Über zusammengesetzte Poisson-Prozesse und ihre Anwendungen in der Unfallversicherung

Autor(en): **Hofmann, Martin**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **55 (1955)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-551729

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über zusammengesetzte Poisson-Prozesse und ihre Anwendungen in der Unfallversicherung

Von *Martin Hofmann*, Zürich

Einleitung

Die Theorie der stochastischen Prozesse gehört zu jenen Gebieten der Mathematik, welche ihre Entwicklung, besonders in den Anfängen, zu einem grossen Teil den Anwendungen verdanken. Viele Erscheinungen aus dem Versicherungswesen, der Physik und Biologie können als Systeme dargestellt werden, die sich im Laufe der Zeit nach bestimmten Wahrscheinlichkeitsgesetzen verändern. Das Modell, welches man sich vom Ablauf eines solchen Geschehens macht, charakterisiert einen stochastischen Prozess.

Für die Versicherungsmathematik kommen vor allem Prozesse in Betracht, bei denen eine Variable, die man als Funktion eines kontinuierlichen Zeitparameters aufzufassen hat, in zufälligen Zeitpunkten um endliche Beträge ändert, sogenannte unstetige stochastische Prozesse. Ein wichtiges und zugleich das erste Beispiel eines solchen Modells stellt die kollektive Risikotheorie dar, wie sie von *F. Lundberg* zur rationellen Behandlung von Risikoproblemen der Lebensversicherung aufgebaut wurde. *Riebesell* und seine Schüler zeigten, wie auch die Mathematik der Sachversicherung auf einem stochastischen Modell begründet werden kann. Die meisten dieser Untersuchungen sind vor allem theoretischer Natur und bedürfen noch ausgedehnter statistischer Prüfung, bevor sie für die Praxis von Bedeutung werden können.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigte uns die Frage, ob in der individuellen Unfallversicherung die Voraussetzungen für eine mathematische Behandlung versicherungstechnischer Probleme gegeben sind, oder eventuell geschaffen werden können. Wir haben zu diesem Zweck die verschiedenen Faktoren, welche das Unfallrisiko beeinflussen,

untersucht und nach dem Modell gefragt, das zur Darstellung der Anzahl Unfallereignisse und des Gesamtschadens zu verwenden ist. Die mathematischen Grundlagen für die statistischen Untersuchungen wurden in enger Verbindung mit den praktischen Ergebnissen entwickelt. Indessen haben wir, zur Erreichung einer besseren Übersichtlichkeit, die Arbeit in einen ersten, mathematischen und einen zweiten, statistischen Teil gegliedert. Dieser kann im wesentlichen ohne Kenntnis des ersten Teils verstanden werden.

In einer grundlegenden Arbeit über die Mathematik der Unfallversicherung zeigte *Dubourdieu*, dass in der Unfallstatistik einem speziellen stochastischen Prozess besondere Bedeutung zukommt: dem zusammengesetzten Poisson-Prozess. Dieser ist im wesentlichen eine Verallgemeinerung des Poissonschen Gesetzes für die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse. Auch die Dissertation von *O. Lundberg* hat die mathematische Behandlung von Unfallstatistiken zum Thema; sie enthält eine eingehende Untersuchung über elementare stochastische Prozesse und deren Anwendungen. Die praktischen Ergebnisse gestatten es indessen nicht, die von uns gestellte Frage eindeutig zu beantworten.

Besonders interessant in Untersuchungen solcher Art ist die Frage nach der Verteilung der Anzahl Unfälle innerhalb eines gegebenen Personenbestandes. Sie wurde erstmals von den Statistikern *Greenwood* und *Yule* systematisch studiert. Die beiden Autoren stellten drei Hypothesen über das Zustandekommen von Unfällen auf, die sie mathematisch formulierten und die daraus abgeleiteten Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit empirischen Daten von Arbeitsunfällen aus der englischen Industrie verglichen. Eines dieser Modelle führte zu einem Wahrscheinlichkeitsgesetz, das auch in andern Zusammenhängen wichtig wurde, der sogenannten negativen Binomialverteilung. Im Falle von *Greenwood* und *Yule* ist sie als zusammengesetzte Poisson-Verteilung zu interpretieren. Sie entspricht der Annahme eines Personenbestandes, den man sich zusammengesetzt denkt aus Teilbeständen mit konstantem Unfallrisiko, das indessen von einem Teilbestand zum andern variiert. Da die untersuchten Bestände bereits so gruppiert waren, dass in ihnen für alle Personen gleiches äusseres Unfallrisiko bestand, muss die Verschiedenheit der Teilbestände als durch subjektive Ursachen bedingt angesehen werden. *Greenwood* und *Yule* sprachen daher von verschiedener individueller Unfallneigung. Durch ähnliche, jedoch

nicht mathematische Untersuchungen an einem deutschen Versichertenbestand wurde der Psychologe *K. Marbe* zur Bildung von Persönlichkeitsgefahrenklassen veranlasst, ein den Teilbeständen bei *Greenwood* und *Yule* entsprechender Begriff.

Es stellte sich heraus, dass dem Modell der individuell verschiedenen Unfallneigungen gegenüber andern Modellen der Vorzug zu geben ist. Die Problematik dieser theoretischen Betrachtungsweise besteht indessen darin, dass versucht wird, eine komplizierte psychologische Erscheinung durch das verhältnismässig einfache mathematische Schema des zusammengesetzten Poisson-Prozesses darzustellen. Wir haben gezeigt, dass dieses Schema im Hinblick auf die Bedürfnisse der Versicherung angewendet werden darf. Dabei wurden wir auf die Betrachtung von zweidimensionalen zusammengesetzten Poisson-Verteilungen geführt.

Neben der Anzahl Unfälle tritt in der Unfallversicherung auch die Schadenhöhe als stochastische Grösse auf. Um sie für die Berechnungen berücksichtigen zu können, muss der zusammengesetzte Poisson-Prozess verallgemeinert werden; diese Verallgemeinerung entspricht der Khintchineschen Erweiterung der gewöhnlichen Poisson-Verteilung.

Der erste Teil unserer Arbeit enthält die mathematischen Überlegungen, auf denen sich die statistischen Untersuchungen aufbauen. Zuerst zeigen wir, wie der zweidimensionale zusammengesetzte Poisson-Prozess aus einer einfachen Annahme über die betrachteten Ereignisse abgeleitet werden kann. Da, von einem andern Ausgangspunkt her, dieser Prozess schon von *Consael* untersucht wurde, führen wir nur einige wenige Eigenschaften desselben an. Wir geben sodann zwei neue zweidimensionale zusammengesetzte Poisson-Verteilungen an, die man als negativ-binomiale Korrelationsfunktionen bezeichnen kann. Schliesslich befassen wir uns noch mit eindimensionalen zusammengesetzten Poisson-Verteilungen. Wir leiten eine Schar von Verteilungen her, die sich in verschiedener Hinsicht gut eignen zur Anwendung auf empirische Daten. In dieser Schar sind einige bekannte zusammengesetzte Poisson-Verteilungen als Spezialfälle enthalten, so vor allem die negative Binomialverteilung. Zum Schluss erweitern wir die zusammengesetzte Poisson-Verteilung und zeigen, unter welchen Voraussetzungen die erweiterte Verteilung gegen die Normalverteilung strebt.

Im zweiten Teil grenzen wir zuerst die Voraussetzungen für eine mathematisch-statistische Untersuchung der Unfälle innerhalb eines geschlossenen Personenbestandes ab. Es stand uns eine Unfallstatistik über die Betriebs- und Nichtbetriebsunfälle während der Jahre 1944 bis 1952 von 1196 Arbeitern der städtischen Verkehrsbetriebe Zürich zur Verfügung. Wir prüfen allgemein die Anwendbarkeit der zusammengesetzten Poisson-Verteilung auf die Verteilungen der Anzahl Betriebs- und Nichtbetriebsunfälle und bestimmen auf Grund der positiven Ergebnisse die speziellen Verteilungen aus der im ersten Teil abgeleiteten Schar zur Darstellung dieser empirischen Verteilungen. Zudem zeigen wir, dass die gemeinsame Verteilung der Betriebs- und Nichtbetriebsunfälle durch eine zweidimensionale Korrelationsfunktion wiedergegeben werden kann. Am Beispiel der Betriebsunfälle vergleichen wir die theoretische und praktische Verteilung der summaren Schadenhöhe je Person während der ganzen Beobachtungsperiode. Wir geben ferner an, wie die Verteilungsfunktion des Gesamtschadens für den ganzen Bestand berechnet werden kann.

Die Ergebnisse, welche wir auf Grund der Untersuchungen an unserem verhältnismässig kleinen Bestand erhalten, berechtigen zur Schlussfolgerung, dass es möglich ist, die individuelle Unfallversicherung auf mathematische Grundlagen aufzubauen. Wir verzichten indessen auf die Behandlung der einzelnen versicherungsmathematischen Probleme, sondern verweisen, was die Berechnung der Nettoprämie anbetrifft, auf die Arbeit von *Dubourdieu* und bemerken, dass mit Hilfe der Verteilungsfunktion des Gesamtschadens die interessierenden risikotheoretischen Fragen nach bekannten Überlegungen gelöst werden können.

Es bleibt mir noch die angenehme Pflicht, meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. *W. Saxer*, den besten Dank auszusprechen für die Anregung zu dieser Arbeit und für die Unterstützung und Förderung, die er ihr während ihres Entstehens zuteil werden liess. Ebenso danke ich Herrn PD Dr. *P. Nolfi* sowie dem städtischen Strassenverkehrsamt Zürich für die Hilfe bei der Auffindung und Zusammenstellung des statistischen Materials.

I. Teil

1. Ein spezieller elementarer stochastischer Prozess

Einen mehrdimensionalen unstetigen stochastisch-definiten Prozess bezeichnen wir als elementar, wenn bei jeder Änderung der Variablen jede ihrer Komponenten nur um die Einheit $(+1)$ zunehmen kann.

In den Anwendungen wird ein solcher Prozess dargestellt durch mehrere verschiedenartige Folgen von Ereignissen, die in einem gewissen Intervall zu beliebigen Zeitpunkten eintreffen können.

Wir befassen uns in den nachfolgenden Untersuchungen mit einem Prozess, bei dem zwei Folgen von Ereignissen betrachtet werden mit der Eigenschaft, dass sowohl die Ereignisse der gleichen Folge, als auch diejenigen, welche zu verschiedenen Folgen gehören, voneinander stochastisch abhängen können. Die betreffenden Ereignisse unterwerfen wir der Bedingung:

(B) In jedem endlichen Intervall sind die Zeitpunkte des Eintreffens der Ereignisse rein zufallsmässig verteilt.

Um diese Bedingung analytisch zu formulieren, führen wir die beiden Variablen $M(\vartheta)$ und $N(\vartheta)$ ein, welche die Anzahl der Ereignisse erster bzw. zweiter Art bezeichnen, die im Intervall 0 bis ϑ eintreffen. Es sei:

$$M(0) = N(0) = 0 \quad \text{und} \quad M(s') = m' \quad N(t') = n'.$$

Der Prozess kann anstatt durch die Variablen $M(\vartheta)$ und $N(\vartheta)$ durch die Zeitpunkte ihrer Sprünge: S_i bzw. T_i gekennzeichnet werden, die wir so numerieren, dass:

$$\begin{aligned} 0 \leqq S_1 \leqq S_2 \leqq \ldots \leqq S_{m'} \leqq s' \leqq \vartheta, \\ 0 \leqq T_1 \leqq T_2 \leqq \ldots \leqq T_{n'} \leqq t' \leqq \vartheta. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Die Bedingung (B) bedeutet, dass alle Ereignisfolgen, die gemäss (1.1) eintreffen, gleich wahrscheinlich sind.

In einfacher Weise lässt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von m Ereignissen der ersten Art bis zur Zeit s berechnen unter der Voraussetzung: $M(s') = m'$, wobei $s < s'$ und daher $m \leqq m'$ ist. Wir nennen sie inverse Übergangswahrscheinlichkeit. Es ist die Wahrscheinlichkeit, dass von m' unabhängigen Variablen S_i, die alle gleich verteilt sind über dem Intervall $(0,s')$, m Variable $\leqq s$ sind.

Daher wird

$$P\{M(s) = m/M(s') = m'\} = \binom{m'}{m}\left(\frac{s}{s'}\right)^m\left(1-\frac{s}{s'}\right)^{m'-m}.$$

Mit den Definitionen

$$P(m;s/m';s') = P\{M(s) = m/M(s') = m'\}$$

und

$$B_{m'}\left(m;\frac{s}{s'}\right) = \binom{m'}{m}\left(\frac{s}{s'}\right)^m\left(1-\frac{s}{s'}\right)^{m'-m}$$

erhalten wir

$$P(m;s/m';s') = B_{m'}\left(m;\frac{s}{s'}\right) \tag{1.2a}$$

und ganz analog

$$P(n;t/n';t') = B_{n'}\left(n;\frac{t}{t'}\right). \tag{1.2b}$$

Aus (B) folgt zudem die Unabhängigkeit der inversen Übergangswahrscheinlichkeiten für die Variablen M und N

$$P\{M(s) = m, N(t) = n/M(s') = m', N(t') = n'\} = B_{m'}\left(m;\frac{s}{s'}\right)B_{n'}\left(n;\frac{t}{t'}\right)$$

oder, wenn wir die Bezeichnung

$$P(m,n;s,t/m',n';s',t') = P\{M(s) = m, N(t) = n/M(s') = m', N(t') = n'\}$$

einführen:

$$P(m,n;s,t/m',n';s',t') = B_{m'}\left(m;\frac{s}{s'}\right)B_{n'}\left(n;\frac{t}{t'}\right). \tag{1.3}$$

Um den Ausdruck für die absolute Wahrscheinlichkeitsfunktion des Prozesses $P(m,n;s,t) = P\{M(s) = m, N(t) = n\}$

zu finden, betrachten wir die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$s_1 \leqq S_1 < s_1 + ds_1,\ s_2 \leqq S_2 < s_2 + ds_2,\ \ldots,\ s_{m'} \leqq S_{m'} < s_{m'} + ds_{m'}$$
$$t_1 \leqq T_1 < t_1 + dt_1,\ t_2 \leqq T_2 < t_2 + dt_2,\ \ldots,\ t_{n'} \leqq T_{n'} < t_{n'} + dt_{n'}$$

unter der Bedingung $M(s') = m'\ \ N(t') = n'$

und unter Beachtung der Relationen:

$$\begin{aligned} &(s_i, s_i + ds_i) \cap (s_k, s_k + ds_k) = 0 \\ &(t_i, t_i + dt_i) \cap (t_k, t_k + dt_k) = 0 \end{aligned} \qquad i \neq k,$$
$$0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{m'} < s'$$
$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n'} < t'.$$

Auf Grund der Natur des betrachteten Prozesses ist sie unabhängig von den Werten s_i und t_j $(i = 1, \ldots, m';\ j = 1, \ldots, n')$ und hat deshalb die Gestalt

$$h(m',n';s',t')\, ds_1 \ldots ds_{m'}\, dt_1 \ldots dt_{n'}.$$

Daraus ergibt sich sofort:

$$P(m',n';s',t') = h(m',n';s',t') \int\limits_{0<s_1<\ldots<s_{m'}<s'} \ldots \int \int\limits_{0<t_1<\ldots<t_{n'}<t'} \ldots \int ds_1 \ldots ds_{m'}\, dt_1 \ldots dt_{n'}$$

$$P(m',n';s',t') = h(m',n';s',t') \frac{s'^{m'}}{m'!} \frac{t'^{n'}}{n'!}. \tag{1.4}$$

Allgemein gilt

$$P(m,n;s,t) = \sum_{m'=m}^{\infty} \sum_{n'=n}^{\infty} P(m',n';s',t')\, P(m,n;s,t/m',n';s',t').$$

Setzen wir (1.3) und (1.4) in diese Beziehung ein, so ergibt sich:

$$P(m,n;s,t) = \sum_{m'=m}^{\infty} \sum_{n'=n}^{\infty} h(m',n';s',t') \frac{s'^{m'}}{m'!} \frac{t'^{n'}}{n'!} \binom{m'}{m} \binom{n'}{n} \left(\frac{s}{s'}\right)^m \left(\frac{t}{t'}\right)^n \left(1-\frac{s}{s'}\right)^{m'-m} \left(1-\frac{t}{t'}\right)^{n'-n}$$

$$P(m,n;s,t) = \frac{s^m}{m!} \frac{t^n}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(m+j,n+k;s',t') \frac{(s'-s)^j}{j!} \frac{(t'-t)^k}{k!} \tag{1.5}$$

und speziell

$$P(0,0;s,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(j,k;s',t') \frac{(s'-s)^j}{j!} \frac{(t'-t)^k}{k!}. \tag{1.6}$$

Wegen

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(j,k;s',t') \frac{s'^j}{j!} \frac{t'^k}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P(j,k;s',t') = 1$$

darf die Reihe (1.6) im Bereich $(0 < s \leqq s', 0 < t \leqq t')$ beliebig oft nach s und t differenziert werden. Setzt man

$$P^{(m,n)}(0,0;s,t) = \frac{\partial^{m+n} P(0,0;s,t)}{\partial s^m\, \partial t^n}$$

so gilt:

$$P^{(m,n)}(0,0;s,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(j,k;s',t')\, (-1)^{m+n} \frac{(s'-s)^{j-m}}{(j-m)!} \frac{(t'-t)^{k-n}}{(k-n)!}$$

$$= \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} h(j,k;s',t')\, (-1)^{m+n} \frac{(s'-s)^{j-m}}{(j-m)!} \frac{(t'-t)^{k-n}}{(k-n)!}$$

$$P^{(m,n)}(0,0;s,t) = (-1)^{m+n} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} h(m+\mu,n+\nu;s',t') \frac{(s'-s)^\mu}{\mu!} \frac{(t'-t)^\nu}{\nu!}. \tag{1.7}$$

Aus (1.5) und (1.7) erhalten wir

$$P(m,n;s,t) = (-1)^{m+n} \frac{s^m}{m!} \frac{t^n}{n!} P^{(m,n)}(0,0;s,t). \tag{1.8}$$

Speziell folgt für $P(0,0;s,t)$

$$(-1)^{m+n} P^{(m,n)}(0,0;s,t) \geqq 0$$

in $(0 < s \leqq s', 0 < t \leqq t')$. Zudem muss

$$\lim_{s \downarrow 0} \lim_{t \downarrow 0} P(0,0;s,t) = 1$$

sein, da $M(0) = 0$ und $N(0) = 0$ vorausgesetzt wurde.

Von einer Funktion $f(s,t)$, welche in der Viertelsebene $(0 < s < \infty, 0 < t < \infty)$ den Bedingungen genügt

$$(a_2) \quad (-1)^{m+n} f^{(m,n)}(s,t) \geqq 0$$

$$(b_2) \quad \lim_{s \downarrow 0} \lim_{t \downarrow 0} f(s,t) = 1$$

sagen wir, sie gehöre zur Klasse V_2: $f(s,t) \in V_2$. Da die Darstellung (1.8) für jedes beliebige endliche $\vartheta > 0$ und damit für alle positiven s' und t' gilt, so gehört $P(0,0;s,t)$ zu V_2.

Die absolute Wahrscheinlichkeitsfunktion des betrachteten Prozesses ist also gegeben durch die Funktion $P(0,0;s,t) \in V_2$, welche den Prozess vollständig bestimmt. Wir nennen sie erzeugende Funktion, ein Name, der sich auch dadurch rechtfertigt, dass sie im wesentlichen die momenterzeugende Funktion für die faktoriellen Momente von $P(m,n;s,t)$ darstellt. (Vgl. Abschnitt 2).

Eine Funktion $f(s,t) \in V_2$ hat die Eigenschaft, dass sie für $s > 0$, $t > 0$ in der Form eines Laplace-Stieltjesschen Integrales dargestellt werden kann

$$f(s,t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ks-\lambda t}\, dU(k,\lambda) \qquad dU(k,\lambda) = d_k d_\lambda U(k,\lambda)$$

in dem $U(k,\lambda)$ eine zweidimensionale Verteilungsfunktion mit $U(0,0) = 0$ bezeichnet.

Dies ist eine Verallgemeinerung des folgenden Satzes von Widder-Bernstein über vollmonotone Funktionen:

Zu einer auf dem Intervall $0 < t < \infty$ vollmonotonen Funktion $f(t)$, d. h. einer Funktion mit der Eigenschaft

$$(a_1) \quad (-1)^n f^{(n)}(t) \geqq 0 \qquad \text{für } t > 0$$

gibt es eine nicht-fallende, beschränkte Funktion $U(\lambda)$ mit $U(0) = 0$ so, dass $f(t)$ für $t > 0$ in der Form

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dU(\lambda)$$

dargestellt werden kann. Gilt zudem

$$(b_1) \quad \lim_{t \downarrow 0} f(t) = 1$$

so ist $U(\lambda)$ eine Verteilungsfunktion.

Für eine vollmonotone Funktion auf $t > 0$ mit der Eigenschaft (b_1) schreiben wir $f(t) \in V_1$.

Der Beweis des Satzes von Widder-Bernstein, wie er von Dubourdieu (4a) oder Feller (5) gegeben wurde, kann ohne Schwierigkeit auf das Zweidimensionale übertragen werden. Wir führen diese Verallgemeinerung deshalb hier nicht durch.

Wir erhalten also für die Funktion $P(0,0;s,t)$ die Darstellung

$$P(0,0;s,t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ks-\lambda t}\, dU(k,\lambda)\,. \tag{1.9}$$

Aus der Formel (1.8) folgt daher für die absolute Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(m,n;s,t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ks-\lambda t} \frac{(ks)^m}{m!} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, dU(k,\lambda)\,. \tag{1.10}$$

Der hier betrachtete Prozess kann auf Grund der Darstellung (1.10) als ein mit Hilfe der Verteilungsfunktion $U(k,\lambda)$ zusammengesetzter zweidimensionaler Poisson-Prozess aufgefasst werden. Dieser Prozess wurde von Consael (2a) untersucht. Wir beschränken uns deshalb auf die Angabe einiger Eigenschaften, welche wir für die weiteren Untersuchungen brauchen werden.

2. Eigenschaften des zusammengesetzten Poisson-Prozesses

a) Die Momente von $P(m,n;s,t)$

Die faktoriellen Momente einer zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsfunktion sind definiert durch

$$\eta_{(jk)} = \sum_{m=j}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} m(m-1) \ldots (m-j+1)\, n(n-1) \ldots (n-k+1)\, P(m,n;s,t)\,.$$

Sie besitzen die faktorielle momenterzeugende Funktion

$$g(u,v;s,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (1-u)^m (1-v)^n P(m,n;s,t) \qquad (0<u<1, 0<v<1),$$

das heisst

$$\eta_{(jk)} = (-1)^{j+k} \left. \frac{\partial^{j+k} g(u,v;s,t)}{\partial u^j\, \partial v^k} \right|_{u=v=0}$$

Durch eine einfache Rechnung ergibt sich

$$g(u,v;s,t) = P(0,0;su,tv)\,.$$

Falls die $(j+k)$-te Ableitung von $P(0,0;s,t)$ im Nullpunkt existiert, erhält man

$$\eta_{(jk)} = (-1)^{j+k} s^j t^k P^{(j,k)}(0,0;0,0)\,.$$

Das $(j+k)$-te Nullpunktsmoment von $U(k,\lambda)$

$$\alpha_{jk} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k^j \lambda^k \, dU(k,\lambda)$$

berechnet sich, unter Voraussetzung der Existenz, aus

$$\alpha_{jk} = (-1)^{j+k} P^{(j,k)}(0,0;0,0)\,. \tag{2.1}$$

Also gilt die Momentenrelation

$$\eta_{(jk)}(s,t) = \alpha_{jk} s^j t^k. \tag{2.2}$$

Wir führen die Momente bis zur zweiten Ordnung explizite auf:

$$\begin{aligned} \overline{m}(s) &= \overline{k}s & \overline{n}(t) &= \overline{\lambda}t \\ \sigma_m^2(s) &= \sigma_k^2 s^2 + \overline{k}s & \sigma_n^2(t) &= \sigma_\lambda^2 t^2 + \overline{\lambda}t \\ \sigma_{mn}(s,t) &= \sigma_{k\lambda}\, st\,. \end{aligned} \tag{2.2a}$$

Für den Korrelationskoeffizienten

$$r(s,t) = \frac{\sigma_{mn}(s,t)}{\sigma_m(s)\,\sigma_n(t)}$$

ergibt sich

$$r(s,t) = \frac{\sigma_{k\lambda}\, st}{\sqrt{(\sigma_k^2 s^2 + \bar{k}s)\,(\sigma_\lambda^2 t^2 + \bar{\lambda}t)}}. \tag{2.2b}$$

b) Bedingte Verteilungen

Die direkte Übergangswahrscheinlichkeit $P(m',n';s',t'/m,n;s,t)$ berechnen wir aus der Beziehung

$$P(m',n';s',t'/m,n;s,t)\,P(m,n;s,t) = P(m,n;s,t/m',n';s',t')\,P(m',n';s',t').$$

Setzen wir die Formel (1.3) für die inverse Übergangswahrscheinlichkeit ein, so ergibt sich

$$P(m',n';s',t'/m,n;s,t) = B_{m'}\left(m;\frac{s}{s'}\right) B_{n'}\left(n;\frac{t}{t'}\right) \frac{P(m',n';s',t')}{P(m,n;s,t)}. \tag{2.3}$$

Zur Berechnung der bedingten Verteilungsfunktion

$$U(k,\lambda/m,n;s,t) = P\{K < k, \Lambda < \lambda / M(s) = m, N(t) = n\}$$

benützen wir die Verteilung

$$P\{M(s) = m, N(t) = n, k \leqq K < k + dk, \lambda \leqq \Lambda < \lambda + d\lambda\} = e^{-ks-\lambda t}\,\frac{(ks)^m}{m!}\,\frac{(\lambda t)^n}{n!}\,dU(k,\lambda).$$

Aus ihr folgt

$$U(k,\lambda/m,n;s,t) = \frac{\displaystyle\int_0^k \int_0^\lambda e^{-ks-\lambda t}\,\frac{(ks)^m}{m!}\,\frac{(\lambda t)^n}{n!}\,dU(k,\lambda)}{P(m,n;s,t)}. \tag{2.4}$$

Schliesslich erhalten wir für die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion von M und N unter der Voraussetzung $K = k, \Lambda = \lambda$

$$P(m,n/k,\lambda) = e^{-ks-\lambda t}\,\frac{(ks)^m}{m!}\,\frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} E(M/k,\lambda) &= ks \\ E(N/k,\lambda) &= \lambda t. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sind die Werte der Variablen K und Λ gegebene feste Grössen: k bzw. λ, so treffen die Ereignisse unabhängig voneinander nach einem Poissonschen Gesetz ein. k bzw. λ sind die spezifischen Mittelwerte der entsprechenden Art von Ereignissen.

Eine statistische Gesamtheit, in welcher die Ereignisse gemäss dem Gesetz (2.5) eintreffen, bezeichnen wir als homogen, da für alle Individuen der Gesamtheit die spezifischen Mittelwerte k und λ theoretisch die gleichen sind. Im allgemeinen Fall, wo K und Λ entsprechend der Verteilungsfunktion $U(k,\lambda)$ über die Gesamtheit verteilt sind (und somit die Wahrscheinlichkeitsfunktion (1.10) gilt) betrachten wir die Gesamtheit als inhomogen in dem Sinne, dass jedem Individuum je ein gewisser Wert von K und Λ zugeschrieben werden kann: k bzw. λ, die wir als Suszeptibilitäten des Individuums für die Ereignisse erster bzw. zweiter Art bezeichnen. $dU(k,\lambda)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Suszeptibilitäten eines beliebig aus der Gesamtheit gegriffenen Individuums im Bereich $B(k \leqq K < k + dk, \lambda \leqq \Lambda < \lambda + d\lambda)$ liegen. Statistisch liefert dieser Ausdruck den Bruchteil der Gesamtheit, dessen Suszeptibilitäten in B liegen. $U(k,\lambda)$ gibt an, wie man sich die Gesamtheit im Hinblick auf die zwei betrachteten Ereignisse zusammengesetzt zu denken hat; wir nennen sie die Strukturfunktion.

c) Stochastische Abhängigkeit zwischen M und N

Die absolute Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(m,n;s,t)$, welche definiert wurde als die Wahrscheinlichkeit, dass m Ereignisse der ersten Art im Intervall 0 bis s, und n Ereignisse der zweiten Art im Intervall 0 bis t eintreffen, stellt allgemein die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von m und n Ereignissen in beliebigen Intervallen der Länge s bzw. t dar, d. h. sie ist unabhängig vom Anfangspunkt der Intervalle (was in der Bezeichnung antizipiert wurde).

Um dies zu zeigen, berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $P\{M(\sigma + s) - M(\sigma) = m, N(\tau + t) - N(\tau) = n\}$, wobei $M(\sigma) = j$ und $N(\tau) = k$ sei.

$$P\{M(\sigma + s) - M(\sigma) = m, N(\tau + t) - N(\tau) = n\}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P(j,k;\sigma,\tau / j + m, k + n; \sigma + s, \tau + t)\, P(j + m, k + n; \sigma + s, \tau + t) \cdot$$

Setzt man (1.3) und (1.8) ein, so erhält man:

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{j+m}{j}\binom{k+n}{k}\left(\frac{\sigma}{\sigma+s}\right)^{j}\left(\frac{\tau}{\tau+t}\right)^{k}\left(\frac{s}{\sigma+s}\right)^{m}\left(\frac{t}{\tau+t}\right)^{n}$$

$$\cdot\,(-1)^{j+m+k+n}\frac{(\sigma+s)^{j+m}}{(j+m)!}\,\frac{(\tau+t)^{k+n}}{(k+n)!}\,P^{(j+m,k+n)}(0,0;\sigma+s,\tau+t)\,,$$

$$= (-1)^{m+n}\frac{s^m}{m!}\,\frac{t^n}{n!}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\sigma^j}{j!}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\tau^k}{k!}\,P^{(j+m,k+n)}(0,0;\sigma+s,\tau+t)\,,$$

$$= (-1)^{m+n}\frac{s^m}{m!}\,\frac{t^n}{n!}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\sigma^j}{j!}\,P^{(j+m,n)}(0,0;\sigma+s,t)\,,$$

$$= (-1)^{m+n}\frac{s^m}{m!}\,\frac{t^n}{n!}\,P^{(m,n)}(0,0;s,t) = P(m,n;s,t)\,.$$

Aus diesem Ergebnis folgt, dass die bedingte Strukturfunktion (2.4) nur abhängt von den Anzahlen m und n und der Länge der entsprechenden Intervalle s bzw. t, und unabhängig ist davon, wo diese Intervalle liegen. Die stochastische Abhängigkeit zwischen M und N kann deshalb nicht durch eine tatsächliche gegenseitige Beeinflussung der Ereignisse erklärt werden, sondern beruht darauf, dass die Anzahl der eingetroffenen Ereignisse Aufschluss über die Werte von K und Λ der Teilgesamtheit erteilt, aus welcher das betrachtete Individuum stammt. Eine ähnliche Überlegung gilt auch für die Anzahlen der Ereignisse gleicher Art in zwei verschiedenen disjunkten Zeitintervallen.

d) Unabhängigkeit

Notwendig und hinreichend dafür, dass die beiden Variablen $M(\vartheta)$ und $N(\vartheta)$ sowie auch K und Λ stochastisch unabhängig sind voneinander, ist die Beziehung

$$P(0,0;s,t) = P_1(0;s)\,P_2(0;t) \tag{2.6}$$

wobei $P_1(0;s) \in V_1$ und $P_2(0;t) \in V_1$.

Nach dem Satz von Widder-Bernstein kann die Relation (2.6) in folgender Gestalt geschrieben werden

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ks-\lambda t}\, dU(k,\lambda) = \int_0^\infty e^{-ks}\, dU_1(k) \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dU_2(\lambda)$$

wobei $U_1(k)$ und $U_2(\lambda)$ Verteilungsfunktionen sind mit $U_1(0) = U_2(0) = 0$.
Daraus folgt sofort $\quad U(k,\lambda) = U_1(k)\, U_2(\lambda)$.

Wegen (1.8) erhalten wir aus (2.6)

$$P(m,n;s,t) = (-1)^{m+n} \frac{s^m}{m!} \frac{t^n}{n!} P_1^{(m)}(0;s)\, P_2^{(n)}(0;t) = P_1(m;s)\, P_2(n;t)\,,$$

$P_1(m;s)$ und $P_2(n;t)$ sind Wahrscheinlichkeitsfunktionen von eindimensionalen zusammengesetzten Poisson-Verteilungen.

Umgekehrt folgt aus der Unabhängigkeit von K und Λ sofort diejenige von M und N und damit die Relation (2.6).

Der eindimensionale zusammengesetzte Poisson-Prozess wurde von Dubourdieu (4) und O. Lundberg (8) untersucht. Die meisten Eigenschaften, welche wir im folgenden benützen werden, ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften des zweidimensionalen Prozesses durch Spezialisierung.

e) Funktionelle Abhängigkeit zwischen K und Λ

Von einer erzeugenden Funktion einer eindimensionalen zusammengesetzten Poisson-Verteilung ausgehend, kann auf einfache Weise eine spezielle Klasse von zweidimensionalen Verteilungen gebildet werden.

Falls $R(0;u) \in V_1$, dann gilt $R(0;as+bt) \in V_2$, was man leicht aus der $(m+n)$-ten Ableitung von R nach s bzw. t ersieht. $R(0;as+bt)$ kann deshalb als erzeugende Funktion $P(0,0;s,t)$ einer zweidimensionalen zusammengesetzten Poisson-Verteilung aufgefasst werden. Für die absolute Wahrscheinlichkeitsfunktion des zweidimensionalen Prozesses ergibt sich nach (1.8)

$$P(m,n;s,t) = (-1)^{m+n} \frac{s^m}{m!} \frac{t^n}{n!} a^m b^n \left. \frac{d^{m+n} R(0;u)}{du^{m+n}} \right|_{u=as+bt}$$

$$P(m,n;s,t) = \frac{(as)^m}{m!} \frac{(bt)^n}{n!} \frac{(m+n)!}{(as+bt)^{m+n}} R(m+n;as+bt)\,. \qquad (2.7)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Momente zweiter Ordnung existieren, wird der Korrelationskoeffizient von K und Λ nach (2.1)

$$\varrho = \frac{\sigma_{k\lambda}}{\sigma_k \sigma_\lambda} = \frac{\left(R''(0;0) - R'^2(0;0)\right) ab}{\sqrt{R''(0;0) - R'^2(0;0)}\; a \sqrt{R''(0;0) - R'^2(0;0)}\; b} = 1$$

K und Λ sind linear abhängig voneinander und variieren im gleichen Sinne. Für den Korrelationskoeffizienten von M und N ergibt sich aus (2.2b)

$$r(s,t) < 1 .$$

Da für $R(0;u)$ die Darstellung gilt

$$R(0;u) = \int_0^\infty e^{-\mu u}\, dV(\mu) ,$$

so ist

$$P(0,0;s,t) = \int_0^\infty e^{-\mu a s - \mu b t}\, dV(\mu) .$$

Anderseits gilt

$$P(0,0;s,t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ks-\lambda t}\, dU(k,\lambda) .$$

Also folgt aus der Eindeutigkeit der Darstellung von $P(0,0;s,t)$ als Laplace-Stieltjessches Integral

$$\frac{K}{a} = \frac{\Lambda}{b} ,$$

was unabhängig von der Existenz der Momente gilt.

Die Randverteilungen

$$P_1(m;s) = \sum_{n=0}^\infty P(m,n;s,t) \quad \text{sowie} \quad P_2(n;t) = \sum_{m=0}^\infty P(m,n;s,t)$$

errechnen sich ohne Schwierigkeit zu:

$$\begin{aligned} P_1(m;s) &= R(m;as) , \\ P_2(n;t) &= R(n;bt) . \end{aligned} \tag{2.8}$$

3. Beispiele von zusammengesetzten Poisson-Verteilungen

Das bekannteste Beispiel einer eindimensionalen zusammengesetzten Poisson-Verteilung wurde von Greenwood und Yule (6) und, in einem anderen Zusammenhang, von Pólya gefunden, und wird in der Literatur meist negative Binomialverteilung, gelegentlich auch Pólya-Verteilung genannt.

Die erzeugende Funktion

$$P(0;t) = \left(\frac{1}{1+bt}\right)^{q/b} \qquad q>0,\ b>0 \tag{3.1}$$

ist die Laplace-Transformierte der Strukturfunktion

$$\frac{dU(\lambda)}{d\lambda} = u(\lambda) = \left(\frac{1}{b}\right)^{q/b} \frac{\lambda^{q/b-1}}{\Gamma(q/b)} e^{-\frac{\lambda}{b}} \tag{3.2}$$

mit den Momenten

$$\bar{\lambda} = q, \qquad \sigma_\lambda^2 = qb. \tag{3.3}$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion besitzt die einfache Gestalt

$$P(n;t) = \left(\frac{1}{1+bt}\right)^{q/b} \left(\frac{bt}{1+bt}\right)^{n} \frac{\Gamma(q/b+n)}{\Gamma(q/b)\,n!}. \tag{3.4}$$

Aus (2.2a) erhält man für ihre Momente:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= qt, \\ \sigma_n^2 &= qt(bt+1). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Wir geben im folgenden einige Erweiterungen auf zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit negativ-binomialen Randverteilungen an.

1a) In Abschnitt 2e) haben wir ein Verfahren zur Bildung von zweidimensionalen Verteilungen betrachtet. Wir wenden es an auf die negative Binomialverteilung, und setzen daher

$$R(0;u) = \left(\frac{1}{1+u}\right)^{c} \qquad c>0.$$

Dann ist

$$P(0,0;s,t) = \left(\frac{1}{1+as+bt}\right)^{c}.$$

Aus (1.8) folgt sofort

$$P(m,n;s,t) = \frac{(as)^m}{m!} \frac{(bt)^n}{n!} \frac{\Gamma(c+m+n)}{\Gamma(c)} \left\{ \frac{1}{1+as+bt} \right\}^{c+m+n}. \quad (3.6)$$

Die Randverteilungen sind nach (2.8) und (3.4) gegeben durch:

$$\begin{aligned} P_1(m;s) &= \left(\frac{1}{1+as}\right)^c \left(\frac{as}{1+as}\right)^m \frac{\Gamma(c+m)}{\Gamma(c)\, m!}, \\ P_2(n;t) &= \left(\frac{1}{1+bt}\right)^c \left(\frac{bt}{1+bt}\right)^n \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)\, n!}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

1 b) Wir verallgemeinern nun (3.6) auf eine Verteilung, der wir die Randverteilungen vorschreiben:

$$\begin{aligned} P_1(m;s) &= \left(\frac{1}{1+as}\right)^{\frac{p}{a}} \left(\frac{as}{1+as}\right)^m \frac{\Gamma(p/a+m)}{\Gamma(p/a)\, m!}, \\ P_2(n;t) &= \left(\frac{1}{1+bt}\right)^{\frac{q}{b}} \left(\frac{bt}{1+bt}\right)^n \frac{\Gamma(q/b+n)}{\Gamma(q/b)\, n!}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dabei gehen wir aus von der erzeugenden Funktion

$$P(0,0;s,t) = \left(\frac{1}{1+as}\right)^{\frac{p}{a}-c} \left(\frac{1}{1+bt}\right)^{\frac{q}{b}-c} \left(\frac{1}{1+as+bt}\right)^c \quad (3.9)$$

mit $c \leqq min\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{b}\right)$. Für die Randverteilungen ergeben sich daraus die erzeugenden Funktionen:

$$P_1(0;s) = \left(\frac{1}{1+as}\right)^{\frac{p}{a}},$$

$$P_2(0;t) = \left(\frac{1}{1+bt}\right)^{\frac{q}{b}}.$$

Sie führen auf die Verteilungen (3.8). Nach (1.8) ergibt sich die absolute Wahrscheinlichkeitsfunktion aus (3.9) im wesentlichen durch Bildung der $(m+n)$-ten Ableitung. Wir wenden die Leibnizsche Formel für die mehrfache Ableitung eines Produktes auf die Ableitungen nach s und t an und erhalten

$$P(m,n;s,t) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1+as}\right)^{\frac{p}{a}-c}\left(\frac{as}{1+as}\right)^{m-j}\frac{\Gamma(p/a-c+m-j)}{\Gamma(p/a-c)\,(m-j)!}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{1+bt}\right)^{\frac{q}{b}-c}\left(\frac{bt}{1+bt}\right)^{n-k}\frac{\Gamma(q/b-c+n-k)}{\Gamma(q/b-c)\,(n-k)!}$$

$$\cdot\frac{(as)^j}{j!}\,\frac{(bt)^k}{k!}\,\frac{\Gamma(c+j+k)}{\Gamma(c)}\left(\frac{1}{1+as+bt}\right)^{c+j+k}.$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich daraus

$$n,n;s,t) = P(0,0;s,t)\left(\frac{as}{1+as}\right)^m\left(\frac{bt}{1+bt}\right)^n\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}C_{mnjk}\left(\frac{1+as}{1+as+bt}\right)^j\left(\frac{1+bt}{1+as+bt}\right)^k, \tag{3.10}$$

mit den Koeffizienten

$$C_{mnjk} = \binom{j+k}{j}\frac{\Gamma(c+j+k)}{\Gamma(c)\,(j+k)!}\,\frac{\Gamma(p/a-c+m-j)}{\Gamma(p/a-c)\,(m-j)!}\,\frac{\Gamma(q/b-c+n-k)}{\Gamma(q/b-c)\,(n-k)!}.$$

2a) Eine andere Erweiterung der negativen Binomialverteilung auf zwei Dimensionen erhalten wir, indem wir ausgehen von der Funktion

$$P(0,0;s,t) = \left(\frac{1}{(1+as)\,(1+bt)-\beta asbt}\right)^c \tag{3.11}$$

mit $c>0$ und $0<\beta<1$.

Sie ist die Laplace-Transformierte der Funktion

$$u(k,\lambda) = \frac{1}{ab(1-\beta)\,\Gamma(c)}\left(\frac{\beta k\lambda}{ab}\right)^{\frac{c-1}{2}} e^{-\frac{bk+a\lambda}{ab(1-\beta)}}\, I_{c-1}\left(2\sqrt{\frac{\beta k\lambda}{ab\,(1-\beta)^2}}\right).$$

(Vergleiche Voelker und Doetsch (13) S. 234). I_{c-1} bezeichnet die modifizierte Bessel-Funktion

$$I_{c-1}(z) = (i)^{1-c}\,J_{c-1}(iz).$$

Man kann leicht nachprüfen, dass $u(k,\lambda)$ eine auf der positiven Halbachse definierte Frequenzfunktion ist. Aus

$$P(0,0;s,t) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ks-\lambda t}\,u(k,\lambda)\,dk\,d\lambda$$

folgt daher sofort: $P(0,0;s,t) \in V_2$ so dass (3.11) die erzeugende Funktion eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses darstellt.

Die Ausdrücke:

$$P_1(0,s) = \left(\frac{1}{1+as}\right)^c,$$

$$P_2(0,t) = \left(\frac{1}{1+bt}\right)^c$$

sind die erzeugenden Funktionen der Randverteilungen. Diese letzteren sind also gegeben durch (3.7). Zur Berechnung von $P(m,n;s,t)$ formen wir (3.11) um:

$$P(0,0;s,t) = \left(\frac{1}{1+as}\right)^c \left(\frac{1}{1+bt}\right)^c \left\{\frac{1}{1-\beta\dfrac{as}{1+as}\dfrac{bt}{1+bt}}\right\}^c$$

$$= \left(\frac{1}{1+as}\right)^c \left(\frac{1}{1+bt}\right)^c \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+h)}{\Gamma(c)\,h!}\beta^h \left(\frac{as}{1+as}\right)^h \left(\frac{bt}{1+bt}\right)^h.$$

Die angeschriebene Reihe konvergiert gleichmässig in s und t, da $0<\beta<1$. Sie darf deshalb gliedweise differenziert werden. Also wird

$$P^{(m,n)}(0,0;s,t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+h)}{\Gamma(c)\,h!}\beta^h \frac{d^m}{ds^m}\left\{\frac{(as)^h}{(1+as)^{c+h}}\right\} \frac{d^n}{dt^n}\left\{\frac{(bt)^h}{(1+bt)^{c+h}}\right\}.$$

Für die Ableitungen unter der Summe erhalten wir:

$$\frac{d^m}{ds^m}\left\{\frac{(as)^h}{(1+as)^{c+h}}\right\} = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{d^j}{ds^j}(as)^h \frac{d^{m-j}}{ds^{m-j}}\left(\frac{1}{1+as}\right)^{c+h}$$

$$= \sum_{j=0}^{min(m,h)}\binom{m}{j}\frac{h!}{(h-j)!}a^j(as)^{h-j}(-1)^{m-j}\frac{\Gamma(c+h+m-j)}{\Gamma(c+h)}a^{m-j}\frac{1}{(1+as)^{c+h+m-j}}$$

$$= (-a)^m\left(\frac{1}{1+as}\right)^{c+m}\left(\frac{as}{1+as}\right)^h \sum_{j=0}^{min(m,h)}(-1)^j\frac{h!}{(h-j)!}\frac{m!}{(m-j)!}\frac{\Gamma(c+h+m-j)}{\Gamma(c+h)}$$

$$\cdot\frac{1}{j!}\left(1+\frac{1}{as}\right)^j.$$

Führen wir hier die Bezeichnung $(\alpha)_i = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+i-1)$ ein, so wird die betrachtete Ableitung:

$$= (-a)^m\left(\frac{1}{1+as}\right)^{c+m}\left(\frac{as}{1+as}\right)^h\frac{\Gamma(c+m+h)}{\Gamma(c+h)}\sum_{j=0}^{min(m,h)}\frac{(-h)_j(-m)_j}{(-m-h-c+1)_j}\frac{1}{j!}\left(1+\frac{1}{as}\right)^j$$

$$= (-a)^m\left(\frac{1}{1+as}\right)^{c+m}\left(\frac{as}{1+as}\right)^h\frac{\Gamma(c+m+h)}{\Gamma(c+m)}F\left(-h,-m,-m-h-c+1,1+\frac{1}{as}\right).$$

Die Funktion
$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_j\,(\beta)_j}{(\gamma)_j}\,\frac{1}{j!}\,x$$
bezeichnet die Gaußsche hypergeometrische Reihe. Sie reduziert sich zu einem Polynom, falls, wie hier, α oder β eine negative ganze Zahl ist. Setzen wir den gefundenen Ausdruck für die Ableitung des ersten Faktors und den analogen für diejenige des zweiten Faktors ein, so erhalten wir nach (1.8)
$$P(m,n;s,t) = \left(\frac{1}{1+as}\right)^c \left(\frac{as}{1+as}\right)^m \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{1+bt}\right)^c \left(\frac{bt}{1+bt}\right)^n \frac{1}{n!}$$
$$\sum_{=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+h)}{\Gamma(c)\,h!}\,\beta^h \left(\frac{as}{1+as}\right)^h \left(\frac{bt}{1+bt}\right)^h \frac{\Gamma(c+m+h)}{\Gamma(c+h)}\,F\left(-h,-m,-m-h-c+1,1+\frac{1}{as}\right)$$
$$\cdot\,\frac{\Gamma(c+n+h)}{\Gamma(c+h)}\,F\left(-h,-n,-n-h-c+1,1+\frac{1}{bt}\right).$$

Zur Abkürzung setzen wir
$$\gamma = \beta\,\frac{as}{1+as}\,\frac{bt}{1+bt},$$
und schreiben die Ausdrücke der Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Randverteilungen (3.7), $P_1(m;s)$ und $P_2(n;t)$, vor das Summenzeichen. Abgesehen vom Entwicklungskoeffizienten und von γ^h erhalten wir dann in der Summe Ausdrücke der Gestalt
$$\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c+m+h)}{\Gamma(c+h)\,\Gamma(c+m)}\,F\left(-h,-m,-m-h-c+1,1+\frac{1}{as}\right), \quad (3.12)$$
und analoge für die Polynome in n. Wenden wir darauf eine der Gaußschen Transformationen für die hypergeometrische Reihe an, so ergibt sich dafür (vgl. z. B. Magnus-Oberhettinger (9) S. 13)
$$F\left(-h,-m,c,-\frac{1}{as}\right).$$

Die absolute Wahrscheinlichkeitsfunktion kann in der Gestalt einer bilinearen Entwicklung nach orthogonalen Polynomen geschrieben werden
$$(m,n;s,t) = P_1(m;s)\,P_2(n;t) \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+h)}{\Gamma(c)\,h!}\,\gamma^h\,F\left(-h,-m,c,-\frac{1}{as}\right) F\left(-h,-n,c,-\frac{1}{bt}\right). \quad (3.13)$$

Die Polynome
$$M_h(x;c,u) = F\left(-h, -x, c, -\frac{1}{u}\right)$$
sind auf der Zahlenmenge $x = 0, 1, 2, \ldots$ mit der Belegungsfunktion
$$P(x) = \left(\frac{1}{1+u}\right)^c \left(\frac{u}{1+u}\right)^x \frac{\Gamma(c+x)}{\Gamma(c)\, x!}$$
orthogonal. Man sieht dies leicht ein, wenn man von einer andern Definition der $M_h(x;c,u)$ ausgeht. Aus dem Vorangehenden folgt
$$M_h(x;c,u) = \frac{(-1)^x}{x!\, P(x)} \frac{d^x}{du^x} \left\{\frac{u^h}{(1+u)^{h+c}}\right\}.$$
Anderseits können sie auch gewonnen werden aus der Beziehung
$$M_h(x;c,u) = \frac{\nabla^h [P(x)\,(x+c)_h]}{(c)_h\, P(x)}, \tag{3.14}$$
wobei der Operator ∇^h die h-te absteigende Differenz bezeichnet, d. h.
$$\nabla^h f(x) = f(x) - \ldots + (-1)^i \binom{h}{i} f(x-i) + \ldots + (-1)^h f(x-h).$$
Wegen
$$f(x) = P(x)\,(x+c)_h$$
$$f(x-i) = P(x-i)\,(x+c-i)_h$$
folgt:
$$\nabla^h f(x) = \frac{P(x)}{\Gamma(x+c)} \sum_{i=0}^{h} (-1)^i \binom{h}{i}\binom{x}{i} i!\, \Gamma(x+c+h-i) \left(1+\frac{1}{u}\right)^i$$
$$M_h(x;c,u) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(h+c)\,\Gamma(x+c)} \sum_{i=0}^{h} (-1)^i \binom{h}{i}\binom{x}{i} i!\, \Gamma(x+h+c-i) \left(1+\frac{1}{u}\right)^i$$
$$= \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(x+h+c)}{\Gamma(h+c)\,\Gamma(x+c)} F\left(-h, -x, -h-x-c+1, 1+\frac{1}{u}\right).$$
Dieser Ausdruck stimmt mit (3.12) überein. Von der Darstellung (3.14) ausgehend ist die Orthogonalität leicht zu beweisen. Mit der Bezeichnung $[x]_i = x(x-1)\ldots(x-i+1)$ wird
$$\sum_{x=0}^{\infty} [x]_i\, \nabla^h f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} [x]_i\, \nabla^h \{P(x)\,(x+c)_h\} = 0.$$

Dies folgt sofort durch Anwendung der Abelschen partiellen Summation. Also ist

$$\sum_{x=0}^{\infty} [x]_i \, P(x) \, M_h(x;c,u) = 0 \qquad \text{für } i < h$$

und

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x) \, M_h(x;c,u) \, M_i(x;c,u) = 0 \qquad \text{für } i \neq h.$$

Die Randverteilungen haben die Wahrscheinlichkeitsfunktionen (3.7), sind also negative Binomialverteilungen. Man erhält deshalb aus (3.5) durch Einsetzen der entsprechenden Parameter:

$$\overline{m} = cas \qquad \sigma_m^2 = cas(as+1)$$

$$\overline{n} = cbt \qquad c_n^2 = cbt(bt+1),$$

sowie:

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2 P_1(m;s) = c(c+1)\,(as)^2 + cas$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_2(n;t) = c(c+1)\,(bt)^2 + cbt.$$

Daraus folgt für die Kovarianz von M und N

$$\sigma_{mn} = \overline{m}\,\overline{n} + \gamma c \sum_{m=0}^{\infty} m P_1(m;s)\, M_1(m;c,as) \sum_{n=0}^{\infty} n P_2(n;t)\, M_1(n;c,bt) - \overline{m}\,\overline{n}$$

$$= \gamma c \left(\sum_0^{\infty} m\, P_1(m;s) - \frac{1}{cas} \sum_0^{\infty} m^2 P_1(m;s) \right) \left(\sum_0^{\infty} n P_2(n;s) - \frac{1}{cbt} \sum_0^{\infty} n^2 P_2(n;s) \right)$$

$$= \gamma c \big(cas - (c+1)\,as - 1\big)\,\big(cbt - (c+1)\,bt - 1\big) = \gamma c\,(as+1)\,(bt+1)$$

$$\sigma_{mn} = \gamma c\,(as+1)\,(bt+1),$$

und für γ

$$\gamma = \frac{1}{c} \frac{\sigma_{mn}}{(as+1)\,(bt+1)} = \frac{\overline{m}\,\overline{n}}{c} \frac{\sigma_{mn}}{\sigma_m^2\,\sigma_n^2}.$$

Aus der Definition von γ ergibt sich

$$\beta = \gamma \frac{(as+1)\,(bt+1)}{as \qquad bt} = \frac{\sigma_{mn}}{casbt}.$$

Beachten wir noch die Beziehungen (2.2a), und (3.3), so wird

$$\beta = \frac{\sigma_{k\lambda}}{cab} = \frac{\sigma_{k\lambda}}{\sqrt{ca}\,\sqrt{cb}} = \frac{\sigma_{k\lambda}}{\sigma_k\,\sigma_\lambda} = \varrho.$$

Die Bedingung $0 < \beta < 1$, welche wir am Anfang einführten, bedeutet also, dass (3.13) eine Verteilung mit positiver Korrelation darstellt, da aus $\varrho > 0$ auch $r(s,t) > 0$ folgt.

Für $\beta = 0$ sind K und Λ unkorreliert und sogar unabhängig. Das gilt ebenfalls für M und N, wie man sofort aus (3.11) ersieht.

Im Grenzfall $\beta = 1$ geht die Verteilung (3.13) in (3.6) über.

2b) Wir erweitern, wie beim ersten Beispiel, die Verteilung (3.13) auf eine solche mit den Randverteilungen:

$$P_1(m;s) = \left(\frac{1}{1+as}\right)^{\frac{p}{a}} \left(\frac{as}{1+as}\right)^m \frac{\Gamma(p/a+m)}{\Gamma(p/a)\, m!},$$

$$P_2(n;t) = \left(\frac{1}{1+bt}\right)^{\frac{q}{b}} \left(\frac{bt}{1+bt}\right)^n \frac{\Gamma(q/b+n)}{\Gamma(q/b)\, n!}.$$

Daher gehen wir aus von der Funktion

$$P(0,0;s,t) = \left(\frac{1}{1+as}\right)^{\frac{p}{a}-c} \left(\frac{1}{1+bt}\right)^{\frac{q}{b}-c} \left\{\frac{1}{(1+as)(1+bt)-\beta asbt}\right\}^c \tag{3.15}$$

wo c der Bedingung $0 < c \leqq min\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{b}\right)$ genügt. Schreiben wir (3.10) in der Form:

$$P(0,0;s,t) = \left(\frac{1}{1+as}\right)^{\frac{p}{a}} \left(\frac{1}{1+bt}\right)^{\frac{q}{b}} \left(\frac{1}{1-\gamma}\right)^c$$

$$= \left(\frac{1}{1+as}\right)^{\frac{p}{a}} \left(\frac{1}{1+bt}\right)^{\frac{q}{b}} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+h)}{\Gamma(c)\, h!} \gamma^h$$

$$\text{mit } \gamma = \beta \frac{as}{1+as} \frac{bt}{1+bt},$$

so folgt ganz analog zum Vorangehenden

$$P(m,n;s,t) = P_1(m;s)\, P_2(n;t) \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+h)}{\Gamma(c)\, h!} \gamma^h F\left(-h, -m, \frac{p}{a}, -\frac{1}{as}\right)$$

$$\cdot F\left(-h, -n, \frac{q}{b}, -\frac{1}{bt}\right). \tag{3.16}$$

Es ist

$$\gamma = \frac{\overline{m}\,\overline{n}}{c}\,\frac{\sigma_{mn}}{\sigma_m^2\,\sigma_n^2}$$

und

$$\beta = \frac{\sigma_{k\lambda}}{cab}.$$

Wegen

$$\sigma_k = \sqrt{ap} \qquad \sigma_\lambda = \sqrt{bq}$$

folgt

$$\beta = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{p}{a}}\sqrt{\frac{q}{b}}\,\varrho\,.$$

Ersetzen wir in (3.16) γ und schreiben für das h-te hypergeometrische Polynom M_h, so erhalten wir

$$(m,n;s,t) = P_1(m;s)\,P_2(n;t)\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\Gamma(c+h)}{\Gamma(c)\,h!}\,M_h\left(m;\frac{p}{a},as\right)M_h\left(n;\frac{q}{b},bt\right)\left(\frac{\overline{m}\,\overline{n}}{c}\,\frac{\sigma_{mn}}{\sigma_m^2\,\sigma_n^2}\right)^h. \tag{3.17}$$

4. Eindimensionale zusammengesetzte Poisson-Verteilungen

Im Eindimensionalen ist ein elementarer stochastischer Prozess mit binomialen inversen Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(n;t/n';t') = B_{n'}\left(n;\frac{t}{t'}\right) \tag{4.1}$$

gegeben durch eine zu V_1 gehörende Funktion $P(0;t)$, die erzeugende Funktion des Prozesses, was ohne Schwierigkeit aus den Überlegungen des 1. Abschnittes folgt. Diese kann auf Grund des Satzes von Widder-Bernstein als Laplace-Stieltjessche Transformierte einer Verteilungsfunktion $U(\lambda)$ dargestellt werden

$$P(0;t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dU(\lambda) \quad \text{mit } U(0) = 0. \tag{4.2}$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ergibt sich als Spezialfall aus (1.8)

$$P(n;t) = (-1)^n\frac{t^n}{n!}\,P^{(n)}(0;t). \tag{4.3}$$

Zur Konstruktion von Beispielen wird gewöhnlich von einer speziellen Strukturfunktion ausgegangen und daraus nach (4.2) und (4.3) die Wahrscheinlichkeitsfunktion berechnet. In den meisten Fällen gelangt man dadurch zu formal komplizierten Ausdrücken.

Im folgenden leiten wir eine einparametrige Schar von Verteilungen her mit der Eigenschaft, dass ihre Wahrscheinlichkeitsfunktionen verhältnismässig einfach berechnet werden können. Wir gehen dabei in natürlicher Weise von der erzeugenden Funktion $P(0;t)$ aus, und stellen den folgenden Hilfssatz an die Spitze:

Wenn $f(t) \in V_1$ und $\tau(t)$ eine Funktion ist mit den Eigenschaften:

$$\tau(0) = 0,$$

$$\tau'(t) \text{ vollmonoton auf } 0 < t < \infty,$$

dann gilt: $f(\tau(t)) \in V_1$.

Der Beweis folgt sofort durch Benützung der Formel von Faà de Bruno für die n-te Ableitung einer Funktion von einer Funktion

$$\frac{d^n f}{dt^n} = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{(k)} \frac{n!}{k_1! \ldots k_n!} \left[\frac{\tau'(t)}{1!}\right]^{k_1} \cdots \left[\frac{\tau^{(n)}(t)}{n!}\right]^{k_n} \frac{d^\nu f}{d\tau^\nu}\bigg|_{\tau=\tau(t)}. \tag{4.4}$$

Die Summation (k) ist zu erstrecken über:

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = \nu,$$

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n.$$

Nach Voraussetzung ist:

$$(-1)^{j-1} \tau^{(j)}(t) \geqq 0,$$

$$(-1)^\nu \frac{d^\nu f}{d\tau^\nu} \geqq 0,$$

also wird das Vorzeichen des ν-ten Summanden in (4.4)

$$(-1)^\nu (-1)^{k_2} (-1)^{2k_3} \ldots (-1)^{(n-1)k_n} = (-1)^n$$

und daher

$$(-1)^n \frac{d^n f[\tau(t)]}{dt^n} \geqq 0.$$

Die Eigenschaft: $\lim\limits_{t \downarrow 0} f[\tau(t)] = 1$ folgt sofort aus den Voraussetzungen.

Aus den erzeugenden Funktionen eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses können deshalb durch Anwendung von Transformationen $\tau(t)$ neue erzeugende Funktionen gebildet werden.

Wir wählen als Ausgangsfunktion die erzeugende Funktion des gewöhnlichen Poisson-Prozesses

$$f(t) = e^{-qt} \qquad q > 0,$$

und erhalten

$$P(0;t) = e^{-q\tau(t)}.$$

Nach (4.4) ergibt sich für die n-te Ableitung

$$P^{(n)}(0;t) = P(0;t) \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{(k)} \frac{n!}{k_1! \ldots k_n!} \left[\frac{\tau'(t)}{1!}\right]^{k_1} \cdots \left[\frac{\tau^{(n)}(t)}{n!}\right]^{k_n} (-q)^{\nu}.$$

Aus (4.3) folgt

$$P(n;t) = P(0;t) \frac{(-t)^n}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} (-q)^{\nu} \sum_{(k)} \frac{n!}{k_1! \ldots k_n!} \left[\frac{\tau'(t)}{1!}\right]^{k_1} \cdots \left[\frac{\tau^{(n)}(t)}{n!}\right]^{k_n}. \tag{4.5}$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion (4.5) kann auch mit Hilfe einer Rekursionsformel berechnet werden:

$$P(0;t) = e^{-q\tau(t)},$$

$$P'(0;t) = -q\tau'(t)\, e^{-q\tau(t)} = -q\tau'(t)\, P(0;t).$$

Aus der Leibnizschen Formel erhält man daraus

$$P^{(n+1)}(0;t) = -q \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tau^{(k+1)}(t)\, P^{(n-k)}(0;t),$$

und wegen (4.3):

$$P(n+1;t) = -q \frac{(-t)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\, k!} \tau^{(k+1)}(t) \frac{(n-k)!}{(-t)^{n-k}} P(n-k;t),$$

$$P(n+1;t) = \frac{qt}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \frac{\tau^{(k+1)}(t)}{k!} P(n-k;t). \tag{4.6}$$

Wir betrachten nun die Transformation, die gegeben ist durch

$$\tau'(t) = \left(\frac{1}{1+ct}\right)^{\alpha} \qquad c > 0,\ \alpha > 0.$$

Daraus folgt, wenn wir noch die Bedingung $\tau(0) = 0$ berücksichtigen:

$$\tau(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{1+ct}\right)^\alpha dt = \begin{cases} t & \alpha = 0, \\ \dfrac{1}{c(1-\alpha)}\left((1+ct)^{1-\alpha}-1\right) & 0<\alpha<1, \\ \dfrac{1}{c}\log(1+ct) & \alpha = 1, \\ \dfrac{1}{c(\alpha-1)}\left(1-\left(\dfrac{1}{1+ct}\right)^{\alpha-1}\right) & 1<\alpha<\infty. \end{cases}$$

Für die Ableitungen ergibt sich

$$\tau^{(j)}(t) = (-c)^{j-1}\frac{\Gamma(\alpha+j-1)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{1+ct}\right)^{\alpha+j-1}. \tag{4.7}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (4.5) ein, so erhalten wir die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(n;t) = P(0;t)\frac{(-t)^n}{n!}\sum_{\nu=0}^{n}(-q)^\nu\sum_{(k)}\frac{n!}{k_1!\ldots k_n!}\left(\frac{1}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\Gamma(\alpha+n-1)}{\Gamma(\alpha)\,n!}\right)^{k_n}$$
$$\cdot\left(\frac{-c}{1+ct}\right)^{k_1+2k_2+\ldots+nk_n}\left[\left(-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{1+ct}\right)^{\alpha-1}\right]^{k_1+\ldots+k_n},$$

$$P(n;t) = P(0;t)\frac{1}{n!}\left(\frac{ct}{1+ct}\right)^n\sum_{\nu=0}^{n}A_{\nu n}(\alpha)\left(\frac{q}{c}\left(\frac{1}{1+ct}\right)^{\alpha-1}\right)^\nu. \tag{4.8}$$

Die erzeugende Funktion lautet für $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} P(0;t) &= e^{-\frac{q}{c(\alpha-1)}\left(1-\left(\frac{1}{1+ct}\right)^{\alpha-1}\right)} && \alpha \neq 1, \\ P(0;t) &= \left(\frac{1}{1+ct}\right)^{q/c} && \alpha = 1. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Für die Koeffizienten $A_{\nu n}(\alpha)$ ergibt sich die Darstellung

$$A_{\nu n}(\alpha) = \sum_{(k)}\frac{n!}{k_1!\ldots k_n!}\left(\frac{1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\,2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{\Gamma(\alpha+n-1)}{\Gamma(\alpha)\,n!}\right)^{k_n}$$

oder, wenn man den Ausdruck für $P(0;t)$ in (4.9) n mal nach t ableitet,

die Rekursionsformel

$$A_{\nu n}(\alpha) = A_{\nu-1 n-1}(\alpha) + (\alpha\nu + n - \nu - 1)\, A_{\nu n-1}(\alpha)$$
$$A_{00} = 1, \quad A_{0n} = 0 \quad \text{für } n \neq 0.$$

Die Rekursionsformel für die Wahrscheinlichkeitsfunktion wird, wenn wir (4.7) in (4.6) einsetzen:

$$P(n+1;t) = \frac{qt}{n+1}\left(\frac{1}{1+ct}\right)^{\alpha} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\, k!}\left(\frac{ct}{1+ct}\right)^{k} P(n-k;t). \quad (4.10)$$

Um die Strukturfunktion zu bestimmen, gehen wir aus von ihrer charakteristischen Funktion

$$\chi(z) = \int_0^\infty e^{iz\lambda}\, dU(\lambda).$$

Aus (4.2) sieht man sofort, dass sie gegeben ist durch

$$\chi(z) = P(0;-iz). \quad (4.11)$$

Wir betrachten, je nach dem Wert von α, die drei Fälle

$\alpha = 1$:

$$\chi(z) = \left(\frac{1}{1-icz}\right)^{q/c}.$$

Die zugehörige Frequenzfunktion ist bekanntlich

$$\frac{dU(\lambda)}{d\lambda} = u(\lambda) = \left(\frac{1}{c}\right)^{q/c} \frac{\lambda^{q/c-1}}{\Gamma(q/c)}\, e^{-\frac{\lambda}{c}} \qquad \lambda > 0. \quad (4.12)$$

$1 < \alpha < \infty$:

$$\chi(z) = e^{-\frac{q}{c(\alpha-1)}}\, e^{\frac{q}{c(\alpha-1)}\left(\frac{1}{1-ciz}\right)^{\alpha-1}}$$
$$= e^{-\frac{q}{c(\alpha-1)}}\left[1 + \frac{q}{c(\alpha-1)}\left(\frac{1}{1-ciz}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{2!}\left(\frac{q}{c(\alpha-1)}\right)^{2}\left(\frac{1}{1-ciz}\right)^{2(\alpha-1)} + \cdots\right]$$

Dieser Entwicklung entspricht nach (4.12) die Frequenzfunktion:

$$u(\lambda) = e^{-\frac{q}{c(\alpha-1)}} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{q}{c(\alpha-1)}\right)^{k}\left(\frac{1}{c}\right)^{k(\alpha-1)} \frac{1}{\Gamma(k(\alpha-1))}\, \frac{\lambda^{k(\alpha-1)-1}}{k!}\, e^{-\frac{\lambda}{c}},$$

$$u(\lambda) = e^{-\frac{q}{c(\alpha-1)}}\, \frac{e^{-\frac{\lambda}{c}}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{q}{c^{\alpha}(\alpha-1)}\right)^{k} \frac{\lambda^{k(\alpha-1)}}{\Gamma(k(\alpha-1))\, k!} \qquad \lambda > 0.$$

Im Nullpunkt besitzt die Verteilungsfunktion $U(\lambda)$ eine Unstetigkeit, d. h. $u(\lambda)$ existiert dort nicht. Als Spezialfall berechnen wir $u(\lambda)$ für $\alpha = 2$:

$$u(\lambda) = e^{-\frac{q+\lambda}{c}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q}{c^2}\right)^k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!\,k!} = e^{-\frac{q+\lambda}{c}} \frac{q}{c^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q}{c^2}\right)^{k-1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!\,k!}$$

$$= e^{-\frac{q+\lambda}{c}} \frac{q}{c^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{q\lambda}{c^2}\right)^k}{k!\,(k+1)!} = e^{-\frac{q+\lambda}{c}} \frac{q}{c^2} \sqrt{\frac{c^2}{q\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(2\frac{\sqrt{q\lambda}}{c}\right)^{2k+1}}{2^{2k+1}\,k!\,(k+1)!}$$

$$u(\lambda) = e^{-\frac{q+\lambda}{c}} \frac{\sqrt{q}}{c} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} I_{-1}\left(2\frac{\sqrt{q\lambda}}{c}\right).$$

$0 < \alpha < 1$:

Setzen wir: $\gamma = 1 - \alpha$ $(0 < \gamma < 1)$, so wird

$$\chi(z) = e^{-\frac{q}{c\gamma}((1-ciz)^\gamma - 1)}.$$

Zur Diskussion von $\chi(z)$ führen wir eine Hilfsfunktion ein

$$\pi(z) = e^{-\frac{q}{c\gamma}(-ciz)^\gamma} = e^{-\frac{q}{c^\alpha\gamma}(-iz)^\gamma}.$$

Sie kann auf die Form gebracht werden

$$\pi(z) = e^{-c_0\left(1 - i\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}\gamma\right)z^\gamma} \quad \text{mit } c_0 > 0. \tag{4.13}$$

P. Lévy (7) hat gezeigt, dass

$$\varphi(z) = e^{-c_0\left(1 + i\beta\frac{z}{|z|}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}\gamma\right)|z|^\gamma}$$

$$\text{mit } c_0 > 0, \quad |\beta| \leqq 1, \quad 0 < \gamma \leqq 2$$

die charakteristische Funktion eines stabilen Verteilungsgesetzes ist. Durch (4.13) wird eine gewisse Klasse von stabilen Verteilungen dargestellt. Zum Beweis nehmen wir vorerst an, dass γ rational sei:

$$\gamma = \frac{m}{n} \qquad m, n \text{ ganz}, \quad m < n.$$

Es ist

$$(-i)^{m/n} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\frac{m}{n} + k\,2\pi\frac{m}{n}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\frac{m}{n} + k\,2\pi\frac{m}{n}\right)$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Die Lösung $k = n - 1$ liefert:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\frac{m}{n} - 2\pi\frac{m}{n} + m\,2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{m}{n}\right),$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}\frac{m}{n} - 2\pi\frac{m}{n} + m\,2\pi\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{m}{n}\right),$$

und daher

$$\pi(z) = e^{-c_0\left(1 - i\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{m}{n}\right)\right)z^{m/n}}$$

mit

$$c_0 = \frac{q\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{m}{n}\right)}{c^{\alpha}\frac{m}{n}} > 0.$$

Für nicht-rationales γ folgt die Darstellung (4.13) aus der Tatsache, dass jede Zahl beliebig nahe durch rationale Zahlen approximiert werden kann.

Die stabilen Verteilungen sind stetig, d. h. sie besitzen eine Frequenzfunktion, die wir mit $f_{\gamma,\beta}(\lambda)$ bezeichnen. $\pi(z)$ ist dann die charakteristische Funktion von $f_{1-\alpha,-1}(\lambda)$

$$\pi(z) = \int_0^\infty e^{iz\lambda} f_{1-\alpha,-1}(\lambda)\,d\lambda.$$

Aus

$$\chi(z) = e^{\frac{q}{c(1-\alpha)}}\,\pi\left(z + \frac{i}{c}\right)$$

folgt

$$\chi(z) = e^{\frac{q}{c(1-\alpha)}}\int_0^\infty e^{iz\lambda}\,e^{-\frac{\lambda}{c}}\,f_{1-\alpha,-1}(\lambda)\,d\lambda.$$

Zu $\chi(z)$ gehört also im Falle $0 < \alpha < 1$ die Strukturfunktion

$$u(\lambda) = e^{\frac{q}{c(1-\alpha)}}\,e^{-\frac{\lambda}{c}}\,f_{1-\alpha,-1}(\lambda).$$

Es ist bis heute nur in wenigen Fällen gelungen, die stabilen Frequenzfunktionen in geschlossener Form darzustellen; für die Funktionen $f_{\gamma,-1}(\lambda)$ ist insbesondere der Fall $\gamma = \frac{1}{2}$ bekannt (Vgl. P. Lévy (7a)):

$$f_{\frac{1}{2},-1}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{q}{\sqrt{c}}\,\lambda^{-\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{q^2}{c\lambda}}.$$

Also wird für $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$u(\lambda) = \frac{q}{\sqrt{\pi c}} e^{\frac{2q}{c}} \lambda^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\lambda}{c} - \frac{q^2}{c\lambda}}.$$

Die Verteilungen, welche sich für $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 2$ ergeben, wurden bereits von R. Consael (2) betrachtet. Wir führen noch zwei andere bekannte Spezialfälle an.

$\alpha = 0$:

$$U(\lambda) = \varepsilon(\Lambda - q),$$

$$P(0;t) = e^{-qt},$$

$$P(n;t) = e^{-qt} \frac{(qt)^n}{n!}.$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion der gewöhnlichen Poisson-Verteilung.

$\alpha = 1$:

Strukturfunktion und erzeugende Funktion sind hier gegeben durch (4.12) bzw. (4.9). Die Koeffizienten der Wahrscheinlichkeitsfunktion (4.8) berechnen sich aus

$$A_{\nu n}(1) = A_{\nu-1 n-1}(1) + (n-1) A_{\nu n-1}(1).$$

Sie stimmen im wesentlichen mit den Stirlingschen Zahlen 1. Art S_n^ν überein

$$A_{\nu n}(1) = (-1)^{n+\nu} S_n^\nu.$$

Aus (4.8) ergibt sich daher

$$P(n;t) = P(0;t) \left(\frac{ct}{1+ct}\right)^n \frac{\Gamma(q/c + n)}{\Gamma(q/c)\, n!}$$

also die Wahrscheinlichkeitsfunktion der negativen Binomialverteilung.

Wir bemerken noch, dass die Strukturfunktion der Wahrscheinlichkeitsverteilung (4.8) einer Integralgleichung gehorcht.

Aus

$$P(0;t) = e^{-q\tau(t)}$$

folgt:

$$-q\tau(t) = \log P(0;t),$$

$$\tau'(t) = -\frac{1}{q} \frac{P'(0;t)}{P(0;t)},$$

$$q\tau'(t)\, P(0;t) = -P'(0;t).$$

Die in dieser Relation auftretenden Funktionen können als gewöhnliche Laplace Integrale geschrieben werden, da die Strukturfunktion $U(x)$ für alle α und für $x > 0$ eine Ableitung $u(x)$ besitzt. Es gilt

$$P(0;t) = \int_0^\infty u(x)\, e^{-xt}\, dx\,,$$

$$\tau'(t) = \left(\frac{1}{1+ct}\right)^\alpha = \frac{1}{c^\alpha}\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x/c}\, e^{-xt}\, dx\,.$$

Also folgt

$$\frac{q}{c^\alpha\,\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x/c}\, e^{-xt}\, dx \int_0^\infty u(x)\, e^{-xt}\, dx = \int_0^\infty x u(x)\, e^{-xt}\, dx\,.$$

In der Symbolik der Laplace Transformation lautet diese Gleichung

$$\frac{q}{c^\alpha\,\Gamma(\alpha)}\, L\{x^{\alpha-1}\, e^{-x/c}\}\, L\{u(x)\} = L\{x u(x)\}\,.$$

Sie entspricht der folgenden Integralgleichung für die Funktion $u(x)$

$$\frac{q}{c^\alpha\,\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1}\, e^{-y/c}\, u(x-y)\, dy = x u(x)\,.$$

Zur Diskussion der durch (4.8) gegebenen Verteilung führen wir die Parametertransformation $c = b/\alpha$ ein, und erhalten:

$$\begin{aligned} P(0;t,\alpha) &= e^{-\frac{q}{b}\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(1-\left(\frac{\alpha}{\alpha+bt}\right)^{\alpha-1}\right)}\,, \\ P(n;t,\alpha) &= P(0;t)\left(\frac{bt}{\alpha+bt}\right)^n \frac{1}{n!}\sum_{\nu=0}^{n} A_{\nu n}(\alpha)\left(\frac{\alpha q}{b}\left(\frac{\alpha}{\alpha+bt}\right)^{\alpha-1}\right)^\nu. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Die Strukturfunktionen haben im allgemeinen keine einfache Gestalt. Wir charakterisieren sie deshalb durch die Grössen: Mittelwert, Streuung, Schiefe und Exzess. Diese werden in einfacher Weise aus den Kumulanten $\varkappa_k$ berechnet. Nach Definition ist

$$\varkappa_k = (-1)^k \frac{d^k}{dz^k} \log \chi(z)\big|_{z=0}\,.$$

Aus (4.11) folgt
$$\chi(z) = e^{-q\tau(-iz)}$$
und daher
$$\varkappa_k = (-1)^{k+1}\tau^{(k)}(0).$$
Setzen wir in (4.7) $t = 0$ und $c = b/\alpha$, so wird
$$\tau^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}\left(\frac{b}{\alpha}\right)^{k-1}\frac{\Gamma(\alpha+k-1)}{\Gamma(\alpha)}.$$
Also erhalten wir schliesslich:
$$\varkappa_1 = q,$$
$$\varkappa_2 = qb,$$
$$\varkappa_k = qb^{k-1}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\cdots\left(1+\frac{k-2}{\alpha}\right) \qquad k>2.$$
Daraus ergeben sich:

Mittelwert: $\bar{\lambda} = \varkappa_1 = q,$

Streuung: $\sigma_\lambda^2 = \varkappa_2 = qb,$

Schiefe: $\varepsilon_1 = \dfrac{\varkappa_3}{\sigma_\lambda^3} = \sqrt{\dfrac{b}{q}}\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right),$

Exzess: $\varepsilon_2 = \dfrac{\varkappa_4}{\sigma_\lambda^4} = \dfrac{b}{q}\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(1+\dfrac{2}{\alpha}\right).$

Die Strukturfunktionen $U(\lambda;\alpha)$ bilden daher eine Schar von Verteilungsfunktionen, welche bei gegebenem Mittelwert und Streuung für zunehmende α abnehmende Schiefe und Exzess aufweisen.

Für späteren Gebrauch führen wir noch die ersten beiden Momente von $P(n;t,\alpha)$ an. Sie berechnen sich aus den entsprechenden Momenten von $U(\lambda;\alpha)$ nach den Formeln (2.2a):
$$\bar{n} = qt, \qquad \sigma_n^2 = qt(bt+1). \tag{4.15}$$
Die Funktionen
$$\tau'(t;\alpha) = \left(\frac{1}{1+ct}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\alpha+bt}\right)^\alpha$$
bilden eine Schar mit der Eigenschaft, dass für je zwei Werte α_1 und α_2 mit $\alpha_1 < \alpha_2$ und für alle t auf dem Intervall $0 < t < \infty$ gilt
$$\tau'(t;\alpha_1) < \tau'(t;\alpha_2).$$

Wegen $\tau(0) = 0$ folgt daher:

$$\tau(t;\alpha_1) > \tau(t;\alpha_2)$$

und

$$P(0;t,\alpha_1) < P(0;t,\alpha_2).$$

Für jedes feste t ist $P(0;t,\alpha)$ eine monoton zunehmende Funktion von α.

Wir betrachten noch den Grenzfall:

$\alpha = \infty$.

Mit den neuen Parametern lautet die Funktion $\tau(t)$:

$$\tau(t) = \frac{1}{b\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}\left(1-\left(\frac{1}{1+\frac{b}{\alpha}t}\right)^{\alpha-1}\right).$$

Daraus folgt sofort:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \tau(t;\alpha) = \frac{1}{b}(1-e^{-bt}).$$

Da $\tau'(t;\infty)$ vollmonoton und $\tau(0;\infty) = 0$ ist, stellt

$$P(0;t) = e^{-\frac{q}{b}(1-e^{-bt})}$$

auch eine erzeugende Funktion einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung dar. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion kann ganz analog berechnet werden wie (4.8)

$$P(n;t) = P(0;t)\frac{(bt)^n}{n!}\sum_{\nu=0}^{n} B_{\nu n}\left(\frac{q}{b}e^{-bt}\right)^{\nu}.$$

Die Koeffizienten $A_{\nu n}(\infty) = B_{\nu n}$ gehorchen der Rekursionsformel

$$B_{\nu n} = B_{\nu-1 n-1} + \nu B_{\nu n-1}$$

und sind daher gleich den Stirlingschen Zahlen 2. Art.

Im Gegensatz zu den vorangehenden Beispielen ist die Strukturfunktion hier durch eine diskrete Verteilung, und zwar durch eine Poisson-Verteilung, gegeben

$$dU(\lambda) = e^{-q/b}\frac{(q/b)^{\lambda/b}}{(\lambda/b)!} \quad \text{für } \lambda = 0,\ b,\ 2b,\ \ldots.$$

Wie haben also als Grenzfall die sogenannte Neyman-Verteilung vom Typus A erhalten.

5. Erweiterung der zusammengesetzten Poisson-Verteilung

In den Anwendungen kommt es oft vor, dass man zufallsmässige Ereignisse betrachtet, mit denen eine kontinuierliche stochastische Variable verbunden ist, welche man als Grösse der Wirkung eines Ereignisses auffassen kann. Beispiele dafür liefern viele Zweige der Personen- und Sachversicherung, wo ein Schadenfall einen Schaden auslöst, dessen Höhe weitgehend durch den Zufall bestimmt wird. Mathematisch wird ein solcher Prozess dargestellt durch eine Variable, welche in zufälligen Zeitpunkten sprungweise ändert, wobei die Höhe des Sprunges selbst eine stochastische Variable ist.

Wir beschränken uns auf eine einzige Art von Ereignissen, und machen über die Natur des Prozesses folgende Annahmen:

1. Die Anzahl Ereignisse N ist gegeben durch eine eindimensionale zusammengesetzte Poisson-Verteilung:

$$P(n;t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \, dU(\lambda) .$$

2. Die Höhe eines Sprunges X ist unabhängig von Anzahl und Grösse der vorangehenden Sprünge. Sie besitzt die Verteilungsfunktion:

$$P\{X < x\} = S(x) \qquad \text{mit } S(0) = 0 .$$

Die summare Sprunghöhe in einem Zeitintervall der Länge t hat dann die Verteilungsfunktion

$$H(x;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \, dU(\lambda) \, S_{(n)}(x) \tag{5.1}$$

$S_{(n)}$ bezeichnet die n-te Faltung von $S(x)$.

Als Beispiel betrachten wir den Fall:

$$\frac{dU(\lambda)}{d\lambda} = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{q}{b}} \frac{\lambda^{q/b-1}}{\Gamma(q/b)} e^{-\frac{\lambda}{b}} ,$$

$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{1}{d} e^{-\frac{x}{d}} = s(x) .$$

Durch Induktion findet man

$$s_{(n)}(x) = \frac{1}{d^n} \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-\frac{x}{d}}.$$

Also folgt:

$$s_{(n)}(0) = \begin{cases} \frac{1}{d} & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

Nach (3.1) und (3.4) ist:

$$P(0;t) = \left(\frac{1}{1+bt}\right)^{q/b},$$

$$P(n;t) = P(0;t)\left(\frac{bt}{1+bt}\right)^n \frac{\Gamma(q/b+n)}{\Gamma(q/b)\, n!}.$$

Wir erhalten deshalb für $x > 0$:

$$\frac{dH(x;t)}{dx} = h(x;t) = \left(\frac{1}{1+bt}\right)^{\frac{q}{b}} \left(\frac{bt}{1+bt}\right) \frac{e^{-\frac{x}{d}}}{d\,\Gamma(q/b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{bt}{1+bt}\frac{x}{d}\right)^{n-1} \frac{\Gamma(q/b+n)}{\Gamma(n)\,\Gamma(n+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{1+bt}\right)^{\frac{q}{b}} \left(\frac{bt}{1+bt}\right) \frac{e^{-\frac{x}{d}}}{d\,\Gamma(q/b)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{bt}{1+bt}\frac{x}{d}\right)^{n} \frac{\Gamma(q/b+n+1)}{\Gamma(n+2)\, n!}.$$

Die gleichmässig konvergente Potenzreihe stellt eine konfluente hypergeometrische Funktion dar. Führen wir die für sie übliche Bezeichnung ein

$${}_1F_1(\alpha,\beta,z) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta+n)\, n!} z^n$$

so erhalten wir schliesslich

$$h(x;t) = P(0;t)\, s(x) \frac{qt}{1+bt}\, {}_1F_1\left(q/b+1, 2, \frac{bt}{1+bt}\frac{x}{d}\right). \tag{5.2}$$

Die charakteristische Funktion von $H(x;t)$

$$\psi(z;t) = \int_0^\infty e^{izx}\, dH(x;t)$$

drückt sich mit Hilfe der charakteristischen Funktionen von $S(x)$ und $U(\lambda)$

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{izx}\, dS(x),$$

$$\chi(u) = \int_0^\infty e^{iu\lambda}\, dU(\lambda),$$

aus.

$$\psi(z;t) = \int_0^\infty e^{izx} \sum_{n=0}^\infty P(n;t)\, dS_{(n)}(x) = \sum_{n=0}^\infty P(n;t) \int_0^\infty e^{izx}\, dS_{(n)}(x)\,.$$

Wegen

$$\int_0^\infty e^{izx}\, dS_{(n)}(x) = [\varphi(z)]^n$$

wird

$$\psi(z;t) = \sum_{n=0}^\infty P(n;t)\,[\varphi(z)]^n = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, dU(\lambda)\,[\varphi(z)]^n$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^\infty \frac{[\lambda t\, \varphi(z)]^n}{n!}\, dU(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t[\varphi(z)-1]}\, dU(\lambda)\,.$$

Also folgt:

$$\psi(z;t) = \chi\left\{\frac{t[\varphi(z)-1]}{i}\right\}. \tag{5.3}$$

Die Momente der betrachteten Verteilungen berechnen sich aus den Beziehungen:

$$\begin{aligned} \mu_k(t) &= (-i)^k\, \psi^{(k)}(0;t)\,, \\ \nu_k &= (-i)^k\, \varphi^{(k)}(0)\,, \\ \alpha_k &= (-i)^k\, \chi^{(k)}(0)\,. \end{aligned}$$

Man erhält daher aus (5.3) sofort:

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \nu_1 \alpha_1 t\,, \\ \mu_2(t) &= \nu_1^2 \alpha_2 t^2 + \nu_2 \alpha_1 t\,, \\ \mu_3(t) &= \nu_1^3 \alpha_3 t^3 + 3\nu_1 \nu_2 \alpha_2 t^2 + \nu_3 \alpha_1 t\,. \end{aligned}$$

Für die Varianz von $H(x;t)$ ergibt sich

$$\bar{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - \mu_1^2(t) = \nu_1^2(\alpha_2 t^2 - \alpha_1^2 t^2) + \nu_2 \alpha_1 t \tag{5.4a}$$

oder, wenn wir die Varianz von $U(\lambda)$: $a = \alpha_2 - \alpha_1^2$ einführen

$$\bar{\mu}_2(t) = \nu_1^2 a t^2 + \nu_2 \alpha_1 t\,.$$

Das dritte Moment bezüglich dem Mittelwert

$$\bar{\mu}_3(t) = \mu_3(t) - 3\mu_1(t)\,\mu_2(t) + 2\mu_1^3(t)$$

wird

$$\bar{\mu}_3(t) = \nu_1^3(\alpha_3 t^3 - 3\alpha_1 \alpha_2 t^3 + 2\alpha_1^3 t^3) + 3\nu_1 \nu_2(\alpha_2 t^2 - \alpha_1^2 t^2) + \nu_3 \alpha_1 t\,. \tag{5.4b}$$

Wir betrachten noch zwei Grenzfälle der erweiterten zusammengesetzten Poisson-Verteilung:

1. Satz von Lundberg (8).

Falls das Moment ν_1 existiert, so gilt für die Variable $\frac{X_t}{t}$:

$$\lim_{t \to \infty} H(xt;t) = U\left(\frac{x}{\nu_1}\right).$$

2. Grenzverteilung für die standardisierte Variable

$$X_t^* = \frac{X_t - \nu_1 \alpha_1 t}{\sqrt{\nu_1^2 at + \nu_2 \alpha_1}\sqrt{t}}.$$

Satz: Unter der Voraussetzung, dass α_2 und ν_2 existieren, gilt beim Grenzübergang:

$$\left.\begin{array}{l} a \to 0 \\ t \to \infty \end{array}\right\} \quad at = f \quad \text{fest}$$

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ t \to \infty}} H\left(x\sqrt{\nu_1^2 at + \nu_2 \alpha_1}\sqrt{t} + \nu_1 \alpha_1 t;t\right) = \Phi(x).$$

Beweis: Die Variable X_t^* hat die charakteristische Funktion

$$\psi^*(z;t) = e^{-\frac{iz\nu_1\alpha_1 t}{\sqrt{\nu_1^2 f + \nu_2\alpha_1}\sqrt{t}}} \chi\left\{\frac{t}{i}\left[\varphi\left(\frac{z}{\sqrt{\nu_1^2 f + \nu_2\alpha_1}\sqrt{t}}\right) - 1\right]\right\}.$$

Daher wird

$$\log \psi^*(z;t) = -\frac{iz\nu_1\alpha_1 t}{\sqrt{\nu_1^2 f + \nu_2\alpha_1}\sqrt{t}} + \log \chi\left(\frac{t}{i} v\right)$$

mit

$$v = \varphi\left(\frac{z}{\sqrt{\nu_1^2 f + \nu_2\alpha_1}\sqrt{t}}\right) - 1.$$

Für $\log \chi(u)$ benützen wir die Entwicklung:

$$\log \chi(u) = \alpha_1(iu) + a\frac{(iu)^2}{2} + ao(u^2),$$

$$\log \chi\left(\frac{t}{i} v\right) = \alpha_1 tv + at^2\frac{v^2}{2} + fto(v^2).$$

Ersetzen wir auch $\varphi(w)$ durch ihre Entwicklung

$$\varphi(w) = 1 + \nu_1(iw) + \nu_2 \frac{(iw)^2}{2} + o(w^2),$$

so wird:

$$v = \nu_1 \frac{iz}{\sqrt{\nu_1^2 f + \nu_2 \alpha_1}\sqrt{t}} - \nu_2 \frac{z^2}{2(\nu_1^2 f + \nu_2 \alpha_1)t} + o\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$v^2 = -\nu_1^2 \frac{z^2}{(\nu_1^2 f + \nu_2 \alpha_1)t} + o\left(\frac{1}{t}\right).$$

Also folgt:

$$\log \psi^*(z;t) = -\frac{iz\nu_1\alpha_1 t}{\sqrt{\nu_1^2 f + \nu_2 \alpha_1}\sqrt{t}} + \frac{iz\nu_1\alpha_1 t}{\sqrt{\nu_1^2 f + \nu_2 \alpha_1}\sqrt{t}} - \frac{z^2}{2(\nu_1^2 f + \nu_2 \alpha_1)} + to\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$- \frac{z^2 \nu_1^2 f}{2(\nu_1^2 f + \nu_2 \alpha_1)t} + fto\left(\frac{1}{t}\right) + fto\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$\log \psi^*(z;t) = -\frac{z^2}{2} + to\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$\lim_{t \to \infty} \log \psi^*(z;t) = -\frac{z^2}{2}.$$

Die Verteilung der standardisierten Variablen X_t^* strebt also gegen die Normalverteilung $N(0,1)$.

II. Teil

Hauptprobleme der Unfallversicherungsmathematik und der Unfallstatistik

1. Allgemeines

Damit wir die Theorie der stochastischen Prozesse auf versicherungsmathematische Probleme anwenden können, müssen wir erklären, wie in der Praxis das untersuchte stochastische Ereignis, also das Eintreffen eines Schadenfalles, definiert ist. Während in der Lebensversicherung diese Definition in natürlicher Weise gegeben ist, muss in der Unfallversicherung über Eintritt oder Nichteintritt eines Schadenfalles oft auf Grund von gesetzlichen Bestimmungen entschieden werden. Der Begriff Unfall soll deshalb in den folgenden Untersuchungen im versicherungstechnischen Sinne verstanden werden, d. h. als ein Ereignis, welches nach den einschlägigen Gesetzen über die Unfallversicherung den Versicherer zu einer Versicherungsleistung veranlasst. Er ist daher meist sehr komplexer Natur; beispielsweise werden im Bundesgesetz vom 11. Juni 1911 über die Kranken- und Unfallversicherung die Berufskrankheiten den Unfällen gleichgestellt (Art. 68).

Bei einem Unfall haben wir, streng genommen, zu unterscheiden zwischen dem Unfallereignis (dem Schadenfall) und den Folgen des Unfallereignisses, welche für den Versicherer in der Ausbezahlung der vereinbarten Entschädigung (der Schadenhöhe) bestehen. Dem Sprachgebrauch folgend verwenden wir, wo keine Verwechslung möglich ist, für den Begriff Unfallereignis gelegentlich auch den weniger präzisen Ausdruck Unfall.

Die Anzahl Schadenfälle, welche eine Person in einer bestimmten Zeit betreffen, sowie die Schadenhöhe pro Unfall, haben wesentlich stochastischen Charakter: sie werden indessen beeinflusst durch eine grosse Anzahl Faktoren, welche teilweise a priori bekannt, teilweise a posteriori feststellbar sind. Umfangreiche Statistiken, wie sie zum Beispiel bei der Schweizerischen Unfallversicherungsanstalt in Luzern, dem statistischen Büro der englischen staatlichen Versicherung in Newcastle und dem staatlichen Institut für die Versicherung gegen Betriebsunfälle in Rom vorliegen, zeigen, dass für eine im voraus mögliche

Abschätzung des Risikos folgende Hauptfaktoren zu berücksichtigen sind: Geschlecht, Alter, Beruf, ferner Nebenbeschäftigungen und Gesundheitszustand der Versicherten. Zu diesen objektiv erfassbaren kommen noch eine Reihe von subjektiven Faktoren hinzu, über die erst eine längere Beobachtungszeit zuverlässigen Aufschluss geben kann, wie: Anfälligkeit für Unfälle sowie Versicherungs- und Arbeitsmoral.

In der Versicherungstechnik werden auf Grund solcher Gesichtspunkte Gefahrenklassen abgegrenzt, um dadurch den Bestand in möglichst homogene Teile zu zerlegen, d. h. Teilbestände, in welchen alle Objekte annähernd gleichem Risiko ausgesetzt sind. Zur Bestimmung der Nettoprämie genügt es, Unfallhäufigkeit und durchschnittliche Schadenhöhe in jeder Gefahrenklasse zu kennen (zwei Grössen, auf deren Definition wir im nächsten Abschnitt näher eintreten), während für Risikountersuchungen die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gesamtschadens gebraucht wird, die sich aus der Verteilung der Anzahl Schadenfälle und der Verteilung der Schadenhöhen berechnet.

Diese Verteilungen müssen empirisch gefunden werden, doch wird man sich nicht damit begnügen, beobachtete Häufigkeitskurven einfach auszugleichen, vielmehr versucht man, durch Hypothesen, welche der Erfahrung gerecht werden, den Charakter der theoretischen Verteilungen zu erklären.

Die in Frage stehenden Grössen: Anzahl Schadenereignisse und Schadenhöhe sind neben den stochastischen Schwankungen oft auch systematischen Veränderungen im Verlaufe der Zeit unterworfen, sei es durch die Wirkung wirtschaftlicher Einflüsse oder durch Änderungen der allgemeinen Lebensbedingungen. Damit aus einem vorliegenden Beobachtungsmaterial zulässige Schlüsse auf das künftige Geschehen gemacht werden können, soll es folgenden Bedingungen genügen:

1. Es muss möglich sein, zufällige von trendmässigen oder periodischen Änderungen der untersuchten Grössen zu trennen.
2. Die Verteilungsfunktionen, welche dem Trend oder der Periodizität überlagert sind, müssen zeitlich stabil sein.

Diese Forderungen gelten nicht nur für mathematische Untersuchungen, sondern in anderer Form auch für praktische versicherungstechnische Überlegungen, so dass es nicht berechtigt ist, aus ihnen einen Einwand gegen die Anwendung mathematisch-statistischer Methoden in der Unfallversicherung abzuleiten.

2. Formen der Unfallversicherung

Wir haben in der Unfallversicherung hauptsächlich zwei Versicherungsarten zu unterscheiden, nämlich:

Einzelunfallversicherung und Betriebsunfallversicherung.

Während in der Einzelunfallversicherung die einzelne Person die Versicherungseinheit bildet, wird bei der Betriebsunfallversicherung die Gesamtheit der in einem Betrieb beschäftigten Personen als Versicherungseinheit betrachtet. Dieser Unterschied wirkt sich statistisch zum Beispiel in der Definition der Unfallhäufigkeit aus. Bei der Einzelunfallversicherung wird die Unfallhäufigkeit in natürlicher Weise als durchschnittliche Anzahl Unfälle pro Person innerhalb der betrachteten Periode (z. B. 1 Jahr) definiert. Da bei der Betriebsunfallversicherung der Einzelne in der Statistik als solcher gar nicht erfasst wird, da er nur indirekt Versicherungsobjekt darstellt, ist die Anzahl versicherter Personen unbekannt. Sie wird ersetzt durch die Anzahl «Vollarbeiter», die sich aus der Anzahl Arbeitsstunden errechnet, und zwar gilt:

$$\begin{aligned} 300 \text{ Arbeitstage zu } 8 \text{ Stunden} &= 2400 \text{ Arbeitsstunden} \\ &= 1 \text{ Vollarbeiter} \end{aligned}$$

Die Anzahl der Arbeitsstunden für einen Betrieb wird ermittelt, indem die versicherte Lohnsumme dividiert wird durch einen geschätzten mittleren Stundenlohn. Die (jährliche) Unfallhäufigkeit wird dann als fiktive Grösse eingeführt, nämlich als Anzahl Unfälle pro Vollarbeiter.

Die durchschnittliche Schadenhöhe pro Unfall ist in beiden Fällen das Verhältnis der gesamten während einer gewissen Zeitperiode ausbezahlten Entschädigungen zur Totalanzahl der Unfälle in der betreffenden Zeit.

Über die Verhältnisse in der Betriebsunfallversicherung wurde von Wunderlin (14) eine eingehende Studie gemacht. Der Verfasser kommt auf Grund von Beobachtungen bei der Schweizerischen Unfallversicherungsanstalt in Luzern zum Schluss, «dass die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie zur Erfassung des Unfallrisikos und damit zur Prämienbestimmung in der sozialen Unfallversicherung zu verneinen sei». Unsere Untersuchungen werden hauptsächlich im Hinblick auf ihre Konsequenzen für die Einzelunfallversicherung durchgeführt, so dass wir hier nicht weiter auf Wunderlins Arbeit eingehen, da keine

Berechtigung besteht, Resultate, welche sich auf die Betriebsunfallversicherung beziehen, auf die Einzelunfallversicherung zu übertragen, habe diese nun privaten oder sozialen Charakter. Immerhin scheint uns, dass einige neue Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der erwähnten Arbeit keine Berücksichtigung fanden.

3. Der untersuchte Bestand

Ein wichtiger Grund dafür, dass der Unfallversicherungsmathematik von seiten der Praxis her wenig Aufmerksamkeit geschenkt wird, liegt wohl im Mangel an umfangreichen Statistiken, die es erlauben würden, die theoretischen Ergebnisse im einzelnen zu überprüfen. Um über die Verteilung der Anzahl Schadenfälle genügend Aufschluss zu erhalten, muss es möglich sein, jeden Versicherten während einer längeren Periode hinsichtlich seiner Unfälle zu beobachten. Nun werden aber bei den privaten Gesellschaften Policen mit wiederholten Unfällen innerhalb kurzer Zeit bald gekündigt. Bei obligatorischen Unfallversicherungen tritt dieser Nachteil nicht auf, hingegen sind diese gewöhnlich als Betriebsunfallversicherungen organisiert, bei denen die einzelne Person überhaupt nicht betrachtet werden kann.

Es wurde von uns ein abgeschlossener Bestand von 1196 männlichen Arbeitern, die mindestens während der Zeit vom 1. Januar 1944 bis zum 31. Dezember 1952 bei den städtischen Verkehrsbetrieben Zürich voll beschäftigt waren, untersucht. Diese Arbeiter sind gesamthaft bei der Schweizerischen Unfallversicherungsanstalt in Luzern versichert und wurden von dieser alle in die gleiche Gefahrenklasse (47d, Gefahrenstufe V) eingereiht. [1])

Wir betrachten getrennt voneinander Betriebsunfälle (BU) und Nichtbetriebsunfälle (NBU), welche im Führer durch die obligatorische Unfallversicherung (15) wie folgt definiert sind (S. 17):

«Als Betriebsunfälle gelten Unfälle, die durch den versicherten Betrieb verursacht werden oder die dem Arbeiter während der Arbeit für diesen Betrieb zustossen. Als Nichtbetriebsunfälle gelten alle übrigen Unfälle.»

---

[1]) Der Bestand entstammt also der Betriebsunfallversicherung. Indessen erlaubte es uns eine interne Statistik der Verkehrsbetriebe, die Unfälle jedes einzelnen Arbeiters zu verfolgen. Dadurch ergab sich die Möglichkeit, aus unseren Untersuchungen Folgerungen für die Einzelunfallversicherung zu ziehen.

Berufskrankheiten waren unter den registrierten Unfällen in vernachlässigbarer Anzahl vorhanden.

Die Schadenhöhe eines Unfalles setzt sich zusammen aus Lohnentschädigungs- und Heilungskosten. Die Lohnentschädigung hängt hauptsächlich ab von der Dauer des Unfalles (Anzahl voll arbeitsunfähiger Tage), daneben von wirtschaftlichen Faktoren, während für die Heilungskosten die Heilungsdauer (Zeit, die verstreicht vom Unfalleintritt bis zur letzten ärztlichen Konsultation) sowie Arzt- und Apothekerkosten massgebend sind.

Der relativ kleine Umfang unseres Bestandes gestattet es nicht, die verschiedenen Einflüsse auf die Schadenhöhe einzeln zu untersuchen. Wir betrachten deshalb lediglich die Dauer eines Unfalles (Schadendauer), gleichsam als ein Nettomass für die Schadenhöhe, in dem das wesentlich stochastische Element enthalten ist.

4. Beziehung zwischen Anzahl der Schadenfälle und Schadendauer

Um eine übersichtliche Darstellung der Verteilung des Gesamtschadens zu erhalten, macht man in der Unfallversicherung die grundlegende Hypothese, dass die Anzahl Schadenfälle und die Schadendauer zwei stochastisch unabhängige Variable sind. Diese Voraussetzung ist zwar nicht streng erfüllt, in den meisten Fällen wegen der Seltenheit der Unfälle und der Kürze der Dauer von Unfallverletzungen jedoch berechtigt. Für die Betriebsunfälle unseres Bestandes beträgt die jährliche Unfallhäufigkeit 0,098 und die durchschnittliche Dauer eines Unfalls 13,1 Tage. Tabelle 1 zeigt die durchschnittliche Schadendauer in Beziehung zur Anzahl BU.

Tabelle 1

n	N_n	nN_n	d
1	288	288	15,0
2	127	254	12,5
3	76	228	15,2
4	22	88	12,6
$\geqq 5$	31	196	8,6

n: Anzahl BU in den Jahren 1944–1952,
N_n: Anzahl Personen mit n BU,
d: Durchschnittliche Dauer eines Unfalls in Tagen.

Es weisen also lediglich die 31 Arbeiter mit fünf und mehr Unfällen in der neunjährigen Beobachtungsperiode eine wesentlich unter dem Mittel liegende durchschnittliche Schadendauer auf. Der Abfall erklärt sich dadurch, dass diese Arbeiter vorwiegend Bagatellunfälle anmeldeten, das sind Unfälle, welche dem Versicherer nur Heilungskosten, jedoch keine Lohnentschädigungskosten verursachen, also die Dauer 0 Tage haben.

5. Der Einfluss des Alters auf die Unfälle

Die grossen Statistiken, die wir eingangs erwähnten, zeigen, dass generell gesprochen, die Unfallhäufigkeit mit zunehmendem Alter sinkt, während die mittlere Schadendauer zunimmt. Für einen gegebenen Bestand hat man zu untersuchen, ob diese Erscheinung so ausgeprägt ist, dass man sie durch Gruppierung des Bestandes nach Altersklassen berücksichtigen muss, und wie die Gruppierung zu geschehen hat.

In der Tabelle 2 sind die Unfallhäufigkeiten der BU und NBU im Zusammenhang mit dem Geburtsjahr des Verunfallten dargestellt.

Tabelle 2

Geburtsjahr	(1)	(2)	(3)
1886–1892 . . .	122	0,75	0,84
1893–1895 . . .	114	0,90	0,83
1896–1897 . . .	104	0,76	0,96
1898–1900 . . .	99	0,65	0,93
1901–1902 . . .	107	1,03	0,87
1903	84	1,00	0,93
1904	100	0,73	0,97
1905	120	0,77	0,98
1906	119	0,82	0,98
1907	119	1,16	1,00
1908–1922 . . .	108	1,13	0,99
1886–1922 . . .	1196	0,88	0,93

(1): Bestand der betreffenden Altersgruppe,
(2): Unfallhäufigkeit der BU, } in den Jahren 1944–1952.
(3): Unfallhäufigkeit der NBU }

Die BU verteilen sich ziemlich gleichmässig auf die verschiedenen Altersgruppen mit Ausnahme der beiden jüngsten Gruppen, welche eine stark erhöhte Unfallfrequenz aufweisen. Diese ist indessen wohl eher auf den Mangel an Erfahrung zurückzuführen als auf den Einfluss des Alters. Bei den NBU ist die Abnahme der Unfallhäufigkeit mit zunehmendem Alter deutlicher, was sich dadurch erklärt, dass sich die älteren Jahrgänge in ihrer Freizeit im allgemeinen kleineren Risiken aussetzen als die jüngeren. Die Unterschiede sind jedoch nicht so gross, dass sie eine weitere Unterteilung des Bestandes notwendig machen würden.

Die Abhängigkeit der durchschnittlichen Schadendauer pro Unfall vom Alter des Verunfallten bei den BU ist aus der folgenden Tabelle zu ersehen.

Tabelle 3

Alter	(1)	(2)
25–40 Jahre	136	7,6
41–42 »	117	10,5
43–44 »	137	12,5
45–46 »	145	11,8
47–48 »	128	11,1
49–52 »	148	17,6
53–56 »	118	16,4
57–64 »	125	16,7
25–64 Jahre	1054	13,1

(1): Anzahl BU in den Jahren 1944–1952,
(2): Durchschnittliche Schadendauer pro Unfall in Tagen.

Für die Alter unter 49 Jahren liegt die durchschnittliche Schadendauer unter dem Mittel von 13,1 Tagen, für die anderen darüber.

6. Innere Abhängigkeiten

Eine auffallende Erscheinung tritt bei der Untersuchung der Schadenfälle in zwei angrenzenden Beobachtungsperioden zutage. Es zeigt sich, dass die Unfallhäufigkeit in der zweiten Periode (1949–1952) monoton zunimmt mit der Anzahl Unfälle in der ersten Periode (1944–1948).

Tabelle 4

n	BU (1)	BU (2)	BU (3)	NBU (1)	NBU (2)	NBU (3)
0	811	200	0,25	736	245	0,33
1	244	125	0,51	325	147	0,45
2	96	65	0,68	107	71	0,66
$\geqq 3$	45	55	1,22	28	20	0,71
			0,37			0,40

n: Anzahl Unfälle in den Jahren 1944–1948,
(1): Anzahl Personen mit n Unfällen in der 1. Periode,
(2): Anzahl Unfälle der betreffenden Personen in der 2. Periode,
(3): Unfallhäufigkeiten in den Jahren 1949–1952.

Das gleiche Verhalten der Unfallhäufigkeiten zeigt sich übrigens schon, wenn man die ganze Periode aufteilt in eine erste Periode von zwei Jahren und eine daran angrenzende von sieben Jahren.

Es besteht demnach stochastische Abhängigkeit zwischen den Unfällen einer Person in zwei angrenzenden Zeitintervallen; man kann nicht allen Personen des Bestandes das gleiche Unfallrisiko zuschreiben. Dass dieser Umstand nicht einfach durch eine Verschiedenheit der äusseren Bedingungen (welche trotz aller Bestrebungen zur Homogenisierung eines Bestandes bis zu einem gewissen Grad immer besteht) erklärt werden kann, zeigt der Zusammenhang zwischen den BU und den NBU in den Jahren 1944–1952: Personen mit einer relativ grossen Anzahl BU haben im Durchschnitt auch viele NBU. Vgl. Tabelle 5.

Tabelle 5

m	(1)	(2a)	(3a)	n	(1)	(2b)	(3b)
0	652	502	0,77	0	547	359	0,66
1	288	274	0,95	1	359	329	0,92
2	127	157	1,24	2	169	188	1,11
3	76	102	1,34	3	85	126	1,48
$\geqq 4$	53	82	1,55	$\geqq 4$	36	52	1,44

m: Anzahl BU in den Jahren 1944–1952,
n: Anzahl NBU in den Jahren 1944–1952,
(1): Anzahl Personen mit der entsprechenden Anzahl Unfälle,
(2a): Anzahl NBU } in den Jahren 1944–1952,
(3a): Unfallhäufigkeit der NBU }
(2b): Anzahl BU } in den Jahren 1944–1952.
(3b): Unfallhäufigkeit der BU }

Diese Abhängigkeiten legen die Idee nahe, dass für einen Bestand von Unfallversicherten neben den äussern, objektiv abgrenzbaren, noch innere Gefahrenklassen existieren. Auf Grund einer ähnlichen Untersuchung hat übrigens der Psychologe K. Marbe (10) den Begriff der Persönlichkeitsgefahrenklassen eingeführt.

7. Untersuchungen über die Verteilung der Anzahl Schadenfälle

Von den beiden stochastischen Grössen, welche zusammen das Risiko in der Unfallversicherung bestimmen: Anzahl der Schadenfälle und Schadenhöhe, ist die erstere die statistisch einfachere und aufschlussreichere. Wir werden uns daher in erster Linie mit ihr befassen.

Beim Versuch, in der Einzelunfallversicherung auf Grund der a priori zur Verfügung stehenden Daten Gefahrenklassen zu bilden, welche homogene Gesamtheiten darstellen in dem Sinne, dass der Erwartungswert der Anzahl Schadenfälle für alle Versicherten einer Gefahrenklasse der gleiche ist, macht man die Feststellung, dass dieser aus prinzipiellen Gründen versagt. Selbstverständlich stellt die geforderte Homogenität in allen Versicherungszweigen eine Idealisierung der Tatsachen dar und kann in der Wirklichkeit nicht streng realisiert werden. In unserem Fall jedoch geht man am Wesentlichen vorbei, wenn man nur die objektiven Gefahrenklassen berücksichtigt, weil unter den Unfallursachen subjektive Faktoren eine viel grössere Rolle spielen als man gewöhnlich annimmt.

Mit dem Ziel, einen theoretischen Beitrag zur Unfallverhütung zu geben, untersuchten Greenwood und Yule (6) die Unfallstatistiken einer Reihe von weiblichen Belegschaften in der Munitionsfabrikation während des ersten Weltkrieges. Die Frage, ob die Unfälle gleichmässig unter die Arbeiterinnen verteilt seien, führte sie zur Aufstellung von drei Modellen für eine theoretische Verteilung der Anzahl Unfälle, die aus folgenden Hypothesen abgeleitet wurden:

1. Die Unfallereignisse innerhalb einer Gruppe von Arbeiterinnen unterliegen dem reinen Zufall.
2. Die Personen einer Gruppe haben anfänglich alle die gleiche Wahrscheinlichkeit, einen Unfall zu erleiden. Trifft jedoch ein solcher ein, so ändert sich dadurch die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des nächsten Unfalles.

3. Die Personen einer Gruppe haben verschiedene Anfälligkeit gegenüber Unfällen und damit von Beginn an verschiedene Wahrscheinlichkeiten, einen Unfall zu erleiden.

Diese Annahmen bilden die Grundlage für eine theoretische Behandlung der Statistik der Unfallereignisse. Wir geben eine kurze Übersicht, wie sie im Lichte der neueren Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung mathematisch zu formulieren sind.

Der Hypothese, welche die Schadenfälle als reine Zufallsereignisse betrachtet, entspricht die Poisson-Verteilung. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person in einer Zeitperiode der Länge t von n Schadenfällen betroffen wird, ist gegeben durch den Ausdruck:

$$P(n;t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

worin λ die mittlere Anzahl Unfälle pro Zeiteinheit (die spezifische Unfallhäufigkeit) angibt. Die Poisson-Verteilung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Schadenfälle innerhalb einer homogenen Gruppe.

Im zweiten Falle werden die Unfälle als Ereignisse mit Wahrscheinlichkeitsansteckung aufgefasst. Ein neues und bedeutend allgemeineres Modell als das ursprüngliche von Greenwood und Yule für eine solche Ansteckungsverteilung stammt von J. Neyman (11). Es wird definiert auf Grund der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(n';t'/n;t)$, dass eine Person in der Zeit 0 bis t' genau n' Unfälle erleidet unter der Voraussetzung, dass sie n Schadenfälle erfahren hat in der Zeit 0 bis t. $P(n';t'/n;t)$ wird auch als direkte Übergangswahrscheinlichkeit bezeichnet. Sie habe die Eigenschaften:

(a) $P(n';t'/n;t)$ hängt nur von t und n ab, jedoch nicht davon, zu welchen Zeitpunkten die n Schadenfälle eingetroffen sind.

(b) $P(n';t'/n;t)$ ist im Punkte $t' = t$ nach t' differenzierbar, und zwar gilt:

$$\left.\frac{\partial P(n';t'/n;t)}{\partial t'}\right|_{t'=t} = p(n;t) = \frac{z(n)}{1+ct} \quad \text{für } n' = n+1,$$

$$= 0 \qquad \text{für } n' > n+1,$$

wobei die $z(n)$ beliebige nicht-negative Zahlen bedeuten und $c \geqq 0$ ist.

$p(n;t)$ wird als Intensitätsfunktion der Ereignisse bezeichnet, da $p(n;t)\,dt$ die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass im Zeitintervall t bis $t + dt$ ein weiterer Unfall eintritt. Sie hängt ab von der Anzahl der in 0 bis t eingetroffenen Ereignisse und, falls $c > 0$ ist, von der Länge dieses Zeitintervalles. Das Modell berücksichtigt also Ansteckung zwischen den Ereignissen und eine zeitliche Wirkung auf sie.

Die dritte Hypothese führt zu einer gedanklichen Aufspaltung der untersuchten Gruppen in homogene Teilgruppen, innerhalb derer die spezifische Unfallhäufigkeit λ einen konstanten Wert besitzt, während sie von Teilgruppe zu Teilgruppe variiert. Der Wert von λ für eine beliebige Teilgruppe ist gegeben durch eine Verteilungsfunktion $U(\lambda)$, definiert auf dem Intervall $0 \leqq \lambda < \infty$, die sogenannte Strukturfunktion. Innerhalb jeder Teilgruppe ist die Anzahl Schadenfälle nach Poisson verteilt, so dass die Wahrscheinlichkeit für irgendeine Person aus der Gruppe, n Schadenfälle in einem Zeitintervall der Länge t zu erleiden, gegeben ist durch:

$$P(n;t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, dU(\lambda)\,.$$

Dies ist die absolute Wahrscheinlichkeitsfunktion einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung.

Greenwood und Yule wählten, hauptsächlich um formal einfache Ausdrücke zu erhalten, für $U(\lambda)$ eine Funktion vom Pearsonschen Typus III

$$dU(\lambda) = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{q}{b}} \frac{\lambda^{q/b-1}}{\Gamma(q/b)}\, e^{-\lambda/b}\, d\lambda \quad \lambda > 0\,,\ q > 0\,,\ b > 0\,,$$

damit ergibt sich nach I(3.1) und I(3.4) *) die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(0;t) = \left(\frac{1}{1+bt}\right)^{q/b}$$

$$P(n;t) = P(0;t)\left(\frac{bt}{1+bt}\right)^n \frac{\Gamma(q/b+n)}{\Gamma(q/b)\,n!}$$

*) Auf Formeln aus dem ersten Teil wird mit einem vorangesetzten I Bezug genommen.

der sogenannten negativen Binomialverteilung, die auch von E. Newbold (12) und O. Lundberg (8) zur Untersuchung von Unfallstatistiken verwendet wurde.

Der Nachteil der negativen Binomialverteilung liegt darin, dass sie sowohl als Ansteckungsverteilung wie auch als zusammengesetzte Poisson-Verteilung interpretiert werden kann. Die Intensitätsfunktion einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung erfüllt nach O. Lundberg (8) S. 72 die Relation

$$p(n+1;t) = p(n;t) - \frac{p'(n;t)}{p(n;t)}.$$

Diese Beziehung ist auch hinreichend für eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung. Setzen wir die Intensitätsfunktion der Neyman-Verteilung

$$p(n;t) = \frac{z(n)}{1+ct}$$

ein, so folgt:

$$z(n+1) = z(n) + c,$$

also:

$$z(n) = z(0) + cn,$$

$$p(n;t) = \frac{z(0)+cn}{1+ct}.$$

Dies ist gerade die Intensitätsfunktion der negativen Binomialverteilung, falls $z(0) > 0$ und $c > 0$ ist. Vgl. O. Lundberg (8) S. 83.

Durch Anwendung der negativen Binomialverteilung kann also nicht entschieden werden, ob die Hypothese 2 oder 3 die zutreffende ist.

8. Allgemeines über die Anwendung von zusammengesetzten Poisson-Verteilungen zur Darstellung von Unfallhäufigkeiten

Die Tabellen des Abschnittes 6 zeigen, dass auf unsere Unfallstatistiken die Hypothese des reinen Zufalls nicht zutrifft; indessen geht aus ihnen nicht hervor, ob sie durch die Annahme einer Wahrscheinlichkeitsansteckung im Sinne positiver Chancenvermehrung oder durch die Annahme verschiedener individueller Anfälligkeiten ersetzt werden muss. Die Entscheidung darüber, welche Hypothese man zu akzeptieren hat, muss auf Grund von statistischen Tests gefällt werden.

Wir haben uns vor allem mit der Prüfung der dritten Hypothese nach Greenwood und Yule befasst, indem wir uns von der Überlegung leiten liessen, dass bei jährlichen Unfallhäufigkeiten von nur 0,098 (BU) und 0,104 (NBU) der Einfluss eines Unfalles auf den nächsten kaum von grosser Bedeutung sein kann, und dass kein plausibler Grund für die starke Chancenvermehrung angegeben werden kann, wie sie aus den Tabellen 4 und 5 im Falle von Ansteckung zwischen den Unfällen folgen müsste. Also nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeitsfunktion der theoretischen Verteilung die Gestalt habe

$$P(n;t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \, dU(\lambda) .$$

Ohne die spezielle Form von $U(\lambda)$ zu kennen, können wir auf Grund der Eigenschaften des zusammengesetzten Poisson-Prozesses generell prüfen, ob ein solcher angewendet werden darf.

Einen Anhaltspunkt, der wenig Arbeitsaufwand erfordert, erhalten wir durch Betrachtung einer Folge von Ungleichungen zwischen den absoluten Wahrscheinlichkeitsfunktionen. Es gilt:

$$\frac{1}{n} \frac{P(n-1;t)}{P(n;t)} \geqq \frac{1}{n+1} \frac{P(n;t)}{P(n+1;t)} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Der Beweis kann ganz analog geführt werden wie derjenige für die bekannten Ungleichungen zwischen den absoluten Momenten einer Verteilung. Vgl. Cramér (3) S. 176. Das Gleichheitszeichen gilt im Falle der gewöhnlichen Poisson-Verteilung und nur dann.

Sei: n Anzahl Unfälle in den Jahren 1944–1952,

N_n Anzahl Personen mit n Unfällen,

dann bilden die Grössen

$$\frac{1}{n+1} \frac{N_n}{N_{n+1}} = q_n$$

theoretisch eine mit wachsendem n monoton abnehmende Zahlenfolge.

Tabelle 6

n	BU	NBU	BU	NBU
	N_n		q_n	
0	652	547	2,26	1,52
1	288	539	1,13	1,06
2	127	169	0,56	0,67
3	76	85	0,86	1,06
4	22	20	0,31	0,33
5	14	12	0,47	0,67
6	5	3	0,10	0,43
7	7	1		

Wir gehen nicht weiter auf den Aussagenwert der Zahlen q_n ein, die natürlich für kleine N_n (und also grosse n) mit einem grossen wahrscheinlichen Fehler behaftet sind. Die Ergebnisse legen es nahe, die eingeschlagene Linie weiter zu verfolgen.

Aus den Überlegungen des ersten Teiles folgt, dass die zusammengesetzten Poisson-Verteilungen eindeutig charakterisiert sind durch die binomialen inversen Übergangswahrscheinlichkeiten, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person n Unfälle gehabt hat in der Zeit 0 bis t, unter der Voraussetzung, dass sie im Intervall 0 bis t' genau n' Unfälle hat, wobei $t < t'$ und daher $n \leqq n'$ ist, ist gegeben durch:

$$P(n;t/n';t') = \binom{n'}{n}\left(\frac{t}{t'}\right)^n\left(1-\frac{t}{t'}\right)^{n'-n}. \qquad (8.1)$$

In der nachfolgenden Tabelle sind die theoretisch berechneten Häufigkeiten mit den empirisch gegebenen verglichen für die Teilperiode 1944–1948 und die ganze Periode 1944–1952.

Um zufällige oder eventuelle systematische Änderungen in der Unfallhäufigkeit während der Beobachtungsperiode auszuschalten, denken wir uns eine zeitliche Transformation so ausgeführt, dass der Zeitparameter die durchschnittliche Anzahl Schadenfälle pro Person im entsprechenden Zeitintervall angibt, d. h. wir setzen:

$$t = \bar{n}, \qquad t' = \bar{n}',$$

wobei $\bar{n}$ die durchschnittliche Schadenhäufigkeit in der Zeit 1944–1948 und $\bar{n}'$ diejenige in der Zeit 1944–1952 bezeichnet. Der Parameter der Binomialverteilung

$$\frac{t}{t'} = \frac{\bar{n}}{\bar{n}'}$$

wird daher abgeschätzt durch:

$$\frac{t}{t'} \cong \frac{\sum n N_n}{\sum n' N_{n'}}.$$

Wir erhalten so

$$\text{für die BU:} \quad \frac{t}{t'} = 0{,}57780,$$

$$\text{für die NBU:} \quad \frac{t}{t'} = 0{,}56759.$$

Die Übereinstimmung wird mit Hilfe des χ^2-Tests geprüft, wobei man für jede Gruppe mit festem n' $\chi^2_{n'}$ berechnet und die Additionsregel für χ^2 benutzt:

$$\chi^2_b = \sum_{n'=0}^{\omega} \chi^2_{n'}.$$

Die Anzahl Freiheitsgrade ist deshalb: f = Anzahl der Beobachtungen – Anzahl der Gruppen – 1. χ^2_b ist ein beobachteter Wert von χ^2.

Tabelle 7a

Vergleich der theoretischen Häufigkeiten

$$N_{n'} \binom{n'}{n} \left(\frac{t}{t'}\right)^n \left(1 - \frac{t}{t'}\right)^{n'-n}$$

mit den empirischen für die BU 1944–1952.

n	n'	$N_{n'}$	Häufigkeiten beobachtet	Häufigkeiten theoretisch	$\chi^2_{n'}$
0	1	288	127	121,59	0,42
1			161	166,41	
0	2	127	24	22,64	
1			52	61,96	1,85
2			51	42,40	
0	3	76	7	5,72	
1			23	23,48	0,59
2			32	32,14	
3			14	14,66	
0	4	22	1	4,53	
1			5		
2			8	7,86	1,34
3			7	7,17	
4			1	2,45	
0	5	14	0	1,47	
1			3		
2			3	3,52	3,46
3			2	4,81	
4			5	4,19	
5			1		
0	6	5	0	1,03	
1			0		
2			2		
3			1	1,45	2,21
4			2	1,49	
5			0	1,01	
6			0		
0	7	7	0	2,34	
1			0		
2			0		
3			2		
4			3	2,06	0,62
5			0	2,61	
6			1		
7			1		

$\chi^2_b = 10{,}5 \qquad f = 16 \qquad P(\chi^2 > \chi^2_b) = 83{,}9\,\%$

Tabelle 7b

Vergleich der theoretischen Häufigkeiten mit den empirischen für die NBU 1944–1952.

n	n'	$N_{n'}$	Häufigkeiten beobachtet	Häufigkeiten theoretisch	$\chi^2_{n'}$
0	1	359	144	155,24	1,43
1			215	203,76	
0	2	169	34	31,60	
1			82	82,96	0,23
2			53	54,45	
0	3	85	11	6,87	
1			23	27,06	4,99
2			40	35,52	
3			11	15,54	
0	4	20	0	4,37	
1			2		
2			11	7,23	3,79
3			6	6,33	
4			1	2,08	
0	5	12	0	1,37	
1			2		
2			3	3,13	0,70
3			3	4,10	
4			4	3,40	
5			0		
0	6	3	0	1,57	
1			1		
2			0		
3			0		0,48
4			1	1,43	
5			1		
6			0		

$\chi^2_b = 11{,}6 \qquad f = 12 \qquad P(\chi^2 > \chi^2_b) > 44{,}6\,\%$

Um keine theoretischen Häufigkeiten zu erhalten, die kleiner als 1 sind, wurden einige Beobachtungen sinngemäss zusammengefasst.

Die vorangehenden Untersuchungen berechtigen zum Schlusse, dass die betrachteten Unfallverteilungen einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung folgen. Wir akzeptieren daher die dritte Hypothese von Greenwood und Yule, formulieren sie jedoch wie folgt:

Die Personen des Bestandes haben von Beginn an verschiedene Unfall-Suszeptibilität.

Wir schliessen in diesen Begriff eine subjektiv begründete verschiedene Disposition zu Unfällen sowie die Möglichkeit verschiedenen äusseren Risikos bei verschiedenen Personen ein.

Selbstverständlich handelt es sich hier um eine starke Vereinfachung eines komplizierten psychologischen Phänomens. Indessen versuchen wir nicht, die erhaltenen Ergebnisse in dieser Richtung näher zu interpretieren. Uns interessiert lediglich die Frage, ob das Modell brauchbar ist als Grundlage für die Berechnungen in der Unfallversicherung.

Damit dies der Fall ist, muss insbesondere verlangt werden, dass die Verteilung der Suszeptibilitäten im Bestand zeitlich stabil sei. Das kann geprüft werden, indem man die Streuungen der Strukturfunktion $U(\lambda)$ aus zwei angrenzenden Perioden miteinander vergleicht. Wir drücken, wie vorhin, die Länge der Perioden durch die durchschnittliche Anzahl Schadenfälle pro Person aus.

Aus der Momentenrelation I (2.2a):

$$\bar{n} = \bar{\lambda} t,$$

$$\sigma_n^2 = \sigma_\lambda^2 t^2 + \bar{\lambda} t,$$

folgt wegen der speziellen Wahl des Zeitparameters

$$\bar{\lambda} = 1,$$

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{\sigma_n^2}{\bar{n}^2} - \frac{1}{\bar{n}}.$$

Zwar kennt man die Stichprobenverteilung von σ_λ^2 nicht, doch kann nach einer Methode von Tschuprow die Varianz von σ_λ^2 (der wahrscheinliche Fehler) berechnet werden. Für grosse Stichproben gilt:

$$\operatorname{var}(\sigma_\lambda^2) = \frac{1}{\bar{n}^2 N}\left(\frac{4\bar{\eta}_3}{\bar{n}^2} - \frac{10\,\sigma_n^2}{\bar{n}^2} + \frac{4\,\sigma_n^2}{\bar{n}} + \frac{6}{\bar{n}} - 2\right)$$

mit $\bar{\eta}_3 = E(n - \bar{n})^3$. Vgl. E. Newbold (12).

Nehmen wir als 1. Periode: 1944–1948, als 2. Periode: 1949–1952, so erhalten wir:

$$\text{BU:} \quad \sigma^2_{\lambda_1} = 1{,}47 \pm 0{,}26, \qquad \sigma^2_{\lambda_2} = 1{,}16,$$

$$\text{NBU:} \quad \sigma^2_{\lambda_1} = 0{,}356 \pm 0{,}114, \qquad \sigma^2_{\lambda_2} = 0{,}456.$$

Bei den BU liegt $\sigma^2_{\lambda_2}$ innerhalb des doppelten, bei den NBU sogar innerhalb des einfachen wahrscheinlichen Fehlers, was zur Annahme einer stabilen Strukturfunktion berechtigt.

9. Zeitliche Schwankungen der Unfallhäufigkeit

Eine theoretische Verteilung kann im allgemeinen nicht auf jedes beliebige Teilintervall der Periode, für welche sie berechnet wurde, angewendet werden, da die spezifische Unfallhäufigkeit Schwankungen unterliegt, die um so grösser sind, je kleiner das betrachtete Intervall ist.

Wir untersuchen nun speziell das Verhalten der jährlichen Unfallhäufigkeiten. Zu diesem Zweck betrachten wir einen Bestand von N Personen während k Jahren und berechnen die Stichprobenverteilung der jährlichen Unfallhäufigkeit unter der Annahme, dass die theoretische jährliche Unfallhäufigkeit konstant sei.

Sei $n_{\nu j}$ die Anzahl Unfälle der ν-ten Person im j-ten Jahr. Dann ist

$$\eta = \frac{1}{kN} \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{j=1}^{k} n_{\nu j}$$

die jährliche Unfallhäufigkeit des Bestandes. Für alle j gilt:

$$P\{n_{\nu j} = r\} = e^{-\lambda_\nu} \frac{(\lambda_\nu)^r}{r!} \qquad \lambda_\nu = E(n_{\nu j}).$$

Die charakteristische Funktion dieser Verteilung ist

$$e^{\lambda_\nu (e^{iz} - 1)},$$

die charakteristische Funktion der Verteilung von η wird deshalb

$$e^{k \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu (e^{iz/kN} - 1)},$$

wobei $\sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu = NE(\eta) = N\bar{\eta}$ ist, so dass sich für die Verteilung von η ergibt:

$$P\left\{\eta = \frac{r}{kN}\right\} = e^{-kN\bar{\eta}} \frac{(kN\bar{\eta})^r}{r!}$$

$$\text{mit } E(\eta) = \bar{\eta}, \ \sigma_n^2 = \frac{\bar{\eta}}{kN}.$$

Die charakteristische Funktion der standardisierten Variablen $\frac{\eta - \bar{\eta}}{\sqrt{\bar{\eta}/kN}}$

$$e^{-iz\sqrt{kN\bar{\eta}}}\, e^{kN\bar{\eta}\left(e^{iz/\sqrt{kN\bar{\eta}}}-1\right)} = e^{-iz\sqrt{kN\bar{\eta}}}\, e^{iz\sqrt{kN\bar{\eta}} - \frac{z^2}{2} + \frac{(iz)^3}{3!\sqrt{kN\bar{\eta}}} + \cdots}$$

strebt für $N \to \infty$ gegen die charakteristische Funktion der Normalverteilung

$$e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Die beobachtete jährliche Häufigkeit ist also unter der gemachten Annahme annähernd normal verteilt mit dem Mittelwert $\bar{\eta}$ und der Streuung $\frac{\bar{\eta}}{kN}$.

Der p%-Wert einer Normalverteilung f_p ist gegeben durch die Gleichung

$$P\{|\eta - \bar{\eta}| > f_p \sigma_\eta\} = p\%.$$

Er kann bei vorgeschriebenem p einer Tabelle entnommen werden. p gibt die Prozentwahrscheinlichkeit an, dass ein beobachteter Wert von η ausserhalb des Intervalles

$$(\bar{\eta} - f_p \sigma_\eta, \bar{\eta} + f_p \sigma_\eta)$$

liegt.

Für die Verteilungen der BU und NBU erhalten wir:

BU: $\bar{\eta} = 0{,}098$, NBU: $\bar{\eta} = 0{,}104$,

und daraus:

5% Intervall

BU: $0{,}092 < \eta < 0{,}104$, NBU: $0{,}098 < \eta < 0{,}110$.

0,1% Intervall

BU: $0{,}088 < \eta < 0{,}108$, NBU: $0{,}094 < \eta < 0{,}114$.

Die Tabelle 8 zeigt, dass bei den BU 4, bei den NBU 5 Werte ausserhalb des 5% Intervalles, und 1 Wert bei den BU, 4 Werte bei den NBU sogar ausserhalb des 0,1% Intervalles liegen.

Tabelle 8

Jahr	BU (1)	BU (2)	NBU (1)	NBU (2)
1944	120	0,100	102	0,085
1945	108	0,090	138	0,115
1946	122	0,102	121	0,101
1947	127	0,106	162	0,135
1948	132	0,110	111	0,093
1949	121	0,101	121	0,101
1950	112	0,094	133	0,111
1951	106	0,089	116	0,097
1952	106	0,089	113	0,094

(1): Anzahl Unfälle,
(2): Unfallhäufigkeiten.

Für Betrachtungen, welche sich auf eine 1-Jahr-Periode beziehen, darf also die Unfallhäufigkeit nicht als konstant angenommen werden. Da aus den Beobachtungen weder ein Trend noch eine Periodizität zu erkennen ist, so müssten die Schwankungen durch eine zusätzliche Wahrscheinlichkeitsverteilung erfasst werden, eine Idee, die bereits von H. Ammeter (1) zur Behandlung von Risikoproblemen benützt wurde. Mathematisch bedeutet die Berücksichtigung dieser Schwankungen keine Schwierigkeit. Wir schreiben die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Anzahl Schadenfälle in der Form

$$P(n;t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \, dU(\lambda;\alpha) \,,$$

wo $\alpha = \bar{\lambda}$ wegen $\bar{n} = \bar{\lambda} t = \alpha t$ die spezifische Unfallhäufigkeit bedeutet. Nehmen wir an, dass α eine dem Zufall unterworfene, durch die Verteilungsfunktion $V(\alpha)$ gegebene Variable sei, so wird:

$$P^*(n;t) = \int^{\infty} dV(\alpha) \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dU(\lambda;\alpha)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} d \int_0^{\infty} U(\lambda;\alpha)\, dV(\alpha)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dH(\lambda)$$

$$\text{mit} \quad H(\lambda) = \int_0^{\infty} U(\lambda;\alpha)\, dV(\alpha)\,.$$

Schwieriger wäre bei unserer Beobachtungsperiode von nur neun Jahren die statistische Bestimmung von $V(\alpha)$. Für unsere Untersuchungen kommen wir jedoch mit der Annahme einer konstanten spezifischen Unfallhäufigkeit aus, da wir keine kleineren Zeitintervalle als die Perioden 1944–1948 und 1949–1952 betrachten und die spezifischen Unfallhäufigkeiten in diesen Intervallen (bezogen auf ein Jahr) die Werte haben

$$\text{BU:} \quad \eta_1 = 0{,}102, \qquad \eta_2 = 0{,}093,$$
$$\text{NBU:} \quad \eta_1 = 0{,}106, \qquad \eta_2 = 0{,}101.$$

und somit innerhalb des 5 %-Intervalles liegen.

10. Anwendung spezieller zusammengesetzter Poisson-Verteilungen

Für jede zusammengesetzte Poisson-Verteilung gilt, wie leicht zu zeigen ist:

$$\sigma_n^2 = \sigma_\lambda^2 t^2 + \bar{\lambda} t\,,$$

$$P(0;t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, dU(\lambda) \geqq e^{-\bar{\lambda} t} \quad \text{mit } \bar{\lambda} = \int_0^{\infty} \lambda\, dU(\lambda)$$

und somit:

$$\sigma_n^2 \geqq \bar{n}\,,$$

$$P(0;t) \geqq e^{-\lambda t}\,.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur im Falle der einfachen Poisson-Verteilung.

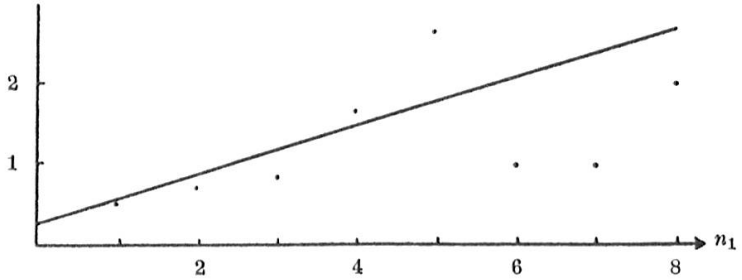
Bei vielen Untersuchungen von Unfallstatistiken mit Hilfe der einfachen Poisson-Verteilung folgte aus den angewendeten Tests ungenügende Übereinstimmung mit den empirischen Daten. Es zeigte sich im besonderen, dass die empirische Streuung grösser ist als der Mittelwert (und daher als die theoretische Streuung) und die Nullklasse (d. h. die Anzahl Personen mit 0 Schadenfällen in der Beobachtungsperiode) grösser als die nach Poisson berechnete. Dadurch wird die Anwendung einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung nahegelegt. Zur Verbesserung der Resultate wurde fast durchwegs die negative Binomialverteilung verwendet. Diese Wahl geschah aus Gründen formaler Einfachheit; indessen hat O. Lundberg (8) eine theoretische Begründung dafür gegeben, indem er zeigte, dass die negative Binomialverteilung die einzige zusammengesetzte Poisson-Verteilung ist mit linearer Regression, d. h. mit der Eigenschaft, dass der bedingte Erwartungswert der Anzahl Ereignisse in einer Zeitperiode der Länge t_2 unter der Voraussetzung, dass in einer vorangehenden Zeitperiode der Länge t_1 genau n_1 Ereignisse eingetroffen sind, linear von n_1 abhängt, und zwar gilt:

$$E(N_2;t_2/n_1;t_1) = \frac{q + bn_1}{1 + bt_1} t_2 \qquad b,q > 0.$$

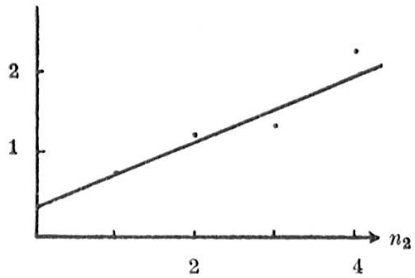
In diesem Sinne kann sie als erste Approximation für jede zusammengesetzte Poisson-Verteilung gelten.

Die berechneten Regressionsgeraden für die BU und NBU sind in den nachstehenden Figuren dargestellt.

BU

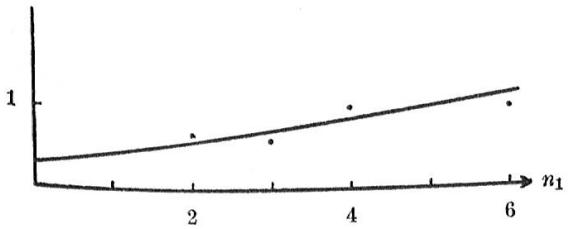


$$E(N_2;t_2/n_1;t_1) = 0{,}24 + 0{,}30\, n_1$$

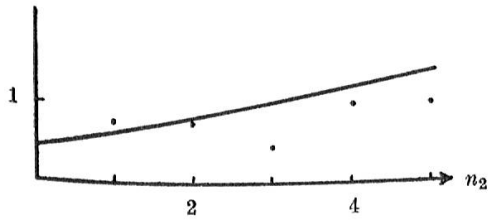


$$E(N_1;t_1/n_2;t_2) = 0{,}33 + 0{,}41\, n_2$$

NBU



$$E(N_2;t_2/n_1;t_1) = 0{,}34 + 0{,}14\,n_1$$



$$E(N_1;t_1/n_2;t_2) = 0{,}45 + 0{,}18\,n_2$$

Die im ersten Teil eingeführte Schar von zusammengesetzten Poisson-Verteilungen, die wir zur Darstellung der empirischen Verteilungen verwenden, hat die Wahrscheinlichkeitsfunktion (vgl. I (4.14))

$$P(0;t,\alpha) = e^{-\frac{q}{b}\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(1-\left(\frac{\alpha}{\alpha+bt}\right)^{\alpha-1}\right)},$$

$$P(n;t,\alpha) = P(0;t,\alpha)\left(\frac{bt}{\alpha+bt}\right)^n \frac{1}{n!}\sum_{\nu=0}^{n} A_{\nu n}(\alpha)\left(\frac{\alpha q}{b}\left(\frac{\alpha}{\alpha+bt}\right)^{\alpha-1}\right)^{\nu}, \tag{10.1}$$

mit dem Scharparameter $0<\alpha<\infty$ und $b,q>0$.

Alle Verteilungen der Schar haben gleichen Mittelwert und gleiche Streuung wie die in ihr enthaltene negative Binomialverteilung ($\alpha = 1$). Für jedes feste t nehmen die Wahrscheinlichkeiten der Nullklasse mit wachsendem α monoton zu

$$P(0;t,\alpha_1) < P(0;t,\alpha_2) \qquad \text{für } \alpha_1 < \alpha_2.$$

Die untere Grenze wird durch die Nullklasse der Poisson-Verteilung $P(0;t,0)$ gebildet.

Zur praktischen Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeiten benützen wir die Rekursionsformel I (4.10), welche mit unseren Parametern die Gestalt hat:

$$P(n+1;t) = \frac{qt}{n+1}\left(\frac{1}{1+b/\alpha t}\right)^{\alpha}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\,k!}\left(\frac{b/\alpha t}{1+b/\alpha t}\right)^{k} P(n-k;t).$$

Die Abschätzung der Parameter b und q geschieht mit Hilfe von empirischem Mittelwert und empirischer Streuung, während der Wert von α aus der beobachteten Nullklasse ermittelt wird. Sei:

n: Anzahl Unfälle,

N: Anzahl Personen des Bestandes,

N_n: Anzahl Personen mit n Unfällen.

Aus den Beziehungen I (4.15):

$$\bar{n} = qt,$$

$$\sigma_n^2 = qt(bt+1),$$

und der Formel (10.1) ergeben sich die Abschätzungen:

$$qt \cong \frac{1}{N} \sum nN_n,$$

$$bt = \frac{\sigma_n^2}{\bar{n}} - 1 = \frac{E(n^2)}{\bar{n}} - \bar{n} - 1,$$

$$bt \cong \frac{\sum n^2 N}{\sum nN_n} - \frac{1}{N} \sum nN_n - 1.$$

$$e^{-\frac{q}{b}\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(1-\left(\frac{\alpha}{\alpha+bt}\right)^{\alpha-1}\right)} \cong \frac{N_0}{N},$$

α wird deshalb aus der transzendenten Gleichung

$$\frac{q}{b}\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(1-\left(\frac{\alpha}{\alpha+bt}\right)^{\alpha-1}\right) + \log N_0 - \log N = 0$$

bestimmt. Wir erhalten (wenn wir für die BU p anstatt q und a anstatt b verwenden) die folgenden numerischen Werte:

BU: $pt = 0{,}88127$, $at = 1{,}10545$, $\alpha_1 = 0{,}76603$,

NBU: $qt = 0{,}93395$, $bt = 0{,}37313$, $\alpha_2 = 5{,}72312$.

Die Tabelle 9 zeigt die empirischen Verteilungen, die theoretischen Häufigkeitsverteilungen und die entsprechenden negativen Binomialverteilungen ($\alpha = 1$).

Tabelle 9a

n: Anzahl BU in den Jahren 1944–1952

n	beobachtet	Häufigkeiten $\alpha = 0{,}76603$	Häufigkeiten $\alpha = 1$
0	652	652,00	660,63
1	288	289,86	276,52
2	127	130,01	130,46
3	76	61,50	63,87
4	22	30,29	31,83
5	14	15,35	16,04
6	5	7,95	8,13
7	7	4,18	4,15
8	0	4,86	4,37
9	5		
usw.	0		

$\alpha = 0{,}76603$	$\chi_b^2 = 9{,}06$	$f = 5$	$P(\chi > \chi_b) > 10{,}1\,\%$
$\alpha = 1$	$\chi_b^2 = 9{,}54$	$f = 6$	$P(\chi > \chi_b) > 14{,}3\,\%$

Tabelle 9b

n: Anzahl NBU in den Jahren 1944–1952

n	beobachtet	Häufigkeiten $\alpha = 5{,}72312$	Häufigkeiten $\alpha = 1$
0	547	547,00	540,80
1	359	355,90	367,83
2	169	178,11	175,07
3	85	74,22	71,41
4	20	27,40	26,70
5	12	9,25	9,44
6	3	4,12	4,75
7	1		
usw.	0		

$\alpha = 5{,}72312$	$\chi_b^2 = 4{,}89$	$f = 3$	$P(\chi^2 > \chi_b^2) > 17{,}2\,\%$
$\alpha = 1$	$\chi_b^2 = 5{,}57$	$f = 4$	$P(\chi^2 > \chi_b^2) > 23{,}1\,\%$

Die Übereinstimmung darf in beiden Fällen als befriedigend bezeichnet werden; wir bemerken speziell, dass schon die negative Binomialverteilung genügend gute Resultate liefert.

Um die Hypothese der individuell verschiedenen Suszeptibilitäten sinnvoll zu verwenden, bilden wir nach einer gewissen Beobachtungszeit (1944–1948) auf Grund der eingetroffenen Unfälle subjektive Gefahrenklassen und berechnen in ihnen die a posteriori Wahrscheinlichkeiten der Anzahl Schadenfälle für die angrenzende Periode (1949–1952). Sie sind gegeben durch die direkten Übergangswahrscheinlichkeiten $P(n';t'/n;t)$. Diese berechnen sich aus der Beziehung

$$P(n';t'/n;t)\,P(n;t) = P(n;t/n';t')\,P(n';t')\,.$$

Da die inversen Übergangswahrscheinlichkeiten binomial sind, erhalten wir daraus nach (8.1):

$$P(n';t'/n;t) = \binom{n'}{n}\left(\frac{t}{t'}\right)^{n}\left(1-\frac{t}{t'}\right)^{n'-n}\frac{P(n';t')}{P(n;t)}\,.$$

Tabelle 10a

Vergleich der theoretischen Häufigkeiten $N_n P(n';t'/n;t)$ mit den empirischen für die BU.

n	$n'-n$	N_n	Häufigkeiten beobachtet	Häufigkeiten theoretisch	χ_n^2
0	0	811	652	649,93	
	1		127	128,42	
	2		24	25,60	0,92
	3		7	5,38	
	4		1	} 1,54	
	$\geqq 5$		0		
1	0	244	161	154,85	
	1		52	61,74	
	2		23	19,47	2,74
	3		5	5,68	
	4		3	} 2,21	
	$\geqq 5$		0		
2	0	96	51	46,52	
	1		32	29,34	
	2		8	12,84	3,27
	3		3	4,82	
	4		2	} 2,48	
	$\geqq 5$		0		
3	0	26	14	9,48	
	1		7	8,30	
	2		2	4,67	4,76
	3		1	2,15	
	4		2	} 1,40	
	$\geqq 5$		0		
4	0	11	1	3,00	
	1		5	3,38	
	2		2	2,33	5,53
	3		3	1,27	
	$\geqq 4$		0	1,02	

$\chi_b^2 = 17{,}2 \qquad f = 17 \qquad P(\chi^2 > \chi_b^2) > 42{,}1\,\%$

Tabelle 10b

Vergleich der theoretischen Häufigkeiten $N_n P(n';t'/n;t)$ mit den empirischen für die NBU.

n	$n'-n$	N_n	Häufigkeiten beobachtet	Häufigkeiten theoretisch	χ_n^2
0	0	736	547	538,13	
	1		144	155,62	
	2		34	34,61	5,55
	3		11	6,41	
	$\geqq 4$		0	1,23	
1	0	325	215	202,93	
	1		82	90,28	
	2		23	25,07	
	3		2	5,49	6,41
	4		2	1,23	
	5		1		
	$\geqq 6$		0		
2	0	107	53	59,60	
	1		40	33,11	
	2		11	10,86	2,21
	3		3	3,43	
	$\geqq 4$		0		
3	0	20	11	10,05	
	1		6	6,59	0,18
	2		3	3,36	
	$\geqq 3$		0		
4	0	6	1	2,73	
	1		4	2,05	2,99
	2		1	1,22	
	$\geqq 3$		0		

$\chi_b^2 = 17{,}3 \qquad f = 12 \qquad P(\chi^2 > \chi_b^2) > 13{,}2\,\%$

Aus der Tabelle 5 geht hervor, dass zwischen der Anzahl BU und der Anzahl NBU einer Person ein enger Zusammenhang bestehen muss. Dies ist in Übereinstimmung mit dem Modell verschiedener individueller Suszeptibilitäten, die ja wesentlich auf der Verschiedenheit der Anfälligkeit einer Person gegenüber Unfällen beruhen. Es muss deshalb möglich sein, die gemeinsame Verteilung der BU und NBU durch eine

zweidimensionale Korrelationsfunktion darzustellen. Als Beobachtungsperiode wählen wir die Jahre 1944–1952. Die Randverteilungen sind deshalb die in Tabelle 9a und 9b wiedergegebenen Verteilungen, welche in genügend guter Weise durch negative Binomialverteilungen dargestellt werden können. Wir versuchen deshalb, auf die gemeinsame Verteilung der BU und NBU die im ersten Teil abgeleitete negativbinomiale Korrelationsfunktion I (3.13) anzuwenden. Wir schreiben sie in der Gestalt I (3.17) und setzen noch $s = t$.

$$P(0,0;t) = \left(\frac{1}{1+at}\right)^{\frac{p}{a}-c}\left(\frac{1}{1+bt}\right)^{\frac{q}{b}-c}\left(\frac{1}{(1+at)(1+bt)-\beta atbt}\right)^{c},$$

$$P(m,n;t) = P_1(m;t)\,P_2(n;t)\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\Gamma(c+h)}{\Gamma(c)\,h!}\,M_h\left(m;\frac{p}{a},at\right)M_h\left(n;\frac{q}{b},bt\right)\left(\frac{\sigma_{mn}\,\overline{m}\,\overline{n}}{c\,\sigma_m^2\,\sigma_n^2}\right)^h.$$

Ihre Randverteilungen sind:

$$P_1(m;t) = \left(\frac{1}{1+at}\right)^{\frac{p}{a}}\left(\frac{at}{1+at}\right)^{m}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{a}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)m!},$$

$$P_2(n;t) = \left(\frac{1}{1+bt}\right)^{\frac{q}{b}}\left(\frac{bt}{1+bt}\right)^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{q}{b}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{b}\right)n!}.$$

Für die Parameter at, bt, qt, pt verwenden wir die Werte von Tabelle 9, während σ_{mn} abgeschätzt wird durch

$$\sigma_{mn} \cong \frac{1}{N}\sum_m\sum_n mnN_{mn} = 0{,}28480$$

N_{mn}: Anzahl Personen mit m BU und n NBU in der Beobachtungsperiode.

Der Parameter c wird eingeschränkt durch die Bedingungen:

$$1.\quad c \leqq min\left(\frac{p}{a},\frac{q}{b}\right) = 0{,}79721,$$

$$2.\quad \beta = \frac{\sigma_{mn}}{catbt} < 1 \qquad\qquad c > 0{,}69046.$$

Wir wählen $c = \frac{3}{4}$.

Tabelle 11

Vergleich der theoretischen Häufigkeiten $NP(m,n;t)$ mit den empirischen N_{mn} für die BU (m) und die NBU (n).

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	343 331,99 (0,37)	181 198,39 (1,60)	83 84,01 (0,01)	31 30,83 –	9 10,48 (0,21)	4 3,39 (0,11)	1 1,06 –	
1	122 121,08 (0,01)	94 87,34 (0,51)	41 42,03 (0,03)	27 16,88 (6,07)	3 6,12 (1,59)	1 2,08 (0,56)		
2	46 49,81 (0,29)	45 42,02 (0,21)	16 22,71 (1,98)	10 9,98 –	3 3,87 (0,20)	5 1,39 (9,37)	1	1
3	24 21,25 (0,36)	24 20,52 (0,59)	14 12,32 (0,23)	9 5,87 (1,67)	3 2,45 (0,12)	1	1	
4	2 9,26 (5,69)	10 10,04 –	7 6,63 (0,02)	1 3,42 (1,71)	1 1,52 (0,15)	1		
5	5 4,08 (0,21)	1 4,89 (3,09)	5 3,53 (0,61)	2 1,97 –	1			
6	1 1,81 (0,36)	2 2,38 (0,06)	1 1,86 (0,40)	1 1,12 (0,13)				
7	2	1 1,16 (0,28)	2	2				
8								
9		1		2				
10	2							

(Der beobachtete Wert steht oben, der theoretische, sofern er grösser als 1 ist, darunter. In Klammern ist der zugehörige Wert von χ^2 beigefügt.)

Für den χ^2-Test verwenden wir nur die Beobachtungen, bei denen der theoretische Wert grösser als 1 ist. Auf eine Gruppierung der restlichen Beobachtungen verzichten wir, da diese willkürlich geschehen müsste.

Es ist:

$$\chi_b^2 = 38{,}46, \qquad f = 32, \qquad P(\chi^2 > \chi_b^2) > 18{,}4\%.$$

Wir treten noch kurz auf die Interpretation der hier angewendeten Verteilung ein. Die Funktion

$$P(0,0;-is,-it) = \left(\frac{1}{1-ias}\right)^{\frac{p}{a}-c}\left(\frac{1}{1-ibt}\right)^{\frac{q}{b}-c}\left(\frac{1}{(1-ias)(1-ibt)+\beta asbt}\right)^{c}$$

ist die charakteristische Funktion der Strukturfunktion $U(k,\lambda)$. Aus ihrer Gestalt geht hervor, dass man sich die Variablen K und Λ als Summen zu denken hat:

$$K = K_{\mathrm{I}} + K_{\mathrm{II}},$$

$$\Lambda = \Lambda_{\mathrm{I}} + \Lambda_{\mathrm{II}},$$

in denen die Summanden folgende charakteristische Funktionen haben:

$$K_{\mathrm{I}}: \left(\frac{1}{1-ias}\right)^{\frac{p}{a}-c},$$

$$\Lambda_{\mathrm{I}}: \left(\frac{1}{1-ibt}\right)^{\frac{q}{b}-c},$$

$$(K_{\mathrm{II}}, \Lambda_{\mathrm{II}}); \left(\frac{1}{(1-ias)(1-ibt)+\beta asbt}\right)^{c}.$$

Es besteht also nur zwischen K_{II} und Λ_{II} stochastische Abhängigkeit. Wir können uns die Suszeptibilitäten einer Person gegenüber den BU (k) und den NBU (λ) zusammengesetzt denken aus subjektiver Unfallneigung und objektivem Unfallrisiko: K_{II} und Λ_{II} beziehen sich auf das subjektive, K_{I} und Λ_{I} auf das objektive Risiko für BU bzw. NBU. Die beiden letzteren Grössen müssen deshalb unabhängig sein voneinander. Die gemeinsame Verteilung von BU und NBU liefert eine weitere Bestätigung für das Modell der individuell verschiedenen Unfall-Suszeptibilitäten.

11. Die Verteilung der Schadenhöhen

Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass der Umfang des Bestandes keine eingehende Analyse des Problems der Schadenhöhen gestattet. Wir beschränkten uns deshalb darauf, die Schadendauer allein zu betrachten. Dabei machte sich der Umstand störend bemerkbar, dass die Zahlung des Krankengeldes erst am dritten Tag nach dem Unfall beginnt. Dadurch wird in der Statistik die Anzahl Unfälle der Schadendauer 0 unverhältnismässig gross, da darin alle Unfälle der effektiven Schadendauer 0, 1 und 2 Tage enthalten sind.

In der Tabelle 12 ist die Verteilung der Schadendauer pro Unfall für die BU der Jahre 1944–1952 mit der Frequenzfunktion:

$$s(x) = \frac{1}{d} e^{-\frac{x}{d}}$$

verglichen, wobei d die durchschnittliche Schadendauer pro Unfall ist. Mit dieser Funktion und der Darstellung der Anzahl BU durch eine negative Binomialverteilung erhalten wir für die Verteilung der summaren Schadendauer für eine Person die Frequenzfunktion (vgl. I (5.2)):

$$h(x;t) = \frac{qt}{1+bt}\left(\frac{1}{1+bt}\right)^{\frac{q}{b}} s(x)\, {}_1F_1\left(\frac{q}{b}+1, 2, \frac{bt}{1+bt}\,\frac{x}{d}\right).$$

$${}_1F_1(\alpha,\beta,z) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\beta+n)} z^n$$

ist die konfluente hypergeometrische Reihe. Sie wird für kleine z direkt, für grosse aus einer asymptotischen Entwicklung berechnet.

Tabelle 13 zeigt die theoretische und empirische Verteilung der Schadendauer pro Person.

Die Übereinstimmung ist in beiden Tabellen aus den eingangs erwähnten Gründen für kleine Werte von x unbefriedigend.

Die Funktion $h(x;t)$ ist allerdings für versicherungsmathematische Überlegungen weniger wichtig als die Verteilung der gesamten Schadenhöhe für den ganzen Bestand.

Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall, wo $P(n;t)$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Schadenfälle und $S(x)$ die Verteilungsfunktion der Schadenhöhe ist.

Tabelle 12

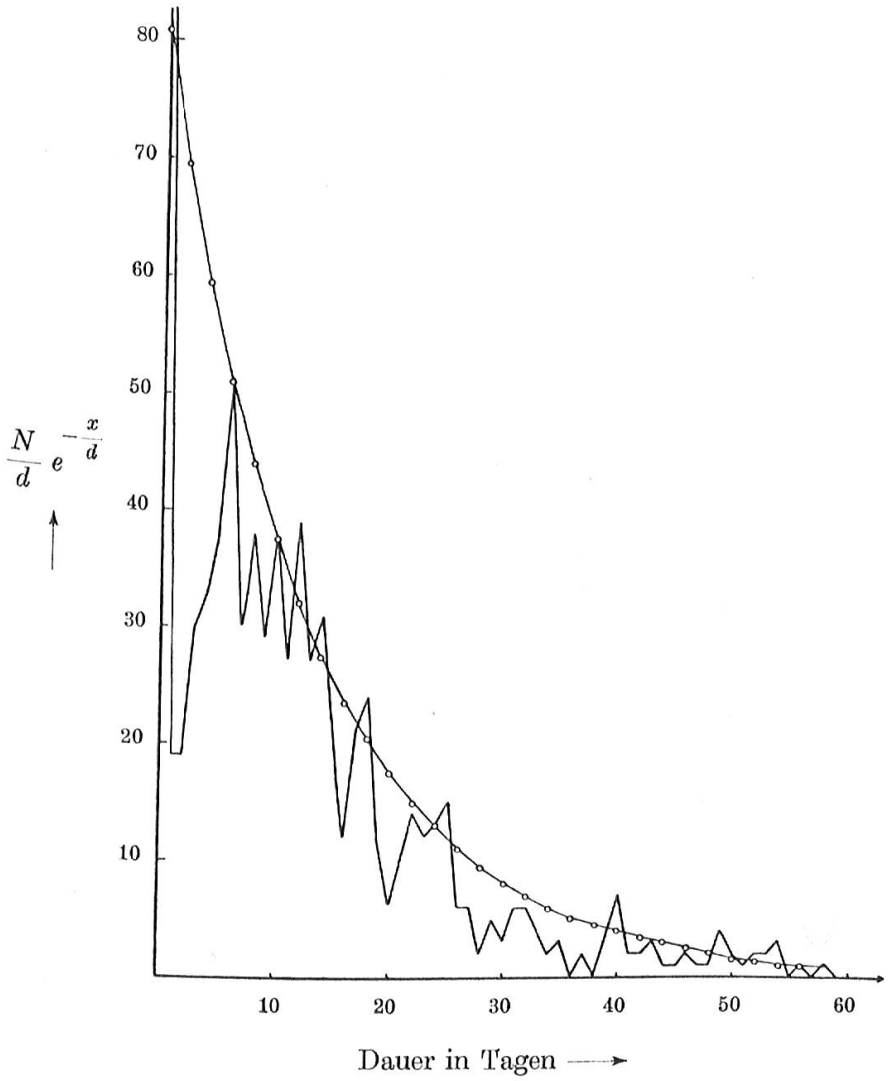
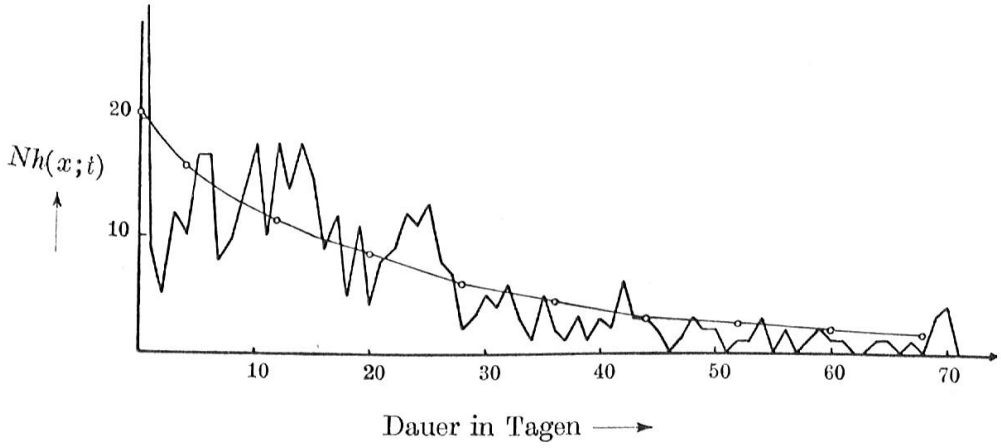


Tabelle 13



Dann wird die Verteilungsfunktion der summaren Schadenhöhe für eine Person:

$$H(x;t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{(n)}(x)\, P(n;t)\,.$$

Für zwei Personen ergibt sich durch Addition von zwei unabhängigen Variablen:

$$\begin{aligned}
H_{(2)}(x;t) &= \int_0^{\infty} H(x-y;t)\, dH(y;t) \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} S_{(n)}(x-y)\, P(n;t) \sum_{m=0}^{\infty} dS_{(m)}(y)\, P(m;t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} S_{(n)}(x-y)\, dS_{(m)}(y)\, P(m;t)\, P(n;t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} S_{(m+n)}(x)\, P(m;t)\, P(n;t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} S_{(k)}(x)\, P(k-n;t)\, P(n;t) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} S_{(k)}(x) \sum_{n=0}^{\infty} P(k-n;t)\, P(n;t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_{(k)}(x)\, P_{(2)}(k;t)\,,
\end{aligned}$$

$$\text{da } P(-i;t) = 0 \text{ für } i = 1, 2, \ldots$$

Für einen Bestand von N Personen erhält man daher

$$H_{(N)}(x;t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{(n)}(x)\, P_{(N)}(n;t)\,.$$

Wir nennen $H_{(N)}(x;t)$ die Verteilungsfunktion des Gesamtschadens für den Bestand.

Zur numerischen Berechnung der Verteilung des Gesamtschadens verwenden wir die Reihe von Cramér-Edgeworth. Wir gehen aus von N Variablen X_{it} $(i = 1, 2, \ldots, N)$, welche alle die Verteilungsfunktion $H(x;t)$, den Mittelwert $\bar{x}_t$ und die Streuung $\sigma^2_{x_t}$ besitzen. Unter der Voraussetzung, dass $S(x)$ eine absolut stetige Komponente enthält, d. h.

$$\int_0^{\infty} S'(x)\, dx > 0\,,$$

gilt für die Verteilungsfunktion $G(y;t,N)$ der Variablen

$$Y_N = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_{it} - \bar{x}_t)}{\sigma_{x_t} \sqrt{N}}$$

die asymptotische Entwicklung:

$$G(y;t,N) = \Phi(y) + \sum_{\nu=1}^{k-2} (-1)^\nu \frac{\sum_{j=1}^{\nu} c_{j\nu} \Phi^{(\nu+2j)}(y)}{N^{\nu/2}} + o\left(\frac{1}{N^{k/2-1}}\right).$$

$\Phi(y)$ bezeichnet die Verteilungsfunktion der standardisierten Normal-Verteilung, $c_{j\nu}$ sind Polynome in den Grössen $\lambda_r(t)/\lambda_2^{r/2}(t)$ wobei $\lambda_r(t)$ die r-te Semiinvariante von $H(x;t)$ ist.

Speziell gilt im Falle $k = 3$:

$$G(y;t,N) = \Phi(y) + \frac{1}{3!\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda_3(t)}{\lambda_2^{3/2}(t)} \frac{(1-y^2)\, e^{-y^2/2}}{\sqrt{N}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (11.1)$$

Stellt $P(n;t)$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung dar, so ist dadurch, wie wir im ersten Teil gesehen haben, die Wahrscheinlichkeit für n Schadenfälle in einem beliebigen Intervall der Länge t gegeben. Man darf deshalb für die Berechnung der Verteilungsfunktion des Gesamtschadens die Kontrakte unabhängig von ihrer Laufzeit und ihrer Vorgeschichte zusammenfassen.

Die zweite und dritte Semiinvariante einer Verteilung sind gleich dem zweiten bzw. dritten Moment bezüglich dem Nullpunkt. Also ist $\lambda_2(t)$ durch I (5.4a) und $\lambda_3(t)$ durch I (5.4b) gegeben. Um sie durch die Momente von $S(x)$ und $P(n;t)$:

$$\nu_k = \int_0^\infty x^k \, dS(x)$$

$$\eta_{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \ldots (n-k+1)\, P(n;t)$$

auszudrücken, benützen wir die Momentenrelation I (2.2), die im Eindimensionalen wie folgt lautet:

$$\eta_{(k)}(t) = \alpha_k t^k.$$

Damit erhalten wir:

$$\lambda_2(t) = \nu_1^2\left(\eta_{(2)}(t) - \eta_{(1)}^2(t)\right) + \nu_2\,\eta_{(1)}(t)\,,$$

$$\lambda_3(t) = \nu_1^3\left(\eta_{(3)}(t) - 3\,\eta_{(2)}(t)\,\eta_{(1)}(t) + 2\,\eta_{(1)}^3(t)\right) + 3\,\nu_1\,\nu_2\left(\eta_{(2)}(t) - \eta_{(1)}^2(t)\right) + \nu_3\,\eta_{(1)}(t)\,.$$

Setzen wir diese Werte in (11.1) ein, so erhalten wir eine approximative Darstellung der Verteilungsfunktion des Gesamtschadens (ausgedrückt in der standardisierten Variablen) des Bestandes in einem Zeitintervall der Länge t, die auf Grund der ersten drei Momente der Verteilungsfunktion der Schadenhöhe: $S(x)$ und der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Schadenfälle in der Zeit t: $P(n;t)$ berechnet werden kann.

Literaturverzeichnis

[1] *Ammeter H.:* Elemente der kollektiven Risikotheorie bei zufallsmässig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten. Mitt. Ver. Schweiz. Vers. Math. Bd. 49, 1949.

[2] *Consael R.:* Sur les processus de Poisson du type composé. Académie Royale de Belgique. Bull. Cl. Sci. 5. sér., t. 38, 1952.

[2a] Sur les processus composés de Poisson à deux variables aléatoires. Académie Royale de Belgique. Mém. Cl. Sci., fasc. 6, t. 27, 1952.

[3] *Cramér H.:* Mathematical methods of statistics. Princeton 1946.

[4] *Dubourdieu J.:* Remarques relatives à la théorie mathématique de l'assurance-accidents. Bull. Trim. de l'Inst. des Actuaires Français, vol. 49, 1938.

[4a] Sur un théorème de S. Bernstein relatif à la transformation de Laplace-Stieltjes. Compositio Matematica, vol. 7, 1940.

[5] *Feller W.:* Completely monotone functions and sequences. Duke Math. Journ. vol. 5, 1939.

[6] *Greenwood M.* und *Yule G.U.:* An inquiry into the nature of frequency distributions representative of multiple happenings with particular reference to the occurrence of multiple attacks of disease or of repeated accidents. Journ. Roy. Stat. Soc., vol. 83, 1920.

[7] *Lévy P.:* Théorie de l'addition des variables aléatoires. Paris 1937.

[7a] Sur certains processus stochastiques homogènes. Compositio Matematica, vol. 7, 1940.

[8] *Lundberg O.:* On random processes and their application to sickness and accident statistics. Dissertation Uppsala 1940.

[9] *Magnus W.* und *Oberhettinger F.:* Formeln und Sätze aus der mathematischen Physik. Berlin 1948.

[10] *Marbe K.:* Praktische Psychologie der Unfälle und Betriebsschäden. München und Berlin 1926.

[11] *Neyman J.* und *Bates G.:* Contributions to the theory of accident proneness. II. True or false contagion. University of California publications in statistics. Vol. 1, No. 10, 1952.

[12] *Newbold E.:* Practical applications of the statistics of repeated events, particularly to industrial accidents. Journ. Roy. Stat. Soc., vol. 90, 1927.

[13] *Voelker D.* und *Doetsch G.:* Die zweidimensionale Laplace-Transformation. Basel 1950.

[14] *Wunderlin W.* Zur Frage der Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie in der sozialen Unfallversicherung. Rückblick und Ausblick. Schweizerische Unfallversicherungsanstalt, 1942.

[15] Schweizerische Unfallversicherungsanstalt: Führer durch die obligatorische Unfallversicherung, 1951.