_1^2 & \varrho_2^2 & \varrho_3^2 \end{Vmatrix}$,

$$[|\varrho_{ih}| = (\varrho_3 - \varrho_2)(\varrho_3 - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho_1)]$$

ermittelt man zu

$$\varrho^{11} = \frac{\varrho_3 \varrho_2}{(\varrho_3 - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho_1)}, \quad \varrho^{21} = -\frac{\varrho_3 \varrho_1}{(\varrho_3 - \varrho_2)(\varrho_2 - \varrho_1)}, \quad \varrho^{31} = \frac{\varrho_2 \varrho_1}{(\varrho_3 - \varrho_2)(\varrho_3 - \varrho_1)},$$

$$\varrho^{12} = -\frac{\varrho_3 + \varrho_2}{(\varrho_3 - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho_1)}, \quad \varrho^{22} = \frac{\varrho_3 + \varrho_1}{(\varrho_3 - \varrho_2)(\varrho_2 - \varrho_1)}, \quad \varrho^{32} = -\frac{\varrho_2 + \varrho_1}{(\varrho_3 - \varrho_2)(\varrho_3 - \varrho_1)},$$

$$\varrho^{13} = \frac{1}{(\varrho_3 - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho_1)}, \quad \varrho^{23} = -\frac{1}{(\varrho_3 - \varrho_2)(\varrho_2 - \varrho_1)}, \quad \varrho^{33} = \frac{1}{(\varrho_3 - \varrho_2)(\varrho_3 - \varrho_1)}.$$

Nach (35a) ist dann

$$y_1(t) = \frac{\varrho_3 \varrho_2}{(\varrho_3 - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho_1)} \bar{a}_{\bar{t}|}(\delta - \varrho_1) - \frac{\varrho_3 \varrho_1}{(\varrho_3 - \varrho_2)(\varrho_2 - \varrho_1)} \bar{a}_{\bar{t}|}(\delta - \varrho_2)$$
$$+ \frac{\varrho_2 \varrho_1}{(\varrho_3 - \varrho_2)(\varrho_3 - \varrho_1)} \bar{a}_{\bar{t}|}(\delta - \varrho_3),$$

$$y_2(t) = -\frac{\varrho_3 + \varrho_2}{(\varrho_3 - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho_1)} \bar{a}_{\bar{t}|}(\delta - \varrho_1) + \frac{\varrho_3 + \varrho_1}{(\varrho_3 - \varrho_2)(\varrho_2 - \varrho_1)} \bar{a}_{\bar{t}|}(\delta - \varrho_2)$$
$$- \frac{\varrho_2 + \varrho_1}{(\varrho_3 - \varrho_2)(\varrho_3 - \varrho_1)} \bar{a}_{\bar{t}|}(\delta - \varrho_3),$$

$$y_3(t) = \frac{1}{(\varrho_3 - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho_1)} \bar{a}_{\bar{t}|}(\delta - \varrho_1) - \frac{1}{(\varrho_3 - \varrho_2)(\varrho_2 - \varrho_1)} \bar{a}_{\bar{t}|}(\delta - \varrho_2)$$
$$+ \frac{1}{(\varrho_3 - \varrho_2)(\varrho_3 - \varrho_1)} \bar{a}_{\bar{t}|}(\delta - \varrho_3).$$

$\Sigma = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{Vmatrix}$ gibt zu gleichlautenden Ausdrücken für ihre inversen

Elemente Anlass, so dass nach (63a)

$$\eta_1(t) = \frac{\sigma_3\sigma_2}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_1)}\,\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma_1 v) - \frac{\sigma_3\sigma_1}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_2-\sigma_1)}\,\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma_2 v) + \frac{\sigma_2\sigma_1}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}\,\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma_3 v),$$

$$\eta_2(t) = -\frac{\sigma_3+\sigma_2}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_1)}\,\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma_1 v) + \frac{\sigma_3+\sigma_1}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_2-\sigma_1)}\,\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma_2 v) - \frac{\sigma_2+\sigma_1}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}\,\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma_3 v),$$

$$\eta_3(t) = \frac{1}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_1)}\,\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma_1 v) - \frac{1}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_2-\sigma_1)}\,\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma_2 v) + \frac{1}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}\,\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma_3 v).$$

b) $\underline{\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho\,,\ \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma\,.}$

$$\left[l(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2)\,e^{\varrho x} = (\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2)\,\sigma^x\right].$$

Die Matrizen $P = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \varrho & 1 & 0 \\ \varrho^2 & 2\varrho & 2 \end{Vmatrix}$, $(|\varrho_{ih}| = 2)$

und

$$P^* = \begin{Vmatrix} 1 & -\varrho & \frac{\varrho^2}{2} \\ 0 & 1 & -\varrho \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}$$

führen bei Anwendung von (35b) unmittelbar zu

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \bar{a}_{\overline{t}|}(\delta-\varrho) - \varrho\,(I\bar{a})_{\overline{t}|}(\delta-\varrho) + \varrho^2(II\bar{a})_{\overline{t}|}(\delta-\varrho), \\ y_2(t) &= \qquad\qquad (I\bar{a})_{\overline{t}|}(\delta-\varrho) - 2\varrho\,(II\bar{a})_{\overline{t}|}(\delta-\varrho), \\ y_3(t) &= \qquad\qquad\qquad\qquad (II\bar{a})_{\overline{t}|}(\delta-\varrho). \end{aligned}$$

Bei diskontinuierlicher Darstellung des Leibrentenbarwertes hat man neben der zu

$$\Sigma = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sigma & \sigma & \sigma \\ \sigma^2 & 2\sigma^2 & 4\sigma^2 \end{Vmatrix}, \quad (|\sigma_{ih}| = 2\sigma^3)$$

kontragredienten Matrix $\Sigma^* = \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sigma} & -\frac{1}{\sigma} \\ 0 & -\frac{1}{2\sigma^2} & \frac{1}{2\sigma^2} \end{Vmatrix}$

noch die durch (67) definierte Matrix

$$\theta^* = \begin{Vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{3}{\sigma} & \frac{5}{\sigma} & -\frac{2}{\sigma} \\ \frac{1}{\sigma^2} & -\frac{2}{\sigma^2} & \frac{1}{\sigma^2} \end{Vmatrix}$$

zu bilden. Formel (66) gibt dann

$$\eta_1(t) = 3\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma v) - 3(I\mathrm{a})_{\overline{t}|}(\sigma v) + (II\mathrm{a})_{\overline{t}|}(\sigma v),$$

$$\eta_2(t) = \frac{1}{\sigma}\left[-3\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma v) + 5(I\mathrm{a})_{\overline{t}|}(\sigma v) - 2(II\mathrm{a})_{\overline{t}|}(\sigma v)\right],$$

$$\eta_3(t) = \frac{1}{\sigma^2}\left[\mathrm{a}_{\overline{t}|}(\sigma v) - 2(I\mathrm{a})_{\overline{t}|}(\sigma v) + (II\mathrm{a})_{\overline{t}|}(\sigma v)\right].$$

c) $\underline{\varrho_1 \neq \varrho_2, \ \varrho_2 = \varrho_3; \ \sigma_1 \neq \sigma_2, \ \sigma_2 = \sigma_3.}$

$$[l(x) = \lambda_1 e^{\varrho_1 x} + (\lambda_2 + x\lambda_3)\, e^{\varrho_2 x} = \lambda_1 \sigma_1^x + (\lambda_2 + x\lambda_3)\, \sigma_2^x].$$

Setzt man die zu $P = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & 1 \\ \varrho_1^2 & \varrho_2^2 & 2\varrho_2 \end{Vmatrix}, \quad [|\varrho_{ih}| = (\varrho_2 - \varrho_1)^2]$

gehörenden inversen Elemente

$$\varrho^{11} = \frac{\varrho_2^2}{(\varrho_2-\varrho_1)^2}, \quad \varrho^{21} = -\frac{\varrho_1(2\varrho_2-\varrho_1)}{(\varrho_2-\varrho_1)^2}, \quad \varrho^{31} = \frac{\varrho_2\varrho_1}{\varrho_2-\varrho_1},$$

$$\varrho^{12} = -\frac{2\varrho_2}{(\varrho_2-\varrho_1)^2}, \quad \varrho^{22} = \frac{2\varrho_2}{(\varrho_2-\varrho_1)^2}, \quad \varrho^{32} = -\frac{\varrho_2+\varrho_1}{\varrho_2-\varrho_1},$$

$$\varrho^{13} = \frac{1}{(\varrho_2-\varrho_1)^2}, \quad \varrho^{23} = -\frac{1}{(\varrho_2-\varrho_1)^2}, \quad \varrho^{33} = \frac{1}{\varrho_2-\varrho_1}$$

in (35c) ein, so erhält man

$$y_1(t) = \frac{1}{(\varrho_2-\varrho_1)^2}\left[\varrho_2^2\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta-\varrho_1) - \varrho_1(2\varrho_2-\varrho_1)\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta-\varrho_2) + \varrho_2\varrho_1(\varrho_2-\varrho_1)(I\bar{a})_{\overline{t}|}(\delta-\varrho_2)\right],$$

$$y_2(t) = \frac{1}{(\varrho_2-\varrho_1)^2}\left[-2\varrho_2\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta-\varrho_1) + 2\varrho_2\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta-\varrho_2) - (\varrho_2^2-\varrho_1^2)(I\bar{a})_{\overline{t}|}(\delta-\varrho_2)\right],$$

$$y_3(t) = \frac{1}{(\varrho_2-\varrho_1)^2}\left[\bar{a}_{\overline{t}|}(\delta-\varrho_1) - \bar{a}_{\overline{t}|}(\delta-\varrho_2) + (\varrho_2-\varrho_1)(I\bar{a})_{\overline{t}|}(\delta-\varrho_2)\right].$$

Die durch $\Sigma = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & 2\sigma_2^2 \end{Vmatrix}$, $\left[|\sigma_{ih}| = \sigma_2(\sigma_2-\sigma_1)^2\right]$ bestimmten Elemente

$$\sigma^{11} = \frac{\sigma_2^2}{(\sigma_2-\sigma_1)^2}, \quad \sigma^{21} = -\frac{\sigma_1(2\sigma_2-\sigma_1)}{(\sigma_2-\sigma_1)^2}, \quad \sigma^{31} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1},$$

$$\sigma^{12} = -\frac{2\sigma_2}{(\sigma_2-\sigma_1)^2}, \quad \sigma^{22} = \frac{2\sigma_2}{(\sigma_2-\sigma_1)^2}, \quad \sigma^{32} = -\frac{\sigma_2+\sigma_1}{\sigma_2(\sigma_2-\sigma_1)},$$

$$\sigma^{13} = \frac{1}{(\sigma_2-\sigma_1)^2}, \quad \sigma^{23} = -\frac{1}{(\sigma_2-\sigma_1)^2}, \quad \sigma^{33} = \frac{1}{\sigma_2(\sigma_2-\sigma_1)},$$

sind Koeffizienten in (63c); unter Berücksichtigung von (65) wird

$$\eta_1(t) = \frac{1}{(\sigma_2-\sigma_1)^2}\left[\sigma_2^2\mathsf{a}_{\overline{t}|}(\sigma_1 v) - \sigma_1(3\sigma_2-2\sigma_1)\mathsf{a}_{\overline{t}|}(\sigma_2 v) + \sigma_1(\sigma_2-\sigma_1)(I\mathsf{a})_{\overline{t}|}(\sigma_2 v)\right],$$

$$\eta_2(t) = \frac{1}{(\sigma_2-\sigma_1)^2}\left[-2\sigma_2^2\mathsf{a}_{\overline{t}|}(\sigma_1 v) + (3\sigma_2^2-\sigma_1^2)\mathsf{a}_{\overline{t}|}(\sigma_2 v) - (\sigma_2^2-\sigma_1^2)(I\mathsf{a})_{\overline{t}|}(\sigma_2 v)\right],$$

$$\eta_3(t) = \frac{1}{\sigma_2(\sigma_2-\sigma_1)^2}\left[\sigma_2\mathsf{a}_{\overline{t}|}(\sigma_1 v) - (2\sigma_2-\sigma_1)\mathsf{a}_{\overline{t}|}(\sigma_2 v) + (\sigma_2-\sigma_1)(I\mathsf{a})_{\overline{t}|}(\sigma_2 v)\right].$$

Abschliessend stellen wir in einer Tabelle die Funktionen $\Phi_i(x)$, $\Psi_i(x)$, sowie $A_i(t)$ und $B_i(t)$ zusammen, die sich in den drei betrachteten Fällen für die Annahmen $A = R$ und $B = S$ ergeben.

	$\Phi_i(x)$	$\Psi_i(x)$	$A_i(t)$	$B_i(t)$
a)	$\frac{\lambda_i e^{\varrho_i x}}{l(x)}$	$\frac{\lambda_i \sigma_i^x}{l(x)}$	$\bar{a}_{\overline{t}\rceil}(\delta-\varrho_i)$	$\mathrm{a}_{\overline{t}\rceil}(\sigma_i v)$
	$(i = 1, 2, 3)$		$(i = 1, 2, 3)$	
b)	1		$\bar{a}_{\overline{t}\rceil}(\delta-\varrho)$	$\mathrm{a}_{\overline{t}\rceil}(\sigma v)$
	$\frac{\lambda_2 + 2\lambda_3 x}{\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2}$		$(I\bar{a})_{\overline{t}\rceil}(\delta-\varrho)$	$-\mathrm{a}_{\overline{t}\rceil}(\sigma v) + (I\mathrm{a})_{\overline{t}\rceil}(\sigma v)$
	$\frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2}$		$2(II\bar{a})_{\overline{t}\rceil}(\delta-\varrho)$	$\mathrm{a}_{\overline{t}\rceil}(\sigma v) - 3(I\mathrm{a})_{\overline{t}\rceil}(\sigma v) + (II\mathrm{a})_{\overline{t}\rceil}(\sigma v)$
c)	$\frac{\lambda_1 e^{\varrho_1 x}}{l(x)}$	$\frac{\lambda_1 \sigma_1^x}{l(x)}$	$\bar{a}_{\overline{t}\rceil}(\delta-\varrho_1)$	$\mathrm{a}_{\overline{t}\rceil}(\sigma_1 v)$
	$\frac{(\lambda_2+\lambda_3 x)e^{\varrho_2 x}}{l(x)}$	$\frac{(\lambda_2 + \lambda_3 x)\sigma_2^x}{l(x)}$	$\bar{a}_{\overline{t}\rceil}(\delta-\varrho_2)$	$\mathrm{a}_{\overline{t}\rceil}(\sigma_2 v)$
	$\frac{\lambda_3 e^{\varrho_2 x}}{l(x)}$	$\frac{\lambda_3 \sigma_2^x}{l(x)}$	$(I\bar{a})_{\overline{t}\rceil}(\delta-\varrho_2)$	$-\mathrm{a}_{\overline{t}\rceil}(\sigma_2 v) + (I\mathrm{a})_{\overline{t}\rceil}(\sigma_2 v)$

* * *

In unseren theoretischen Erörterungen wurden wir durch die Absicht geleitet

- zu zeigen, welche Kriterien eine Sterbeformel zu erfüllen hat, damit eine Darstellung des Leibrentenbarwertes durch Zeitrenten möglich ist,
- darzulegen, wie diese Zeitrentenfunktionen zu bilden sind und welche inneren Zusammenhänge sie mit der Überlebensordnung verknüpfen.

Die praktische Anwendbarkeit der Ergebnisse wurde in unserem Aufsatz nicht beleuchtet. Wir möchten aber festhalten, dass die Eigenart der Barwertformel, Alter und Rentendauer getrennt zu enthalten, auf naheliegende Anwendungen hinweist. Auch die Approximation von Makehams Sterbeformel durch eine gleichmässig konvergente Folge von Überlebensordnungen mit Eigenschaft (1) zeigt, in welcher Richtung für die Praxis sinnvolle Ergebnisse zu erwarten sind. Der Verfasser hofft, die theoretischen Betrachtungen in einer spätern Mitteilung nach der praktischen Seite hin ergänzen zu können.