Orthogonale Polynome mehrerer Veränderlichen und ihre Anwendung in der ein- und zweidimensionalen Ausgleichsrechnung

Autor(en): **Hüsser, Rudolf**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **57 (1957)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-550874

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Orthogonale Polynome mehrerer Veränderlichen und ihre Anwendung in der ein- und zweidimensionalen Ausgleichsrechnung

Von *Rudolf Hüsser*, Bern

Einleitung

Statistische Beobachtungen oder Messungen sind stets mit Fehlern behaftet. Um den störenden Einfluss eines sprunghaften Verlaufes auszumerzen, fordert der Naturwissenschafter, insbesondere der Mathematiker für die «wahren Werte» einen glatten Verlauf, wodurch die allgemeine Grundtendenz unverfälscht und klar zum Ausdruck kommt. Welches der gebräuchlichen Verfahren anzuwenden ist und wie dabei vorgegangen wird, lehrt die Ausgleichsrechnung. Als besonders wertvoll haben sich Ausgleichsansätze mittels orthogonaler Polynome erwiesen. Letztere nehmen übrigens nicht nur in der Theorie der Ausgleichsrechnung eine Vorrangstellung ein, sie finden ebenfalls bei Regressionsproblemen sowie bei der Analyse von Zeitreihen (Glättung, Trendberechnung) Verwendung.

Die vorliegende Abhandlung befasst sich mit der Theorie der orthogonalen Polynome. Es schien mir von Interesse, zwei Fragen abzuklären. Einmal sollen die mathematischen Grundlagen über orthogonale Polynome systematisch bearbeitet werden. Dabei gilt es, wichtige Eigenschaften aufzudecken sowie wesentliche Beziehungen und wechselseitige Bindungen klarzustellen. Sodann ist darzutun, dass sich orthogonale Polynome ihrer theoretischen wie praktischen Eigenschaften wegen für die Ausgleichsrechnung gut eignen. Im Hinblick auf praktische Anwendungen wurde eine möglichst einfache numerische Auswertung erstrebt.

Orthogonale Polynome sind naturgemäss von der Argumentenfolge abhängig; stets ist darauf zu achten, ob kontinuierliche (stetig sich verändernde) oder diskrete (nur in gewissen Stellen definierte) Argumente vorliegen. Um eine Doppelspurigkeit in der Darstellung zu vermeiden, bediente ich mich des Stieltjesschen Integralbegriffes.

Der *erste Teil*, welcher der n-dimensionalen Betrachtungsweise gewidmet ist, enthält zunächst die grundlegenden Begriffe und Definitionen. Alsdann werden ein vollständiges Orthogonalsystem hergeleitet sowie notwendige und hinreichende Bedingungen für die Bestimmung der Koeffizienten der orthogonalen Polynome aufgestellt. Die Darstellung des Ausgleichspolynoms durch orthogonale Polynome schliesst diese Untersuchungen ab.

Im *zweiten und dritten Teil* erfolgt die Spezialisierung auf eine bzw. zwei unabhängige Veränderliche. Nach der Entwicklung einer allgemeinen Lösung (Determinanten-Methode) werden, den Bedürfnissen der Praxis Rechnung tragend, die Fälle kontinuierlicher und diskreter Argumente – letztere zusätzlich nach dem Gesichtspunkt äquidistant bzw. nicht äquidistant – getrennt behandelt.

Überdies wird auf Vereinfachungen zur numerischen Auswertung (Transformationen, Rekursionen, Tabellen) sowie auf zweckmässige Rechenschemas eingetreten.

Die Ausgleichsansätze mittels orthogonaler Polynome und die damit verbundenen Relationen wurden an einem Beispiel der flächenhaften Ausgleichung mehrerer Sterbetafeln erprobt. In verdankenswerter Weise stellte mir das Eidgenössische Statistische Amt für die neuesten Sterbetafeln SM 1941/50 und 1948/53 die Grundzahlen vorzeitig zur Verfügung.

1 Allgemeines

11 Grundsätzliches und Definition des Stieltjes-Integrals

Wir beschränken uns durchwegs auf den n-dimensionalen euklidischen Raum R_n und betrachten darin einen Bereich B. Darunter verstehen wir ein abgeschlossenes und beschränktes Gebiet [3] [1]).

Ordnet man jedem Punkt $x \in B$ nach irgendeinem Gesetz eine beschränkte Umgebung $U(x)$ zu, dann lassen sich nach dem Überdeckungssatz von Heine-Borel [3] stets endlich viele Punkte $x_i \in B, (i = 1, 2, \ldots, l)$ derart auswählen, dass $B \subset \bigcup_{i=1}^{l} U(x_i)$ ist. Nun verlangen wir, dass die Umgebungen $U(x_i)$ zu einem Mengenkörper $\mathfrak{M}$ gehören sollen, d.h. aus

[1]) Zahlen in eckigen Klammern [ ] bezeichnen die betreffende Nummer im Literaturverzeichnis auf den Seiten 124 ff.

$U, V \in \mathfrak{M}$ folgt: $\quad U \cup V \in \mathfrak{M}$ (Summe),

$U \cap V \in \mathfrak{M}$ (Durchschnitt),

$U - V \in \mathfrak{M}$ (Differenz) [1]).

Offensichtlich kann $\bigcup_{i=1}^{l} U(x_i)$ in endlich viele, paarweise disjunkte Mengen $X_1, X_2, \ldots, X_m \in \mathfrak{M}$ zerlegt werden, sodass jede Menge $U(x_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, l)$, Vereinigungsmenge von gewissen unter den X_μ ist. Dabei heissen zwei Mengen X_μ und X_ν disjunkt, falls sie keinen gemeinsamen Punkt besitzen; d. h. falls $X_\mu \cap X_\nu = 0$ ist [2]).

Der Abstand zweier Punkte $x_1, x_2 \in X$ ist im R_n definiert als $d(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (x_{1,\nu} - x_{2,\nu})^2}$, wenn $x_{1,\nu}$ bzw. $x_{2,\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ die Koordinaten des Punktes x_1 bzw. x_2 sind.

Dann versteht man unter dem Durchmesser $\delta[X]$ einer beschränkten Menge X das Supremum der Abstände zweier Punkte $x_1, x_2 \in X$:

$$\delta[X] = \operatorname*{Sup}_{x_1, x_2 \in X} d(x_1, x_2).$$

Aus $\delta[U(x)] < D$ mit $D > 0$, reell, folgt natürlich auch $\delta[X_\mu] < D$ für alle $X_\mu \in U(x)$.

Wir nennen ein System von endlich vielen, paarweise disjunkten Punktmengen $X_1, X_2, \ldots, X_m \in \mathfrak{M}$ dann eine Überdeckung Z von B, wenn

$$B \subset \bigcup_{\mu=1}^{m} X_\mu$$

ist, mit $X_\mu \cap B \neq 0$ für alle $\mu = 1, 2, \ldots, m$.

Zur Charakterisierung eines solchen Mengensystems führen wir das Feinheitsmass der Überdeckung Z von B ein:

$$\delta[Z] = \operatorname*{Max}_{\mu = 1, 2, \ldots, m} \delta[X_\mu].$$

Eine Überdeckung Z^* heisst feiner als Z, wenn jede Menge $X_{\mu,\nu} \in \mathfrak{M}$ von Z^* Teilmenge einer Menge X_μ von Z ist, für alle $\mu = 1, 2, \ldots, m$; $\nu = 1, 2, \ldots, n_\mu$. Insbesondere gilt dann $\delta[Z^*] \leqq \delta[Z]$.

---

[1]) Unter der Differenz $U - V$ verstehen wir die Menge derjenigen Punkte von U, die nicht zu V gehören: $U - V = U \cap C(V)$, wenn $C(V)$ die Komplementärmenge von V ist.

[2]) 0 bedeutet hier die leere Menge.

Schematisch dargestellt, besteht

$$\begin{array}{lcl} Z^* \text{ aus} & \text{und} & Z \text{ aus} \\ X_{1,1},\ X_{1,2},\ X_{1,3},\ \ldots,\ X_{1,n_1} & \subset & X_1 \\ X_{2,1},\ X_{2,2},\ X_{2,3},\ \ldots,\ X_{2,n_2} & \subset & X_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{m,1},\ X_{m,2},\ X_{m,3},\ \ldots,\ X_{m,n_m} & \subset & X_m. \end{array}$$

Wenn X_μ nicht ganz in B enthalten ist, bildet die Vereinigungsmenge $\bigcup_{\nu=1}^{n_\mu} X_{\mu,\nu}$ möglicherweise eine echte Untermenge von X_μ. Deshalb setzen wir $Y_\mu = X_\mu - \bigcup_{\nu=1}^{n_\mu} X_{\mu,\nu}$; dann wird

$$X_\mu = \left(\bigcup_{\nu=1}^{n_\mu} X_{\mu,\nu}\right) \cup Y_\mu, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Schliesslich nennt man eine für alle $X \in \mathfrak{M}$ definierte Funktion $F(X)$

a) additiv auf $\mathfrak{M}$, falls aus $X_1, X_2 \in \mathfrak{M}$ und aus $X_1 \cap X_2 = 0$ folgt:

$$F(X_1 \cup X_2) = F(X_1) + F(X_2),$$

b) von beschränkter Schwankung auf $\mathfrak{M}$, falls eine reelle Zahl M existiert, sodass aus

$$X_1, X_2, \ldots, X_m \in \mathfrak{M}, \quad X_\mu \cap X_\nu = 0, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, m),$$

folgt:

$$\sum_{\mu=1}^{m} |F(X_\mu)| \leqq M.$$

Damit sind die zur Einführung des *Riemann-Stieltjesschen* Integralbegriffes notwendigen Grundlagen zusammengestellt. Wir treffen nun die

Voraussetzungen:

1. B sei ein Bereich im euklidischen Raum R_n.

2. $\mathfrak{M}$ sei ein System von Punktmengen mit den folgenden Eigenschaften:

a) $\mathfrak{M}$ bilde einen Mengenkörper,

b) zu einem beliebigen Punkt $x \in B$ und gegebener reeller Zahl $D > 0$ existiere eine zu $\mathfrak{M}$ gehörige Umgebung $U(x)$ mit dem Durchmesser $\delta[U(x)] < D$.

Auf Grund der vorstehenden Überlegungen existieren endlich viele, paarweise disjunkte Punktmengen $X_1, X_2, \ldots, X_m \in \mathfrak{M}$, die eine Überdeckung Z von B bilden und deren Durchmesser $\delta[X_\mu] < D$ sind.

3. $F(X)$ sei eine für alle $X_\mu \in \mathfrak{M}$ definierte, reelle Funktion, die auf $\mathfrak{M}$ additiv und von beschränkter Schwankung ist.

Ferner sei folgende «Randbedingung» erfüllt [1]):

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine reelle Zahl $D_1 > 0$, sodass gilt:

Hat jede der (beliebigen) Mengen $X_1, X_2, \ldots, X_r$ einen Durchmesser $\delta[X] \leqq D_1$ und mindestens einen Punkt mit dem Rand von B gemeinsam, sind ferner die Mengen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r \in \mathfrak{M}$ paarweise disjunkt und ist $Y_\mu \subset X_\mu$, $(\mu = 1, 2, \ldots, r)$, dann wird $\sum_{\mu=1}^{r} |F(Y_\mu)| < \varepsilon$.

4. $\varphi(x)$ sei eine stetige Funktion des Punktes $x \in B$.

In jeder der Mengen X_μ wählen wir nun einen beliebigen Punkt $x_\mu \in (X_\mu \cap B)$ und bilden die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{m} \varphi(x_\mu) F(X_\mu).$$

Dann gilt folgender

Hauptsatz: Der Grenzwert

$$\lim_{D \to 0} \sum_{\mu=1}^{m} \varphi(x_\mu) F(X_\mu) = \int_B \varphi(x)\, dF \tag{1.1}$$

wird Stieltjes-Integral von $\varphi(x)$ bezüglich F über B genannt, existiert und ist von der Art der Überdeckung des Bereiches B durch die m disjunkten Punktmengen X_μ, wie auch von der Wahl der Punkte $x_\mu \in (X_\mu \cap B)$ unabhängig.

Existenz und Eindeutigkeit dieser Aussage wurden in der Originalarbeit [2]) bewiesen. Weitere theoretische und praktische Hinweise über Stieltjes-Integrale finden sich z.B. in den Untersuchungen von *M. Jacob* [1], *A. Loewy* [2], *S. Saks* [4], *H. Schärf* [5] und *J. F. Steffensen* [6].

---

[1]) Diese «Randbedingung» erübrigt sich, wenn B selber zum Mengenkörper $\mathfrak{M}$ gehört.

[2]) Das Manuskript liegt im mathematisch-versicherungswissenschaftlichen Seminar der Universität Bern auf.

12 Satz über orthogonale Funktionensysteme

Die allgemein gültige Aussage dieses Abschnittes werden wir später[1]) auf Polynome spezialisieren. Damit wird sich die Konstruktion der orthogonalen Polynome wesentlich vereinfachen lassen, indem wir weder auf das praktisch umständliche *Schmidtsche* Orthogonalisierungsverfahren, noch direkt auf die Orthogonalitätsbedingungen angewiesen sein werden (vgl. *W. Gröbner* [20]).

Voraussetzungen:

1. $\varphi_\lambda(x)$, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ seien im Bereich B definierte, reelle und stetige Funktionen des Punktes $x \in B$.

2. Die für den Bereich B, den Mengenkörper $\mathfrak{M}$ und die Funktion F auf den Seiten 58/59 aufgestellten Voraussetzungen 1. bis 3. seien erfüllt.

Dann existiert das Integral

$$\int_B \varphi_\lambda(x)\, \varphi_\mu(x)\, dF, \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Definition:

Das Funktionensystem $\{\varphi_\lambda(x)\}$, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ heisst bezüglich F im Bereich B orthogonal, wenn die Orthogonalitätsbedingungen

$$\int_B \varphi_\lambda(x)\, \varphi_\mu(x)\, dF \begin{cases} = 0, & \text{für } \lambda \neq \mu, \\ = \sigma_\lambda \neq 0, & \text{für } \lambda = \mu \end{cases} \quad \text{erfüllt sind.} \tag{1.2}$$

Behauptung:

Das Funktionensystem $\{\varphi_\lambda(x)\}$, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ ist im Bereich B dann und nur dann orthogonal, wenn das Integral

$$J_l = \int_B [c_0\, \varphi_0(x) + c_1\, \varphi_1(x) + \ldots + c_{l-1}\, \varphi_{l-1}(x) + \varphi_l(x)]^2\, dF \tag{1.3}$$

bei jedem Index l ein «Extremum»[2]) für $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_{l-1} = 0$ annimmt, und falls

$$\int_B [\varphi_\lambda(x)]^2\, dF \neq 0, \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots) \quad \text{ist.}$$

---

[1]) Abschnitt 13, Seite 63.

[2]) Unter «Extremum» wird hier lediglich die Bedingung verstanden, dass sämtliche ersten Ableitungen $\dfrac{\partial J_l}{\partial c_\lambda}$ verschwinden (1.4). Offen bleibt die Frage, ob es sich tatsächlich um ein Minimum oder Maximum im üblichen Sinne handelt; ihre Beantwortung hat in diesem Zusammenhang keine Bedeutung.

Beweis:

Soll das Integral J_l ein Extremum annehmen, müssen notwendigerweise dessen partielle Ableitungen nach den Koeffizienten c_λ für alle $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, (l-1)$ verschwinden; d. h.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J_l}{\partial c_\lambda} = \int_B [c_0 \varphi_0 \varphi_\lambda + c_1 \varphi_1 \varphi_\lambda + \ldots + c_{l-1} \varphi_{l-1} \varphi_\lambda + \varphi_l \varphi_\lambda]\, dF = 0. \tag{1.4}$$

a) Dann: Wir setzen voraus, das Integral J_l nehme für $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_{l-1} = 0$ ein Extremum an. Dann muss gleichzeitig die notwendige Bedingung (1.4) erfüllt sein. Diese reduziert sich auf $\int_B \varphi_l(x)\, \varphi_\lambda(x)\, dF = 0$ für jeden Index l und für jedes $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, (l-1)$; d.h. das Funktionensystem $\{\varphi_\lambda(x)\}$ ist orthogonal.

b) Nur dann: Ist das Funktionensystem $\{\varphi_\lambda(x)\}$ orthogonal, dann wird

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J_l}{\partial c_\lambda} = \sigma_\lambda c_\lambda, \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, l-1).$$

Dieser Ausdruck verschwindet wegen (1.4), wenn das Integral J_l ein Extremum annimmt. Da nach Voraussetzung $\sigma_\lambda \neq 0$ ist, folgt: $c_\lambda = 0$, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, l-1)$.

13 Konstruktion eines vollständigen Orthogonalsystems

Zuerst suchen wir ein vollständiges Polynomsystem, welches nachher so bestimmt wird, dass die Orthogonalitätsbedingungen (1.2) erfüllt sind.

Definition:

Ein linear unabhängiges Polynomsystem heisst vollständig, wenn jedes (beliebige) Polynom auf genau eine Weise als Linearkombination der Polynome dieses Systems dargestellt werden kann; d.h. wenn das System eine Basis des linearen Raumes aller Polynome ist.

Nun gibt es bei n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu jedem Grad λ so viele linear unabhängige Polynome, als voneinander verschiedene Potenzprodukte $x_1^{\nu_1} \cdot x_2^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\nu_n}$, mit $\sum_{i=1}^{n} \nu_i = \lambda$, vorkommen.

Wir denken uns alle Potenzprodukte geordnet und erhalten z. B. für $n = 1$ je ein (entartetes) Potenzprodukt λ-ten Grades ($\lambda = 0, 1, 2, \ldots$), nämlich $1;\ x_1;\ x_1^2;\ x_1^3;\ \ldots$, oder allgemein $\binom{\lambda}{\lambda}$ Potenzprodukte λ-ten Grades.

Ist $n = 2$, dann haben wir gemäss

$$1;\ x_1,\ x_2;\ x_1^2,\ x_1 x_2,\ x_2^2;\ x_1^3,\ x_1^2 x_2,\ x_1 x_2^2,\ x_2^3;\ \ldots$$

ein Potenzprodukt nullten Grades, zwei — ersten Grades, drei — zweiten Grades, usw., oder allgemein $\binom{\lambda+1}{\lambda}$ Potenzprodukte λ-ten Grades.

Durch Induktion findet man, dass es bei n unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ insgesamt

$$p_\lambda = \binom{n + (\lambda - 1)}{\lambda} \tag{1.5}$$

voneinander verschiedene Potenzprodukte λ-ten Grades und somit auch p_λ linear unabhängige Polynome λ-ten Grades gibt.

In der vorstehenden Anordnung bezeichnen wir mit

$$Q_{\nu,\varrho}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q_{\nu,\varrho}(x)\ ^{1)}$$

das ϱ-te Potenzprodukt ν-ten Grades, ($\nu = 0, 1, 2, \ldots;\ \varrho = 1, 2, \ldots, p_\nu$).

Bedeutet $\quad P_{\lambda,\mu}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P_{\lambda,\mu}(x)\ ^{1)}$

ein μ-tes linear unabhängiges Polynom λ-ten Grades ($\lambda = 0, 1, 2, \ldots;\ \mu = 1, 2, \ldots, p_\lambda$), welches nur die Potenzprodukte $Q_{\nu,\varrho}(x)$, ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda - 1;\ \varrho = 1, 2, \ldots, p_\nu$ und $\nu = \lambda;\ \varrho = 1, 2, \ldots, \mu$), und zwar das letzte mit dem Koeffizienten 1 enthält:

$$P_{\lambda,\mu}(x) = \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{\varrho=1}^{p_\nu} {}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho}\, Q_{\nu,\varrho}(x) + \sum_{\varrho=1}^{\mu} {}_{\lambda,\lambda}\alpha_{\mu,\varrho}\, Q_{\lambda,\varrho}(x), \text{ mit } {}_{\lambda,\lambda}\alpha_{\mu,\mu} = 1, \tag{1.6}$$

dann bilden diese Polynome

$$\{P_{\lambda,\mu}(x)\},\ (\lambda = 0, 1, 2, \ldots;\ \mu = 1, 2, \ldots, p_\lambda)$$

---

[1]) Um die Schreibweise nicht unnötig zu belasten, deuten wir die Abhängigkeit von den n unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ im folgenden nur durch $Q_{\nu,\varrho}(x)$ bzw. $P_{\lambda,\mu}(x)$ an.

ein vollständiges, linear unabhängiges System; denn unter den gemäss (1.6) definierten $P_{\lambda,\mu}(x)$ gibt es von jedem Grad λ genau so viele linear unabhängige Polynome als voneinander verschiedene Potenzprodukte dieses Grades vorkommen, sodass jedes (beliebige) Polynom eindeutig nach

$$P_{0,\mu}(x), P_{1,\mu}(x), P_{2,\mu}(x), \ldots, P_{\lambda,\mu}(x), \ldots \quad (\mu = 1, 2, \ldots, p_\lambda)$$

entwickelt werden kann.

Damit die nach (1.6) definierten Polynome

$$\{P_{\lambda,\mu}(x)\}, \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots; \ \mu = 1, 2, \ldots, p_\lambda)$$

ein vollständiges Orthogonalsystem bilden, müssen die Koeffizienten ${}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho}$ der betreffenden Polynome so bestimmt werden, dass nach (1.2) die Orthogonalitätsbedingungen

$$\int_B P_{\lambda,\mu}(x)\, P_{\bar\lambda,\bar\mu}(x)\, dF \begin{cases} = 0, & \text{für } \lambda \neq \bar\lambda \text{ oder } \mu \neq \bar\mu, \\ \neq 0, & \text{für } \lambda = \bar\lambda \text{ und } \mu = \bar\mu, \end{cases} \tag{1.7}$$

$(\lambda,\bar\lambda = 0, 1, 2, \ldots; \ \mu,\bar\mu = 1, 2, \ldots, p_\lambda$ bzw. $p_{\bar\lambda})$, erfüllt sind.

Nun erhält man aus der im Abschnitt 12 bewiesenen Aussage (1.3) über orthogonale Funktionensysteme durch Spezialisierung auf die Polynome $P_{\lambda,\mu}(x)$ den

Satz:

Das vollständige System der Polynome

$$\{P_{\lambda,\mu}(x)\}, \ (\lambda = 0, 1, 2, \ldots; \ \mu = 1, 2, \ldots, p_\lambda)$$

ist im Bereich B dann und nur dann orthogonal, wenn das Integral

$$J_{l,k} = \int_B \left[\sum_{\lambda=0}^{l-1} \sum_{\mu=1}^{p_\lambda} c_{\lambda,\mu} P_{\lambda,\mu}(x) + \sum_{\mu=1}^{k-1} c_{l,\mu} P_{l,\mu}(x) + P_{l,k}(x) \right]^2 dF \tag{1.8}$$

bei jedem Indexpaar (l,k) sein Extremum für $c_{\lambda,\mu} = 0$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, l-1; \ \mu = 1, 2, \ldots, p_\lambda$ und $\lambda = l; \ \mu = 1, 2, \ldots, k-1)$ annimmt.

Da sich dieser Satz zur Bestimmung der Koeffizienten ${}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho}$ nicht gut eignet, leiten wir aus ihm folgenden *neuen Satz* her:

Das vollständige System der Polynome

$$\{P_{\lambda,\mu}(x)\},\ (\lambda = 0, 1, 2, \ldots;\ \mu = 1, 2, \ldots, p_\lambda)$$

ist im Bereich B dann und nur dann orthogonal, falls gilt

$$\int_B [P_{\lambda,\mu}(x)]^2\, dF = \text{Extremum}, \tag{1.9}$$

mit der Nebenbedingung ${}_{\lambda,\lambda}\alpha_{\mu,\mu} = 1$ [1]).

Zum *Beweis* dieses neuen Satzes genügt es zu zeigen, dass die beiden Extremalprobleme (1.8) und (1.9) dieselbe Lösung besitzen.

$P_{l,k}(x)$ ist ein k-tes Polynom l-ten Grades mit dem höchsten Potenzprodukt $Q_{l,k}(x)$ und enthält nach (1.6) alle in den vorhergehenden Polynomen

$$P_{\lambda,\mu}(x),$$

$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, l-1;\ \mu = 1, 2, \ldots, p_\lambda$ und $\lambda = l;\ \mu = 1, 2, \ldots, k-1)$ auftretenden Potenzprodukte $Q_{\lambda,\mu}(x)$. $P_{l,k}(x)$ und

$$R_{l,k}(x) = \sum_{\lambda=0}^{l-1} \sum_{\mu=1}^{p_\lambda} c_{\lambda,\mu} P_{\lambda,\mu}(x) + \sum_{\mu=1}^{k-1} c_{l,\mu} P_{l,\mu}(x) + P_{l,k}(x)$$

unterscheiden sich demnach nur durch die den Potenzprodukten $Q_{\lambda,\mu}(x)$, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, l-1;\ \mu = 1, 2, \ldots, p_\lambda$ und $\lambda = l;\ \mu = 1, 2, \ldots, k-1)$ zugeordneten Koeffizienten.

Somit ist die Menge der Funktionen $R_{l,k}(x)$, welche dem Extremalproblem (1.8) zugrunde liegt, identisch mit der Menge der Polynome, die dem neuen Satz (1.9) entsprechen.

Da ausserdem für

$$c_{\lambda,\mu} = 0,$$

$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, l-1;\ \mu = 1, 2, \ldots, p_\lambda$ und $\lambda = l;\ \mu = 1, 2, \ldots, k-1)$

$$R_{l,k}(x) = P_{l,k}(x)$$

wird, folgt die Äquivalenz der beiden Extremalprobleme unmittelbar.

Wir wissen jetzt, dass mindestens ein vollständiges orthogonales Polynomsystem gemäss Ansatz (1.6) existiert, welches auf Grund des Extremalproblems (1.9) bestimmt werden kann. Es bedarf jetzt noch des Nachweises, dass genau *ein* solches vollständiges System existiert.

---

[1]) In Übereinstimmung mit (1.6) und zur Sicherstellung der Eindeutigkeit des orthogonalen Polynomsystems fordern wir ${}_{\lambda,\lambda}\alpha_{\mu,\mu} = 1$, trotzdem die Bedingung ${}_{\lambda,\lambda}\alpha_{\mu,\mu} \neq 0$ für den Beweis des neuen Satzes ausreichen würde.

Der lineare Raum aller Polynome sei mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet; dann spannen die orthogonalen Polynome

$$P_{0,1};\ P_{1,1},\ P_{1,2},\ \ldots,\ P_{1,p_1};\ P_{2,1},\ \ldots,\ P_{2,p_2};\ \ldots,\ P_{\lambda,\mu}$$

für jedes Indexpaar (λ,μ) einen Unterraum $\mathfrak{P}_{\lambda,\mu} \subset \mathfrak{P}$ auf, der dadurch entsteht, dass das Polynom $P_{\lambda,\mu}(x)$ an $\mathfrak{P}_{\lambda,\mu-1}$ bzw. an $\mathfrak{P}_{\lambda-1,p_{\lambda-1}}$ (für $\mu = 1$) adjungiert wird. Also ist $\mathfrak{P}_{\lambda,\mu-1}$ bzw. $\mathfrak{P}_{\lambda-1,p_{\lambda-1}}$ eine Hyperebene von $\mathfrak{P}_{\lambda,\mu}$. Auf dieser Hyperebene steht $P_{\lambda,\mu}(x)$ senkrecht, und daraus folgt, dass $P_{\lambda,\mu}(x)$ bis auf einen skalaren Faktor bestimmt ist, da ja alle $P_{\lambda,\mu}(x) \neq 0$ sind, wenn nur ${}_{\lambda,\lambda}\alpha_{\mu,\mu}$ nicht verschwindet.

Die Nebenbedingung, wonach der Koeffizient des letzten mitzuberücksichtigenden Potenzproduktes gleich eins sein müsse, legt auch diesen noch offenen Faktor fest (vgl. Fussnote, Seite 64). Damit ist das vollständige System der orthogonalen Polynome eindeutig bestimmt, sodass es keine Rolle spielt, wie die Koeffizienten ${}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho}$ von $P_{\lambda,\mu}(x)$ explizit ermittelt werden.

14 Darstellung der Ausgleichspolynome durch orthogonale Polynome

Nach Abschnitt 13 wissen wir, dass ein vollständiges und – unter Berücksichtigung der Nebenbedingung ${}_{\lambda,\lambda}\alpha_{\mu,\mu} = 1$ – eindeutig definiertes Orthogonalsystem $\{P_{\lambda,\mu}(x)\}$ existiert.

Da sich jedes beliebige Polynom als Linearkombination der Polynome irgendeines vollständigen Systems, insbesondere also der orthogonalen Polynome $P_{\lambda,\mu}(x)$ darstellen lässt, rechtfertigt sich für die Ausgleichspolynome der Ansatz

$$z_{l,k}(x) = \sum_{\lambda=0}^{l-1} \sum_{\mu=1}^{p_\lambda} a_{\lambda,\mu} P_{\lambda,\mu}(x) + \sum_{\mu=1}^{k} a_{l,\mu} P_{l,\mu}(x)\ ^{1)}. \tag{1.10}$$

Mit dieser Relation, wo *alle* orthogonalen Polynome in aufsteigender Reihenfolge der Grade $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, (l-1)$ und von den orthogonalen Polynomen l-ten Grades nur die k *ersten*, nämlich $P_{l,\mu}(x)$, $(\mu = 1, 2, \ldots k)$, berücksichtigt werden, kommt zum Ausdruck, dass für die Ausgleichspolynome l-ten Grades in Abhängigkeit von den $P_{\lambda,\mu}(x)$ insgesamt p_l Ansätze bestehen. Deshalb drängt sich auch hier eine doppelte Indizie-

[1]) Im Sinne der früher eingeführten vereinfachten Schreibweise wird die Abhängigkeit von den n unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lediglich durch $z_{l,k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z_{l,k}(x)$ bzw. $w(x_1, x_2, \ldots, x_n) = w(x)$ angedeutet.

rung auf: $z_{l,k}(x)$ bedeutet das k-te Ausgleichspolynom l-ten Grades ($k = 1, 2, \ldots, p_l$) in den n unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Zur Bestimmung der Koeffizienten $a_{\lambda,\mu}$ in (1.10) werden die Beobachtungswerte $w(x)$ nach der *Methode der kleinsten Quadrate* ausgeglichen.

$$\int_B [z_{l,k}(x) - w(x)]^2 \, dF = \int_B [u_{l,k}(x)]^2 \, dF = \text{Minimum}. \qquad (1.11)$$

Unter Berücksichtigung von (1.10) findet man wegen der notwendigen Minimalbedingung, d. h. durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen nach den $a_{\bar{\lambda},\bar{\mu}}$, ($\bar{\lambda} = 0, 1, 2, \ldots, l-1$; $\bar{\mu} = 1, 2, \ldots, p_{\bar{\lambda}}$ und $\bar{\lambda} = l$; $\bar{\mu} = 1, 2, \ldots, k$), die Gleichungen

$$\int_B P_{\bar{\lambda},\bar{\mu}}(x) \left[\sum_{\lambda=0}^{l-1} \sum_{\mu=1}^{p_\lambda} a_{\lambda,\mu} P_{\lambda,\mu}(x) + \sum_{\mu=1}^{k} a_{l,\mu} P_{l,\mu}(x) - w(x) \right] dF = 0. \qquad (1.12)$$

Infolge der Orthogonalitätsbedingungen (1.7) reduziert sich dieser Ausdruck auf

$$\int_B P_{\bar{\lambda},\bar{\mu}}(x) \left[a_{\bar{\lambda},\bar{\mu}} P_{\bar{\lambda},\bar{\mu}}(x) - w(x) \right] dF = 0,$$

woraus nach Vertauschung von $\bar{\lambda},\bar{\mu}$ mit λ,μ folgt:

$$a_{\lambda,\mu} = \frac{\int_B P_{\lambda,\mu}(x) \, w(x) \, dF}{\int_B [P_{\lambda,\mu}(x)]^2 \, dF}, \quad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, 2, \ldots, l \\ \mu = 1, 2, \ldots, p_\lambda \end{pmatrix}. \qquad (1.13)$$

Wie schon die Schreibweise $a_{\lambda,\mu}$ andeutet, sind diese Koeffizienten sowohl vom Grad l, als auch vom zweiten Index k des Ausgleichspolynoms $z_{l,k}(x)$ unabhängig und bleiben bei einer nachträglichen Änderung dieser Grössen invariant.

Ansatz (1.13) ist auch deshalb vorteilhaft, weil er direkt lösbar ist, eine Eigenschaft, die auf die Orthogonalitätsbedingungen zurückzuführen ist. Ohne diese müsste nämlich (1.12) nach den Koeffizienten $a_{\lambda,\mu}$ aufgelöst werden. Die Auflösung dieses linearen, inhomogenen Gleichungssystems wäre – wenn auch theoretisch sichergestellt – praktisch recht umständlich. Der zur Ermittlung der Koeffizienten erforderliche Rechenaufwand würde deshalb bedeutend grösser ausfallen als bei Benützung von (1.13). Überdies wären die Koeffizienten $a_{\lambda,\mu} = {}_{l,\lambda}a_{k,\mu}$ vom Grad l und vom zweiten Index k des Ausgleichspolynoms $z_{l,k}(x)$ abhängig und müssten bei allfälliger Änderung von l oder k vollständig neu berechnet werden.

2 Eindimensionale Betrachtungsweise

21 Grundsätzliches und Definition des Stieltjes-Integrals

Die bisher allgemein gehaltenen Ausführungen lassen sich wie folgt auf den Fall einer unabhängigen Variablen spezialisieren.

Der Bereich B reduziert sich auf ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall $I = [a \leqq x \leqq b]$.

Es genügt für unsere Zwecke, jenen Mengenkörper $\mathfrak{M}$ zu wählen, der von allen beschränkten Intervallen erzeugt wird ($\mathfrak{M}$ besteht dann aus allen Vereinigungsmengen von endlich vielen, beschränkten Intervallen).

Nun betrachten wir diejenigen Überdeckungen Z von B, bei denen die paarweise disjunkten Intervalle $X_1, X_2, \ldots, X_m \in \mathfrak{M}$ links offene, rechts abgeschlossene, beschränkte Intervalle sind (mit Ausnahme von X_1, das auch links abgeschlossen ist), für welche $\bigcup_{\mu=1}^{m} X_\mu = B$ ist [1]. Die zu einer solchen Überdeckung Z gehörenden Intervalle X_μ seien in der Reihenfolge $\mu = 1, 2, \ldots, m$ von a nach b auf I angeordnet, sodass

$$X_1 = [x_0, x_1] \text{ und } X_\mu = (x_{\mu-1}, x_\mu], \quad (\mu = 2, 3, \ldots, m),$$

mit

$$\delta[X_\mu] = d(x_\mu, x_{\mu-1}) = |x_\mu - x_{\mu-1}|,$$

gesetzt werden kann.

Dabei haben wir X_μ durch die entsprechenden Randpunkte $x_{\mu-1}$ und x_μ, $(a = x_0, x_1, \ldots, x_\mu, \ldots, x_{m-1}, x_m = b)$ gekennzeichnet, und mit der runden bzw. eckigen Klammer wird die Eigenschaft von X_μ, links offen bzw. rechts abgeschlossen zu sein, charakterisiert.

Neben der Funktion $F(X)$ definieren wir nun eine Funktion $F^*(x)$ der reellen Variablen x wie folgt:

$$F^*(x) = F[x_0 = a, x], \quad (a \leqq x \leqq b) \text{ [2]}.$$

Wegen der Additivität von F wird

$$F(X_\mu) = F[a, x_\mu] - F[a, x_{\mu-1}] = F^*(x_\mu) - F^*(x_{\mu-1});$$

d. h. F und F^* bestimmen einander eindeutig, sodass wir wie üblich F durchwegs durch F^* ersetzen können.

---

[1]) Da der Bereich B ein beschränktes Intervall I ist und deshalb selbst zu $\mathfrak{M}$ gehört, tritt hier das Gleichheitszeichen auf (vgl. Fussnote, Seite 59).

[2]) Für $x = a$ besteht $[x_0 = a, x]$ aus dem Punkt a allein und gehört somit ebenfalls zu $\mathfrak{M}$. Also ist $F[x_0 = a, a]$ und damit $F^*(a)$ auch definiert.

Die Funktion $F^*(x)$ heisst von beschränkter Schwankung auf $\mathfrak{M}$, wenn für beliebige $a = x_0 \leqq x_1 \leqq \ldots \leqq x_m = b$ gilt:

$$\sum_{\mu=1}^{m} |F^*(x_\mu) - F^*(x_{\mu-1})| \leqq M.$$

Schliesslich nimmt die Definition des Stieltjesschen Integrals einer auf I definierten, stetigen Funktion $\varphi(x)$ mit der neuen Bezeichnung folgende Gestalt an:

$$\int_I \varphi(x)\, dF(x) = \int_a^b \varphi(x)\, dF = \lim_{D \to 0} \sum_{\mu=1}^{m} \varphi(\xi_\mu)\, [F(x_\mu) - F(x_{\mu-1})]\ ^{1)}. \quad (2.1)$$

Dieser Grenzwert existiert und ist von der Art der Überdeckung Z des Intervalles $I = [a \leqq x \leqq b]$ durch die m-Intervalle $X_\mu \in \mathfrak{M}$, wie auch von der Wahl der Zwischenwerte $(x_{\mu-1} < \xi_\mu \leqq x_\mu]$ unabhängig.

Ohne auf die weiteren Überlegungen des ersten Kapitels einzutreten, die nur eine spezialisierte Wiederholung des allgemeinen Falles wären, seien doch folgende Tatbestände erwähnt.

1. Die Definition der Polynome $P_{\lambda,\mu}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reduziert sich nach (1.6) auf den Ansatz:

$$P_\lambda(x) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} {}_{\lambda,\nu}\alpha\, Q_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} \alpha_{\lambda,\mu}\, x^\mu + x^\lambda \quad (2.2)$$

mit $\alpha_{\lambda,\lambda} = 1$; denn es gibt jetzt von jedem Grad λ nur noch $p_\lambda = \binom{\lambda}{\lambda} = 1$ Potenzprodukt $Q_\lambda(x) = x^\lambda$ und somit auch nur je *ein* linear unabhängiges, orthogonales Polynom $P_\lambda(x)$, weshalb auf zusätzliche Indizes verzichtet werden kann.

$\alpha_{\lambda,\mu}$ stellt also für das Polynom λ-ten Grades den Koeffizienten des zur μ-ten Potenz von x entarteten Potenzproduktes $Q_\mu(x) = x^\mu$ dar.

2. Alle auftretenden Integrale existieren.

Wenn das System der Polynome $\{P_\lambda(x)\}$, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ orthogonal ist, müssen nach (1.7) die Orthogonalitätsbedingungen

$$\int_a^b P_\lambda(x)\, P_\mu(x)\, dF \begin{cases} = 0, & \text{für } \lambda \neq \mu, \\ \neq 0, & \text{für } \lambda = \mu, \end{cases} \quad (2.3)$$

$(\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots)$ erfüllt sein.

---

[1]) Wir lassen den Stern * bei F^* wieder weg, fassen jedoch F, wie allgemein gebräuchlich, weiterhin als Funktion der reellen Variablen x auf.

3. Die Polynome $P_\lambda(x)$, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem, wenn die Koeffizienten $\alpha_{\lambda,\mu}$ in (2.2) so bestimmt werden, dass nach (1.9) gilt:

$$\int_a^b [P_\lambda(x)]^2 \, dF = \text{Extremum}, \tag{2.4}$$

mit der Nebenbedingung $\alpha_{\lambda,\lambda} = 1$, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$. Die nach dieser Vorschrift konstruierten Orthogonalpolynome sind damit eindeutig definiert.

4. Auch zur Darstellung eines beliebigen Ausgleichspolynoms als Linearkombination orthogonaler Polynome beziehen wir uns auf die früher gefundenen Erkenntnisse.

Nach (1.10) ergibt sich

$$z_l(x) = \sum_{\lambda=0}^{l} a_\lambda P_\lambda(x), \quad (l = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.5}$$

wenn die Polynome $P_\lambda(x)$ ein vollständiges Orthogonalsystem bilden. Die noch unbekannten Koeffizienten a_λ können dann gemäss (1.13) mit der Beziehung

$$a_\lambda = \frac{\int_a^b P_\lambda(x) \, w(x) \, dF}{\int_a^b [P_\lambda(x)]^2 \, dF}, \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, l) \tag{2.6}$$

ermittelt werden, falls die Beobachtungswerte $w(x)$ wieder nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen werden.

22 Determinanten-Methode

Zur Bestimmung der Koeffizienten $\alpha_{\lambda,\mu}$ der Polynome $P_\lambda(x)$ greifen wir auf (2.4) und fordern

$$\int_a^b \left[\sum_{\mu=0}^{\lambda} \alpha_{\lambda,\mu} \, x^\mu \right]^2 dF = \text{Extremum}.$$

Wird der quadratische Ausdruck entwickelt, dann ergibt sich unter Berücksichtigung der Abkürzung

$$C_{\mu+\nu} = \int_a^b x^{\mu+\nu}\, dF \tag{2.7}$$

das Extremalproblem

$$\sum_{\mu=0}^{\lambda} \sum_{\nu=0}^{\lambda} C_{\mu+\nu}\, \alpha_{\lambda,\mu}\, \alpha_{\lambda,\nu} = \text{Extremum}, \quad (\alpha_{\lambda,\lambda} = 1).$$

Damit dieser Ausdruck extremal wird, müssen die partiellen Ableitungen nach den unbekannten Grössen $\alpha_{\lambda,\mu}$ verschwinden und wir finden das aus λ Gleichungen bestehende lineare, inhomogene Gleichungssystem

$$\sum_{\mu=0}^{\lambda-1} C_{\mu+l}\, \alpha_{\lambda,\mu} = -C_{\lambda+l}, \quad (l = 0, 1, 2, \ldots, \lambda-1) \tag{2.8}$$

zur Bestimmung der λ unbekannten Koeffizienten $\alpha_{\lambda,\mu}$. Falls die aus der linken Seite des Gleichungssystems (2.8) gebildete Koeffizientendeterminante D_λ von Null verschieden ist, existiert eine und nur eine Lösung.

Diese lautet

$$\alpha_{\lambda,\mu} = \frac{D_\lambda(\mu)}{D_\lambda}. \tag{2.9}$$

Dabei ergibt sich $D_\lambda(\mu)$ aus D_λ, indem die μ-te Spalte der Determinante D_λ durch die Grössen auf der rechten Seite des Gleichungssystems (2.8) ersetzt wird.

Die eindeutig bestimmten orthogonalen Polynome sind nun in der Gestalt

$$P_\lambda(x) = \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} \frac{D_\lambda(\mu)}{D_\lambda}\, x^\mu + x^\lambda, \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.10}$$

darstellbar.

23 Beziehungen und Ansätze für die praktische Anwendung

Die Abkürzung (2.7) gestattet, sowohl den Fall kontinuierlicher wie auch jenen diskreter Argumente zusammenzufassen und eine allgemeingültige Lösung zu geben.

In diesem Abschnitt werden wir nun auf die wichtigsten Probleme bei der Anwendung orthogonaler Polynome, wie sie sich in der Praxis stellen, näher eintreten. Gleichzeitig sollen gewisse Beziehungen zu anderweitig bekannten Ergebnissen hergeleitet werden.

231 Kontinuierliche Argumente

Handelt es sich um eine Ausgleichung nach einer stetigen Gewichtsfunktion $g(x)$, so kann das Stieltjes-Integral (2.1)

$$\int_a^b \varphi(x)\, dF = \int_a^b g(x)\, \varphi(x)\, dx$$

gesetzt werden, falls $F(x) = \int_a^x g(\xi)\, d\xi$ ist.

231.1 Orthogonale Polynome

Nach dieser Anpassung des Stieltjes-Integrals an die kontinuierlichen Argumente bedienen wir uns des im Abschnitt 22 dargelegten Verfahrens zur Herleitung der orthogonalen Polynome. Aus (2.7) folgt dann:

$$C_\mu = \int_a^b x^\mu\, g(x)\, dx, \text{ falls } g(x) \text{ in } [a \leqq x \leqq b] \text{ stetig ist.}$$

Kann auf eine Gewichtsfunktion $g(x)$ verzichtet werden, setzt man $g(x) \equiv 1$. Dann stellt (2.7) das gewöhnliche *Riemannsche* Integral der μ-ten Potenz von x dar:

$$C_\mu = \int_a^b x^\mu\, dx = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu + 1}. \tag{2.11}$$

Diese Werte sind in die Determinanten der Gleichung (2.9) einzusetzen und führen dann auf die Lösungen (2.13).

Erwünscht ist aber eine allgemeine, formelmässige Darstellung der Koeffizienten $\alpha_{\lambda,\mu}$ und damit auch der Polynome $P_\lambda(x)$. Da sich die Determinanten-Methode hierzu nicht gut eignet, lösen wir das Extremalproblem (2.4) nach *W. Gröbner* [20] mit Hilfe der Variationsrechnung und finden

$$P_\lambda(x) = \frac{\lambda!}{(2\lambda)!} \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \left[(x-a)^\lambda (x-b)^\lambda\right]. \tag{2.12}$$

Nach einigen Umformungen gewinnt man für diese verallgemeinerten *Legendre*-Polynome die Beziehung

$$P_\lambda(x) = \sum_{\mu=0}^{\lambda} \left\{ \frac{(-1)^{\lambda-\mu}}{\binom{2\lambda}{\lambda}} \sum_{\nu=\mu}^{\lambda} \binom{2\nu}{\nu} \binom{\lambda+\nu}{\lambda-\nu} \binom{\nu}{\nu-\mu} a^{\nu-\mu} (b-a)^{\lambda-\nu} \right\} x^\mu, \tag{2.12'}$$

wobei die geschweifte Klammer den Koeffizienten $\alpha_{\lambda,\mu}$ entspricht.

Wertetabelle:

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= -\tfrac{1}{2}(a+b) + x \\
P_2(x) &= \tfrac{1}{6}(a^2+4ab+b^2) - (a+b)\,x + x^2 \\
P_3(x) &= -\tfrac{1}{20}(a^3+9a^2b+9ab^2+b^3) + \tfrac{3}{5}(a^2+3ab+b^2)\,x \\
&\quad -\tfrac{3}{2}(a+b)\,x^2 + x^3 \\
P_4(x) &= \tfrac{1}{70}(a^4+16a^3b+36a^2b^2+16ab^3+b^4) \\
&\quad -\tfrac{2}{7}(a^3+6a^2b+6ab^2+b^3)\,x + \tfrac{3}{7}(3a^2+8ab+3b^2)\,x^2 \\
&\quad -2(a+b)\,x^3 + x^4 \\
P_5(x) &= -\tfrac{1}{252}(a^5+25a^4b+100a^3b^2+100a^2b^3+25ab^4+b^5) \\
&\quad +\tfrac{5}{42}(a^4+10a^3b+20a^2b^2+10ab^3+b^4)\,x \\
&\quad -\tfrac{5}{6}(a^3+5a^2b+5ab^2+b^3)\,x^2 + \tfrac{10}{9}(2a^2+5ab+2b^2)\,x^3 \\
&\quad -\tfrac{5}{2}(a+b)\,x^4 + x^5 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Zufolge der Normierungsbedingung $\alpha_{\lambda,\lambda} = 1$ ist die Eindeutigkeit der auf diese Weise ermittelten orthogonalen Polynome sichergestellt (vgl. auch Seite 65). Somit spielt es keine Rolle, ob die Koeffizienten $\alpha_{\lambda,\mu}$ nach der Determinanten-Methode (2.9) oder nach der Formel (2.12′) ermittelt werden.

Durch die Setzung $a = -b = 1$ gewinnt man aus (2.12)

$$P_\lambda(x) = \frac{\lambda!}{(2\lambda)!}\,\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left[(x^2-1)^\lambda\right]. \tag{2.14}$$

Das ist – abgesehen von einem konstanten Faktor – die bekannte Formel von *Rodrigues* für die *Legendre*-Polynome

$${}_LP_\lambda(x) = \frac{1}{2^\lambda \lambda!}\,\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left[(x^2-1)^\lambda\right], \tag{2.15}$$

welche u. a. von *W. Schöb* [38] zur Lösung von Ausgleichsproblemen verwendet wurde.

Geht man, um einen Vergleich mit der allgemeinen Theorie der Orthogonalpolynome anzustellen, von der erweiterten Definitionsbeziehung (2.12)

$$H_\lambda(x) = \frac{1}{g(x)} \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} [g(x) f^\lambda(x)], \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.16}$$

aus, dann gilt nach *F. G. Tricomi* [40] folgender *Satz:*

Die Funktion $H_\lambda(x)$, gebildet mit

$$f(x) = \begin{cases} (b-x)(x-a), & \text{für } |a| < \infty, \ |b| < \infty, \\ x-a, & \text{für } |a| < \infty, \ b = \infty, \\ 1, & \text{für } -a = b = \infty, \end{cases}$$

und einer Belegungsfunktion $g(x)$ im Intervall $[a,b]$, ist dann und nur dann ein Polynom vom Grad λ in $f(x)$, wenn $g(x)$, abgesehen von multiplikativen Konstanten oder einfachen Abszissentransformationen, gegeben ist durch

$$g(x) = \begin{cases} (b-x)^\beta (x-a)^\gamma, & \text{mit } \beta > -1, \gamma > -1 \ \text{für } |a| < \infty, \ |b| < \infty, \\ e^{-x}(x-a)^\beta, & \text{mit } \beta > -1 \ \text{für } |a| < \infty, \ b = \infty, \\ e^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{für } -a = b = \infty. \end{cases}$$

Ist dies der Fall, so sind die Polynome $H_\lambda(x)$ bezüglich der Belegungsfunktion $g(x)$ orthogonal.

Durch entsprechende Wahl der Parameter findet man aus $H_\lambda(x)$ die bekannten «klassischen orthogonalen Polynome», insbesondere jene von *Jacobi* für $-a = b = 1$; $f(x) = (1-x)(1+x)$, $g(x) = (1-x)^\beta (1+x)^\gamma$, und daraus die weiteren Spezialfälle, die nach

Gegenbauer (oder ultrasphärisch) für $\beta = \gamma$,
Tschebyscheff (im engern Sinne) für $\beta = \gamma = \pm \frac{1}{2}$ und
Legendre für $\beta = \gamma = 0$

benannt werden. Ferner erhält man die Polynome von

Laguerre für $a = 0$, $b = \infty$; $f(x) = x$, $g(x) = e^{-x} x^\beta$

und jene von

Hermite für $-a = b = \infty$; $f(x) = 1$, $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

231.2 Ausgleichsansätze

Die Ausgleichung der Beobachtungswerte $w(x)$ bietet nun für kontinuierliche Argumente keine weiteren Schwierigkeiten. Nach (2.5) lässt sich jedes Polynom als Linearkombination der $P_\lambda(x)$ darstellen und die Koeffizienten a_λ lauten nach (2.6)

$$a_\lambda = \frac{\int_a^b P_\lambda(x)\, w(x)\, dx}{\int_a^b [P_\lambda(x)]^2\, dx}, \tag{2.17}$$

wenn die stetige Gewichtsfunktion $g(x)$ vernachlässigt werden kann.

232 Diskrete Argumente

Wenn die unabhängige Variable nur der endlich vielen, diskreten Werte x_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ mit $a = x_1 \leqq x_i \leqq x_m = b$ fähig ist, gilt nach (2.1)

$$\int_a^b \varphi(x)\, dF = \lim_{D \to 0} \sum_{\mu=1}^{m} \varphi(\xi_\mu)\, [F(x_\mu) - F(x_{\mu-1})] = \sum_{i=1}^{m} \varphi(x_i)\, [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Sobald nämlich das Feinheitsmass $\delta[Z] \leqq |x_i - x_{i-1}| < D$ wird, ergibt die Summation keinen zusätzlichen Beitrag mehr bei einer weiteren Verfeinerung; denn

$$F(x_\mu) - F(x_{\mu-1}) = 0, \text{ für } x_{i-1} < x_{\mu-1} \leqq x_\mu \leqq x_i.$$

Weil nur die diskreten Argumente x_i definiert sind, lassen wir die Zwischenwerte $x_{i-1} < \xi_i \leqq x_i$ mit x_i zusammenfallen und setzen, um auch hier den Zusammenhang mit den früheren Ausführungen zu wahren,

$$F(x) = \sum_{x_i \leqq x} g(x_i), \quad (a \leqq x_i \leqq x \leqq b). \tag{2.18}$$

Damit ist $F(x_i) - F(x_{i-1}) = g(x_i)$, und für jede stetige Funktion $\varphi(x)$ gilt:

$$\int_a^b \varphi(x)\, dF = \sum_{i=1}^{m} \varphi(x_i)\, g(x_i), \quad (a = x_1 \leqq x_i \leqq x_m = b).$$

Auch für diskrete Argumente wollen wir den Fall $g(x) \equiv 1$ näher betrachten und finden

$$\int_a^b \varphi(x)\, dF = \sum_{i=1}^{m} \varphi(x_i)\,.$$

Was die weitere Behandlung anbetrifft, so nehmen wir – entsprechend den Bedürfnissen der Praxis – eine Zweiteilung vor. Unterschieden werden die beiden Fälle «nicht äquidistanter» und «äquidistanter» Argumente.

232.1 Diskrete, nicht äquidistante Argumente

Wir setzen voraus, die auszugleichenden Beobachtungswerte $w(x_i)$ seien in unregelmässigen Abständen entsprechend den Argumenten

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_m = b \quad \text{gegeben.}$$

Unter Berücksichtigung der im Abschnitt 22 dargelegten Methode werden wir das Orthogonalsystem der Polynome $P_\lambda(x)$ nach (2.10) aufsuchen und gleichzeitig die Ansätze für die eigentliche Ausgleichung herleiten. Wegen der Unbestimmtheit der Argumente x_i wird sich die gesuchte formelmässige Darstellung einerseits auf rekursive Beziehungen beschränken müssen, anderseits werden die darauf gegründeten Aussagen sehr allgemein sein, sodass sie für alle möglichen – also für kontinuierliche [1]) wie auch für diskrete – Argumentfolgen gelten.

232.11 Orthogonale Polynome

Aus (2.7) folgt wegen (2.18)

$$C_\mu = \sum_{a \leq x_i \leq b} x_i^\mu\, g(x_i) = \sum_x x^\mu\, g(x) \tag{2.19}$$

oder, falls $g(x) \equiv 1$ ist:

$$C_\mu = \sum_x x^\mu. \tag{2.19'}$$

Nun erweitern wir die Definition der Abkürzung (2.7) auf

$$C_{\lambda,\mu} = \sum_x x^\lambda P_\mu(x), \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda). \tag{2.20}$$

Für $\mu = 0$ wird $P_0(x) \equiv 1$ und $C_{\lambda,0}$ stimmt wieder mit C_λ nach (2.19′) überein.

---

[1]) Bei kontinuierlichen Argumenten wäre die Summation $\sum_x$ durch das Integral $\int_a^b \ldots dx$ zu ersetzen.

So wie sich jedes beliebige Polynom nach den Polynomen des vollständigen Orthogonalsystems entwickeln lässt, kann auch jede Potenz x^λ als Linearkombination der orthogonalen Polynome dargestellt werden; d. h.

$$x^\lambda = \sum_{\mu=0}^{\lambda} A_{\lambda,\mu} P_\mu(x), \text{ mit } A_{\lambda,\lambda} = 1, \ (\lambda = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.21}$$

Daraus gewinnt man

$$P_\lambda(x) = -\sum_{\mu=0}^{\lambda-1} A_{\lambda,\mu} P_\mu(x) + x^\lambda, \tag{2.22}$$

und das ist bereits eine erste Rekursionsbeziehung in den orthogonalen Polynomen selbst. Die neu auftretenden Koeffizienten $A_{\lambda,\mu}$ bestimmen sich unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelationen

$$\sum_x P_\lambda(x) P_\mu(x) \begin{cases} = 0, \text{ für } \lambda \neq \mu, \\ \neq 0, \text{ für } \lambda = \mu, \end{cases} \tag{2.23}$$

aus (2.21) nach Erweiterung mit $P_\nu(x)$ und nach Summation über alle vorkommenden Argumente zu

$$A_{\lambda,\mu} = \frac{\sum_x x^\lambda P_\mu(x)}{\sum_x [P_\mu(x)]^2} = \frac{C_{\lambda,\mu}}{C_{\mu,\mu}}, \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda). \tag{2.24}$$

Damit können die $A_{\lambda,\mu}$ durch die Grössen $C_{\lambda,\mu}$ ausgedrückt werden, welche ihrerseits der Rekursionsgleichung

$$C_{\lambda,\mu} = C_{\lambda+\mu,0} - \sum_{\nu=0}^{\mu-1} A_{\mu,\nu} C_{\lambda,\nu}, \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda-1), \tag{2.25}$$

genügen.

Anderseits bestehen auch für die Koeffizienten $\alpha_{\lambda,\mu}$ im allgemeinen Ansatz $P_\lambda(x)$ einfache Rekursionsbeziehungen. Das Gleichsetzen von (2.2) mit (2.22) führt durch Koeffizientenvergleich auf

$$\alpha_{\lambda,\mu} = -\sum_{\nu=\mu}^{\lambda-1} A_{\lambda,\nu} \alpha_{\nu,\mu}, \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda-1), \tag{2.26}$$
$$\text{mit } \alpha_{\lambda,\lambda} = 1.$$

Die orthogonalen Polynome $P_\lambda(x)$ lassen sich also entweder nach (2.2) unter Mitberücksichtigung von (2.26) oder nach (2.22) mit (2.24) und (2.25) ermitteln. Beide Rekursionsverfahren sind gleichwertig und setzen nur die Kenntnis der Nullmomente $C_{\nu,0}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, 2\lambda)$, voraus.

232.12 Ausgleichsansätze

Für die Koeffizienten a_λ im Ausgleichspolynom (2.5) fanden wir die Bestimmungsgleichungen (2.6) oder

$$a_\lambda = \frac{\sum\limits_x P_\lambda(x)\, w(x)}{\sum\limits_x [P_\lambda(x)]^2} = \frac{M_\lambda^*}{C_{\lambda,\lambda}}, \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, l). \tag{2.27}$$

Die verwendete Abkürzung

$$M_\lambda^* = \sum_x P_\lambda(x)\, w(x) \tag{2.28}$$

erweist sich als vorteilhaft; denn sie kann mit (2.22) aus den als bekannt vorausgesetzten Grössen

$$M_\lambda = \sum_x x^\lambda\, w(x) \tag{2.29}$$

rekursiv hergeleitet werden gemäss

$$M_\lambda^* = M_\lambda - \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} A_{\lambda,\mu}\, M_\mu^*. \tag{2.30}$$

Ist schliesslich das Ausgleichspolynom $z_l(x)$ in der Potenzreihenform

$$z_l(x) = \sum_{\lambda=0}^{l} b_{l,\lambda}\, x^\lambda \tag{2.31}$$

gesucht, dann ergibt sich durch Gleichsetzen von (2.5) mit (2.31) und durch Koeffizientenvergleich der geordneten Potenzen von x die Beziehung

$$b_{l,\lambda} = \sum_{\mu=\lambda}^{l} a_\mu\, \alpha_{\mu,\lambda}. \tag{2.32}$$

232.13 Schema der numerischen Auswertung

Es gelingt uns jetzt, alle wünschenswerten Unterlagen für das Aufsuchen des Ausgleichspolynoms $z_l(x)$ zu beschaffen, wenn nur die Nullmomente $C_{\lambda+\mu,0}$ für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, l$; $\mu = 0, 1, 2, \ldots, l$ nach (2.20) und die Grundgrössen M_λ, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, l)$ nach (2.29) gegeben sind.

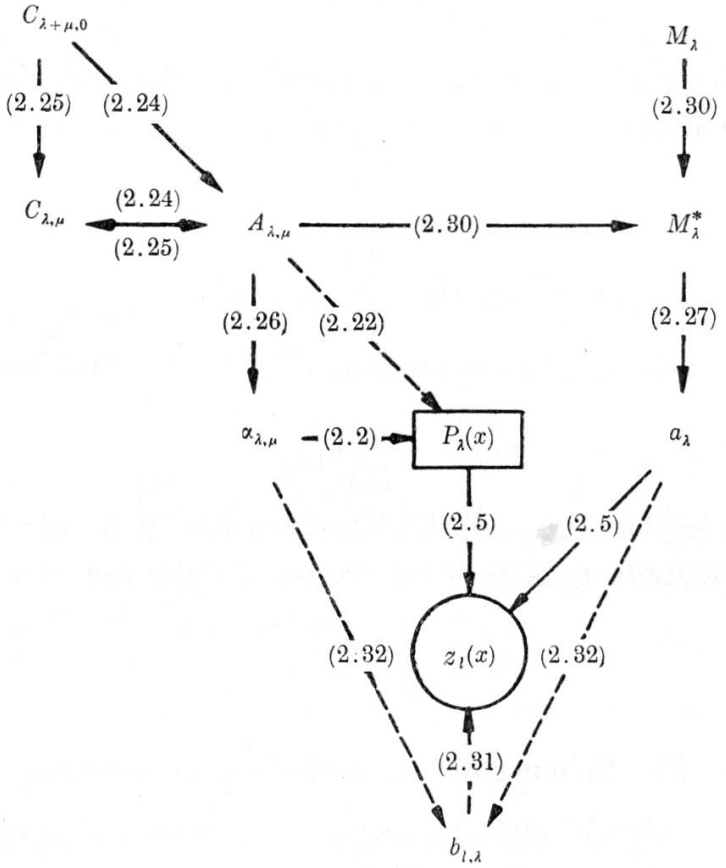
P.G.Guest hat in seinen Veröffentlichungen [22–24] mehrmals auf die Vereinfachungen hingewiesen, die mit der vorstehenden Rekursionsmethode erzielt werden können, wenn für die praktischen Berechnungen ein verallgemeinertes *Doolittle*-Schema benützt wird [15] [1]).

---

[1]) Zwischen diesem «Rekursionsverfahren» und der Matrizen-Inversion bzw. der Auflösungsmethode von Doolittle für Gleichungssysteme besteht eine enge Bindung. Ist nämlich die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems

Danach berechnet man (vgl. Schema I) mit den $C_{\lambda+\mu,0}$ nach (2.24) die $A_{\lambda,\mu}$ und nach (2.25) die $C_{\lambda,\mu}$. Gemäss (2.22) oder mit den $\alpha_{\lambda,\mu}$ nach (2.2) und (2.26) ergeben sich die orthogonalen Polynome $P_\lambda(x)$. Mit den M_λ bestimmt man nach (2.30) die M_λ^* sowie nach (2.27) die a_λ und daraus (sofern erforderlich) in Verbindung mit den $\alpha_{\lambda,\mu}$ nach (2.32) die $b_{l,\lambda}$. Das Ausgleichspolynom $z_l(x)$ erhält man schliesslich aus den a_λ in Verbindung mit den $P_\lambda(x)$ nach (2.5) oder aus den $b_{l,\lambda}$ nach (2.31).

Schema I



Schema II zeigt das Vorgehen für eine Ausgleichung 4. Grades; es ist jedoch beliebig erweiterungsfähig. Die erste Vorspalte gibt die Operation an, die auf der betreffenden Zeile auszuführen ist. Damit diese Vorschriften besser verständlich sind, wurde jede Zeile numeriert (vgl. Vorspalte 2). Die zweitletzte Kolonne dient der Kontrolle, ob die Rechnungen richtig ausgeführt worden sind.

(2.8) wie in unserem Falle symmetrisch, dann lässt sich die dargelegte Rekursions-Methode immer mit Erfolg anwenden. Für weitere Angaben sei auf *S. Rushton* [37], *R. Zurmühl* [7] und auf *J. Wishart and T. Metakides* [44] verwiesen.

Schema II

	(1)	$C_{0,0}$	$C_{1,0}$	$C_{2,0}$	$C_{3,0}$	$C_{4,0}$		$M_0 = M_0^*$	S_1	$\sum_x w^2(x)$
$(1):C_{0,0}$	(2)	1	$A_{1,0}$	$A_{2,0}$	$A_{3,0}$	$A_{4,0}$		a_0	S_2	$-a_0 M_0^*$
	(3)		$C_{2,0}$	$C_{3,0}$	$C_{4,0}$	$C_{5,0}$		M_1	S_3	$\sum_x u_0^2(x)$
$(1)\cdot(-A_{1,0})$	(4)	$-A_{1,0}$	$-A_{1,0}\,C_{1,0}$	$-A_{1,0}\,C_{2,0}$	$-A_{1,0}\,C_{3,0}$	$-A_{1,0}\,C_{4,0}$		$-A_{1,0}\,M_0^*$	S_4	
$+$	(5)	$\alpha_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{2,1}$	$C_{3,1}$	$C_{4,1}$		M_1^*	S_5	
$(5):C_{1,1}$	(6)		1	$A_{2,1}$	$A_{3,1}$	$A_{4,1}$		a_1	S_6	$-a_1 M_1^*$
	(7)			$C_{4,0}$	$C_{5,0}$	$C_{6,0}$		M_2	S_7	$\sum_x u_1^2(x)$
$(1)\cdot(-A_{2,0})$	(8)	$-A_{2,0}$		$-A_{2,0}\,C_{2,0}$	$-A_{2,0}\,C_{3,0}$	$-A_{2,0}\,C_{4,0}$		$-A_{2,0}\,M_0^*$	S_8	
$(5)\cdot(-A_{2,1})$	(9)	$-A_{2,1}\,\alpha_{1,0}$	$-A_{2,1}$	$-A_{2,1}\,C_{2,1}$	$-A_{2,1}\,C_{3,1}$	$-A_{2,1}\,C_{4,1}$		$-A_{2,1}\,M_1^*$	S_9	
$+$	(10)	$\alpha_{2,0}$	$\alpha_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{3,2}$	$C_{4,2}$		M_2^*	S_{10}	
$(10):C_{2,2}$	(11)			1	$A_{3,2}$	$A_{4,2}$		a_2	S_{11}	$-a_2 M_2^*$
	(12)				$C_{6,0}$	$C_{7,0}$		M_3	S_{12}	$\sum_x u_2^2(x)$
$(1)\cdot(-A_{3,0})$	(13)	$-A_{3,0}$			$-A_{3,0}\,C_{3,0}$	$-A_{3,0}\,C_{4,0}$		$-A_{3,0}\,M_0^*$	S_{13}	
$(5)\cdot(-A_{3,1})$	(14)	$-A_{3,1}\,\alpha_{1,0}$	$-A_{3,1}$		$-A_{3,1}\,C_{3,1}$	$-A_{3,1}\,C_{4,1}$		$-A_{3,1}\,M_1^*$	S_{14}	
$(10)\cdot(-A_{3,2})$	(15)	$-A_{3,2}\,\alpha_{2,0}$	$-A_{3,2}\,\alpha_{2,1}$	$-A_{3,2}$	$-A_{3,2}\,C_{3,2}$	$-A_{3,2}\,C_{4,2}$		$-A_{3,2}\,M_2^*$	S_{15}	
$+$	(16)	$\alpha_{3,0}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{3,2}$	$C_{3,3}$	$C_{4,3}$		M_3^*	S_{16}	
$(16):C_{3,3}$	(17)				1	$A_{4,3}$		a_3	S_{17}	$-a_3 M_3^*$
	(18)					$C_{8,0}$		M_4	S_{18}	$\sum_x u_3^2(x)$
$(1)\cdot(-A_{4,0})$	(19)	$-A_{4,0}$				$-A_{4,0}\,C_{4,0}$		$-A_{4,0}\,M_0^*$	S_{19}	
$(5)\cdot(-A_{4,1})$	(20)	$-A_{4,1}\,\alpha_{1,0}$	$-A_{4,1}$			$-A_{4,1}\,C_{4,1}$		$-A_{4,1}\,M_1^*$	S_{20}	
$(10)\cdot(-A_{4,2})$	(21)	$-A_{4,2}\,\alpha_{2,0}$	$-A_{4,2}\,\alpha_{2,1}$	$-A_{4,2}$		$-A_{4,2}\,C_{4,2}$		$-A_{4,2}\,M_2^*$	S_{21}	
$(16)\cdot(-A_{4,3})$	(22)	$-A_{4,3}\,\alpha_{3,0}$	$-A_{4,3}\,\alpha_{3,1}$	$-A_{4,3}\,\alpha_{3,2}$	$-A_{4,3}$	$-A_{4,3}\,C_{4,3}$		$-A_{4,3}\,M_3^*$	S_{22}	
$+$	(23)	$\alpha_{4,0}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{4,2}$	$\alpha_{4,3}$	$C_{4,4}$		M_4^*	S_{23}	
$(23):C_{4,4}$	(24)					1		a_4	S_{24}	$-a_4 M_4^*$
										$\sum_x u_4^2(x)$

Das Feld in der linken unteren Hälfte von Schema II bleibt im *Doolittle*-Schema gewöhnlich leer, da dort die Nullrelationen stehen würden. Es ist jedoch vorteilhaft, darin nach (2.26) die Rekursionsbeziehungen für die Koeffizienten $\alpha_{\lambda,\mu}$ vorzumerken; denn die Ermittlung der $\alpha_{\lambda,\mu}$ verläuft mit Ausnahme derjenigen Felder, die nur die Grösse $-A_{\lambda,\mu}$ enthalten, parallel mit dem übrigen Rechenschema.

Falls die Koeffizienten $b_{l,\lambda}$ in (2.31) benötigt werden, bestimmt man diese gemäss (2.32). Wieder empfiehlt sich die Anlage eines Schemas wie z. B.

Schema III

$a_0 = b_{0,0}$				
$+\alpha_{1,0}\, a_1 = b_{1,0}$	$a_1 = b_{1,1}$			
$+\alpha_{2,0}\, a_2 = b_{2,0}$	$+\alpha_{2,1}\, a_2 = b_{2,1}$	$a_2 = b_{2,2}$		
$+\alpha_{3,0}\, a_3 = b_{3,0}$	$+\alpha_{3,1}\, a_3 = b_{3,1}$	$+\alpha_{3,2}\, a_3 = b_{3,2}$	$a_3 = b_{3,3}$	
$+\alpha_{4,0}\, a_4 = b_{4,0}$	$+\alpha_{4,1}\, a_4 = b_{4,1}$	$+\alpha_{4,2}\, a_4 = b_{4,2}$	$+\alpha_{4,3}\, a_4 = b_{4,3}$	$a_4 = b_{4,4}$

232.14 Beurteilung der Güte der Ausgleichung

Die in der letzten Kolonne von Schema II eingetragenen Grössen gestatten eine erste Beurteilung der Güte der Ausgleichung. Der mittlere Fehler der Ausgleichung durch ein Polynom l-ten Grades beträgt nämlich

$$L_l^2 = \frac{1}{m-l-1} \sum_x [w(x) - z_l(x)]^2 = \frac{1}{m-l-1} \sum_x [u_l(x)]^2, \quad (2.33)$$

wobei sich die auftretende Summe am zweckmässigsten durch nachstehenden Ansatz berechnet

$$\sum_x [u_l(x)]^2 = \sum_x [w(x)]^2 - \sum_{\lambda=0}^{l} a_\lambda M_\lambda^*. \quad (2.34)$$

Die Verbesserung der Ausgleichung, die durch Berücksichtigung eines weiteren – um einen Grad erhöhten – orthogonalen Polynoms erzielt wird, beträgt somit

$$\sum_x [u_l(x)]^2 - \sum_x [u_{l+1}(x)]^2 = a_{l+1} M_{l+1}^*.$$

Nach *G. J. Lidstone* [29] wird das Resultat, das mit einem Ausgleichspolynom $(l+1)$-ster Ordnung erzielt wird, dann als besser betrachtet als bei Verwendung eines Polynoms l-ter Ordnung, wenn

$$L_{l+1}^2 < L_l^2 \quad \text{ist.} \tag{2.35}$$

Mit jedem Schritt können wir damit den Stand der Ausgleichung überblicken und wenn nötig weitere Polynome höheren Grades mitberücksichtigen. Zur abschliessenden Beurteilung der Güte der Ausgleichung wird es jedoch nötig sein, weitere Kriterien heranzuziehen [8], worauf wir aber nicht näher eintreten können.

232.2 Diskrete, äquidistante Argumente

Die Beobachtungswerte $w(x)$ liegen jetzt zu den m diskreten Argumenten

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ \ldots,\ a+(m-1)h$$

vor. Zur Vereinfachung empfiehlt sich die Transformation

$$\xi = \frac{x-a}{h}, \tag{2.36}$$

sodass die neue Variable die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots, (m-1)$ durchläuft.

232.21 Orthogonale Polynome

Wie im Falle kontinuierlicher Argumente greifen wir auf die im Abschnitt 22 hergeleitete Determinanten-Methode zur Ermittlung der orthogonalen Polynome. Nach (2.19) und (2.19′) sowie unter Berücksichtigung von (2.36) ist

$$C_\mu = \sum_{\xi=0}^{m-1} \xi^\mu g(\xi),$$

oder ohne Gewichtsfunktion

$$C_\mu = \sum_{\xi=0}^{m-1} \xi^\mu. \tag{2.37}$$

Diese gewöhnlichen Potenzsummen führen, in die Determinanten (2.9) eingesetzt, auf eine Lösung in der Form

$$P_\lambda(\xi) = \sum_{\mu=0}^{\lambda} \alpha_{\lambda,\mu}\, \xi^\mu,\ \ \alpha_{\lambda,\lambda} = 1,\quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.38}$$

Es erübrigt sich näher darauf einzutreten, da auch hier – wie bei kontinuierlichen Argumenten – eine explizite, formelmässige Darstellung der orthogonalen Polynome $P_\lambda(\xi)$ gefunden werden kann. Wir verweisen auf die grundlegenden Untersuchungen von *P.L.Tschebyscheff* [41], *R.A.Fisher* [16] und *F.E.Allan* [12] und beziehen uns auf die von *H.Grossen* [21] zusammengestellten Ergebnisse.

Nicht von der Extremalbedingung (2.4), sondern von den Orthogonalitätsbedingungen selbst ausgehend, lässt sich nach einfachen aber langwierigen Überlegungen zeigen, dass die orthogonalen Polynome in der Form

$$P_\lambda(\xi) = \frac{\lambda!}{\binom{2\lambda}{\lambda}} \sum_{\mu=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda+\mu} \binom{\lambda+\mu}{\lambda} \binom{m-\mu-1}{\lambda-\mu} \binom{\xi}{\mu} \tag{2.39}$$

dargestellt werden können.

Wertetabelle:

$$\begin{aligned}
P_0(\xi) &= 1 \\
P_1(\xi) &= -\tfrac{1}{2}(m-1) + \xi \\
P_2(\xi) &= \tfrac{1}{6}(m^2-3m+2) - (m-1)\,\xi + \xi^2 \\
P_3(\xi) &= -\tfrac{1}{20}(m^3-6m^2+11m-6) + \tfrac{1}{10}(6m^2-15m+11)\,\xi \\
&\quad -\tfrac{3}{2}(m-1)\,\xi^2 + \xi^3 \qquad (2.39') \\
P_4(\xi) &= \tfrac{1}{70}(m^4-10m^3+35m^2-50m+24) \\
&\quad -\tfrac{1}{7}(2m^3-9m^2+17m-10)\,\xi + \tfrac{1}{7}(9m^2-21m+17)\,\xi^2 \\
&\quad -2(m-1)\,\xi^3 + \xi^4 \\
P_5(\xi) &= -\tfrac{1}{252}(m^5-15m^4+85m^3-225m^2+274m-120) \\
&\quad +\tfrac{1}{126}(15m^4-105m^3+365m^2-525m+274)\,\xi \\
&\quad -\tfrac{5}{6}(m^3-4m^2+8m-5)\,\xi^2 + \tfrac{5}{9}(4m^2-9m+8)\,\xi^3 \\
&\quad -\tfrac{5}{2}(m-1)\,\xi^4 + \xi^5 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Nicht unerwähnt bleibe, dass die Koeffizienten dieser Polynome mit den nach der Determinanten-Methode berechenbaren Werten $\alpha_{\lambda,\mu}$ übereinstimmen. Die anderweitig in der Literatur verwendeten Ansätze $\bar{P}_\lambda(\xi)$ können zufolge der im Abschnitt 13 nachgewiesenen Eindeutigkeit

des vollständigen Orthogonalsystems höchstens um eine multiplikative Konstante c_λ von (2.39) abweichen, d. h.

$$\overline{P}_\lambda(\xi) = c_\lambda P_\lambda(\xi). \tag{2.40}$$

Für c_λ setzten z. B.

P.L. Tschebycheff [41] $\qquad c_\lambda = \dfrac{(2\lambda)!}{\lambda!}$,

A.C. Aitken [10, 11], *G.J. Lidstone* [29], *W. Ruchti* [36] $\qquad c_\lambda = \dfrac{(2\lambda)!}{(\lambda!)^2}$,

F.E. Allan [12]. *R.T. Birge* [14], *R.A. Fisher* [16], *H. Grossen* [21], *H. Kreis* [28], *E.S. Pearson and H.O. Hartley*, [35] $\qquad c_\lambda = 1$.

P. Lorenz [30–32] wählte c_λ so, dass $\dfrac{1}{m}\sum\limits_{\xi=0}^{m-1}[P_\lambda(\xi)]^2 = 1$ wird.

232.22 Ausgleichsansätze

Zur Ausgleichung der Beobachtungswerte $w(\xi)$ bildet man nach (2.5)

$$z_l(\xi) = \sum_{\lambda=0}^{l} a_\lambda P_\lambda(\xi), \quad (l = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.41}$$

Aus (2.6) bzw. (2.27) findet man für die Koeffizienten a_λ

$$a_\lambda = \frac{\sum\limits_\xi P_\lambda(\xi)\, w(\xi)}{\sum\limits_\xi [P_\lambda(\xi)]^2}. \tag{2.42}$$

Verwendet man an Stelle der einheitlich normierten Polynome $P_\lambda(\xi)$ die mit einer beliebigen anderen Konstanten multiplizierten Polynome $\overline{P}_\lambda(\xi)$ nach (2.40), dann wird das Ergebnis der Ausgleichung nicht beeinflusst, da sich der Faktor c_λ wieder wegkürzt. In der Praxis kann deshalb c_λ immer so gewählt werden, dass z. B. die Polynomwerte $\overline{P}_\lambda(\xi)$ ganzzahlig ausfallen.

24 Eigenschaften der orthogonalen Polynome

Die *Orthogonalitätseigenschaften* der Polynome $P_\lambda(x)$ bzw. $P_\lambda(\xi)$ sind durch deren spezielle Konstruktion sichergestellt, sodass es sich erübrigt, hierauf näher einzutreten.

Bei kontinuierlichen (x) und diskreten, äquidistanten Argumenten (ξ) existieren wertvolle *Rekursionsbeziehungen* in der Form

$$P_\lambda = P_1 P_{\lambda-1} - \gamma P_{\lambda-2}, \tag{2.43}$$

mit

$$\gamma = \frac{(\lambda-1)^2 (a-b)^2}{4(2\lambda-1)(2\lambda-3)} \tag{2.43'}$$

für kontinuierliche Argumente x und

$$\gamma = \frac{(\lambda-1)^2 [m^2-(\lambda-1)^2]}{4(2\lambda-1)(2\lambda-3)} \tag{2.43''}$$

für diskrete, äquidistante Argumente ξ.

Die Unbestimmtheit der diskreten, äquidistanten Argumente verunmöglicht – wie früher erwähnt – eine explizite, formelmässige Darstellung der Polynome $P_\lambda(x)$ und damit auch das Auffinden geeigneter einfacher Rekursionsbeziehungen. Hier gilt lediglich der allgemeine Ansatz (2.22).

Von entscheidender Bedeutung für die praktische Anwendung der orthogonalen Polynome sind die *Symmetrieeigenschaften* bei kontinuierlichen und diskreten, äquidistanten Argumenten. Es zeigt sich nämlich, dass die Polynome gerader Ordnung axialsymmetrisch und jene ungerader Ordnung zentral – oder punktsymmetrisch sind in bezug auf den Intervallmittelpunkt, d. h. es gilt

$$P_\lambda(a+b-x) = (-1)^\lambda P_\lambda(x) \tag{2.44}$$

für kontinuierliche Argumente und

$$P_\lambda(m-1-\xi) = (-1)^\lambda P_\lambda(\xi) \tag{2.44'}$$

für diskrete, äquidistante Argumente.

Transformiert man die unabhängige Variable gemäss

$$x^* = x - \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad \xi^* = \xi - \frac{m-1}{2}, \tag{2.45}$$

dann treten die Symmetrieeigenschaften noch deutlicher in Erscheinung, indem jetzt für (2.44) und (2.44')

$$P_\lambda(-x^*) = (-1)^\lambda P_\lambda(x^*) \tag{2.46}$$

und

$$P_\lambda(-\xi^*) = (-1)^\lambda P_\lambda(\xi^*) \tag{2.46'}$$

gesetzt werden kann.

Erst durch diese Symmetrieeigenschaften wurde es möglich, gut ausgebaute, rationelle Tabellen anzulegen. Im weitern ist beachtenswert, dass die Grössen C_μ nach (2.7) für ungerade μ verschwinden. Dies gilt für kontinuierliche und diskrete, äquidistante Argumente und vereinfacht die Berechnung der orthogonalen Polynome nach der Determinanten-Methode bedeutend.

Nun zeigt sich, dass die orthogonalen Polynome bei diskreten, nicht äquidistanten, in bezug auf ihren Mittelpunkt aber symmetrisch gelegenen Argumenten analoge Symmetrieeigenschaften wie in den beiden vorerwähnten Fällen besitzen. Transformiert man nämlich die Argumentenfolge $x_1, x_2, \ldots, x_m$ gemäss

$$x_i^* = x_i - \bar{x}, \quad \text{mit} \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i, \tag{2.47}$$

dann gilt

$$C_\mu = \sum_{i=1}^{m} x_i^{*\mu} \begin{cases} = 0, & \text{für } \mu = \text{ungerade}, \\ \neq 0, & \text{für } \mu = \text{gerade}. \end{cases} \tag{2.48}$$

Setzen wir diese C_μ-Werte in die Determinanten des Ansatzes (2.9) ein, so wird

$$\alpha_{\lambda,\mu} = \frac{D_\lambda(\mu)}{D_\lambda} \begin{cases} = 0, & \text{für } \lambda + \mu = \text{ungerade}, \\ \neq 0, & \text{für } \lambda + \mu = \text{gerade}; \end{cases} \tag{2.49}$$

d. h. die orthogonalen Polynome $P_\lambda(x_i^*)$ weisen bei diskreten, nicht äquidistanten, jedoch symmetrisch gelegenen Argumenten entweder nur gerade oder nur ungerade Potenzen von x_i^* auf, je nachdem der Grad λ gerade oder ungerade ist. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung

$$P_\lambda(-x_i^*) = (-1)^\lambda P_\lambda(x_i^*). \tag{2.50}$$

Auch diese Symmetrieeigenschaften führen zu merklichen Vereinfachungen für die numerische Auswertung.

25 Numerische Auswertung

Grundsätzlich können die orthogonalen Polynome immer mit dem nach der Determinanten-Methode (vgl. Abschnitt 22) aufgezeigten Verfahren ermittelt werden. Dies wird vor allem dann vorteilhaft sein, wenn zur Auflösung des linearen, inhomogenen Gleichungssystems (2.8) moderne, leistungsfähige Rechengeräte zur Verfügung stehen.

Die «Methode der Rekursion», wie sie im Abschnitt 232.1 dargelegt wurde, beruht ebenfalls auf den Gleichungen (2.8) und ist im wesentlichen eine Weiterentwicklung der Determinanten-Methode im Hinblick auf deren praktische Anwendung. Das angegebene Rechenschema II (Seite 79) dürfte besonders dann rasch und sicher zum Ziele führen, falls die numerische Auswertung mittels einfacher Rechenmaschinen zu erfolgen hat.

Für konkrete Beispiele verweisen wir auf die Literaturangaben (Seiten 124 ff.) sowie auf die Ausführungen im Abschnitt 35.

251 Kontinuierliche Argumente

Dank der formelmässigen Darstellung (2.12) lassen sich die orthogonalen Polynome durch Spezialisierung des Intervalls $[a,b]$ auf das vorhandene (endliche) Beobachtungsintervall sofort angeben. Die Setzung $a = -b = 1$ deckt – wie wir früher erkannten – die enge Bindung zu den tabellierten *Legendre*-Polynomen ${}_L P_\lambda(x)$ auf.

Nach (2.14) und (2.15) gilt nämlich

$$ {}_L P_\lambda(x) = \frac{1}{2^\lambda \lambda!} \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} [(x^2-1)^\lambda] = \frac{1}{2^\lambda} \binom{2\lambda}{\lambda} P_\lambda(x). \qquad (2.51) $$

Für kontinuierliche Argumente verweisen wir auf folgende bekannten

Tabellen der Legendre-Polynome

Autor		Argumentbereich	Grad λ	Genauigkeit
1. *a) K. Hayashi*	[26]	0 (0,01) 1,00	1 (1) 8	5–23 Stellen
b) K. Hayashi	[25]	0 (0,01) 1,00	1 (1) 10	5 Stellen
2. *E. Jahnke–F. Emde*	[27]	0 (0,01) 1,00	1 (1) 7	4 Stellen
3. *F. Tölke*	[39]	—1,000 (0,001) +1,000	1 (1) 10	4 Stellen

Im «Index of mathematical tables» weisen *A. Fletcher, J. C. P. Miller and L. Rosenhead* [18], auf weitere Tabellenwerke hin, welchen stets die gleichen Legendre-Polynome zugrunde liegen, allerdings für verschieden feine Intervallunterteilungen und für Polynome verschiedener Grade mit unterschiedlicher Genauigkeit.

Mit Hilfe dieser tabellierten Polynomwerte lässt sich die Ausgleichung mühelos durchführen. Es ist lediglich der Umrechnungsfaktor $\frac{1}{2^\lambda}\binom{2\lambda}{\lambda}$ in (2.51) zu berücksichtigen.

252 Diskrete, äquidistante Argumente

Für diskrete, äquidistante Argumente sind nachstehende Besonderheiten erwähnenswert:

1. Zur Vereinfachung der numerischen Auswertung liegen die orthogonalen Polynome weitgehend tabelliert vor.

Tabellen der orthogonalen Polynome

Autor	Literatur-verzeichnis	Anzahl der Argumente m	Grad λ
1. Aitken [1]	10	4 (1) 25	1 (1) 5
2. Anderson and Houseman	13	3 (1) 104	1 (1) 5
3. Birge	14	2 (1) 30	1 (1) 5
4. Fisher and Yates	17	3 (1) 75	1 (1) 5
5. Gram	19	7 (2) 21	1 (1) 3
6. *a)* Lorenz	30	1 (1) 60	1 (1) 5
b) Lorenz	31	1 (1) 80	1 (1) 6
7. Pareto	34	4 (1) 25	1 (1) 8
8. Pearson and Hartley	35	3 (1) 52	1 (1) 6
9. Van der Reyden	42	5 (1) 52	1 (1) 9

[1]) Differenzen-Tabellen: $\Delta^\lambda P_\lambda(\xi)|_{\xi=0}$

Weitere Angaben können dem Buch von *A. Fletcher, J. C. P. Miller and L. Rosenhead* [18] entnommen werden.

Der Symmetrieeigenschaften (2.44), (2.44′), (2.46) und (2.46′) wegen enthalten sämtliche Tabellen nur die Polynomwerte für die positiven oder negativen Argumente.

Während in neuen Tabellenwerken, wie in denjenigen von *Anderson and Houseman* [13], *Birge* [14], *Fisher and Yates* [17], *Pearson and Hartley* [35] und *Van der Reyden* [42], die multiplikativen Konstanten so gewählt sind, dass die tabellierten Polynomwerte ganzzahlig

ausfallen, arbeitete *Lorenz* [30, 31] mit der einheitlichen Normierung

$$\frac{1}{m}\sum_{\xi^*}[P_\lambda(\xi^*)]^2 = 1$$

und erhielt Dezimalbrüche, die er auf fünf Stellen genau angab.

2. Die Berechnung der Koeffizienten a_λ in (2.41) erfordert gemäss (2.42) die Kenntnis der Summe

$$\sum_{\xi^*=-\frac{m-1}{2}}^{\frac{m-1}{2}} P_\lambda(\xi^*)\, w(\xi^*). \tag{2.52}$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften (2.46′) lässt sich (2.52) für m = gerade in der Gestalt

$$\sum_{\xi^*=-\frac{m-1}{2}}^{\frac{m-1}{2}} P_\lambda(\xi^*)\, w(\xi^*) = \sum_{\xi^*=\frac{1}{2}}^{\frac{m-1}{2}} P_\lambda(\xi^*)\,[w(\xi^*) + (-1)^\lambda w(-\xi^*)] \tag{2.53}$$

und für m = ungerade in der Form

$$\sum_{\xi^*=-\frac{m-1}{2}}^{\frac{m-1}{2}} P_\lambda(\xi^*)\, w(\xi^*) = \sum_{\xi^*=1}^{\frac{m-1}{2}} P_\lambda(\xi^*)\,[w(\xi^*) + (-1)^\lambda w(-\xi^*)] + P_\lambda(0)\, w(0) \tag{2.53'}$$

darstellen. Es empfiehlt sich deshalb, eine Tabelle der Summen $w(\xi^*) + w(-\xi^*)$ wie auch der Differenzen $w(\xi^*) - w(-\xi^*)$ anzulegen; je nachdem ob λ gerade oder ungerade ist, findet der eine oder andere Ansatz Verwendung. Der Nenner von a_λ, d. h. $\sum_{\xi^*}[P_\lambda(\xi^*)]^2$ ist für die tabellierten Polynomwerte bekannt.

3. Die vorläufige *Beurteilung der Güte der Ausgleichung* kann – analog wie im Falle diskreter, nicht äquidistanter Argumente – sehr einfach vollzogen werden. Nach (2.33), (2.34) und (2.27) beträgt der mittlere Fehler der Ausgleichung durch ein Polynom l-ten Grades

$$L_l^2 = \frac{1}{m-l-1}\sum_{\xi^*}[u_l(\xi^*)]^2 = \frac{1}{m-l-1}\sum_{\xi^*}[w(\xi^*)]^2 - \sum_{\lambda=0}^{l} a_\lambda^2 \sum_{\xi^*}[P_\lambda(\xi^*)]^2. \tag{2.54}$$

Darin ist nur noch die Summe der Quadrate der Beobachtungswerte unbekannt, deren Ermittlung keinen grossen Mehraufwand darstellt. Nach dem Kriterium (2.35) kann der Stand der Ausgleichung sofort überblickt werden, bevor auch nur ein einziger ausgeglichener Wert berechnet wird.

3 Zweidimensionale Betrachtungsweise

31 Grundsätzliches und Definition des Stieltjes-Integrals

Die Ausführungen des ersten Kapitels bilden wiederum die Grundlage für den zweidimensionalen Fall. Nach Möglichkeit werden überdies die bei einer unabhängigen Variablen gefundenen Ergebnisse mitberücksichtigt.

Wir legen unseren Betrachtungen jenen Mengenkörper $\mathfrak{M}$ zugrunde, der von allen beschränkten, achsenparallelen Rechtecken X_μ erzeugt wird; es gilt dann $B \subset \bigcup_{\mu=1}^{m} X_\mu$.

Ist der Bereich B selber ein achsenparalleles Rechteck, so kann man sich (vgl. Fussnote auf Seite 67) auf solche Bereiche beschränken, für die

$$B = \bigcup_{\mu=1}^{m} X_\mu \quad \text{ist.}$$

Bei einer Verfeinerung der Überdeckung treten dann keine Y-Mengen auf.

Das Feinheitsmass einer Überdeckung Z von B ist die Grösse

$$\delta[Z] = \operatorname*{Max}_{\mu=1,2,\ldots,m} \delta[X_\mu],$$

wo der Durchmesser $\delta[X_\mu]$ die Länge einer Diagonalen des Rechtecks X_μ darstellt.

Der Grenzwert

$$\lim_{D \to 0} \sum_{\mu=1}^{m} \varphi(x_\mu) F(X_\mu) = \int_B \varphi(x)\, dF \tag{3.1}$$

heisst Stieltjes-Integral von $\varphi(x)$ bezüglich F über B, existiert und ist von der Art der Überdeckung Z des Bereiches B durch die m beschränkten, paarweise disjunkten und achsenparallelen Rechtecke X_μ, wie auch von der Wahl der Punkte $x_\mu \in X_\mu \cap B$ unabhängig.

Spezialisieren wir die weiteren Überlegungen des ersten Kapitels auf den Fall von zwei unabhängigen Variablen $x_1 = x$ und $x_2 = y$, dann lassen sich die Hauptergebnisse wie folgt zusammenfassen:

1. Die Polynome $P_{\lambda,\mu}(x,y)$ lauten nach (1.6)

$$P_{\lambda,\mu}(x,y) = \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{\varrho=0}^{\nu} {}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho}\, x^{\nu-\varrho}\, y^\varrho + \sum_{\varrho=0}^{\mu-1} {}_{\lambda,\lambda}\alpha_{\mu,\varrho}\, x^{\lambda-\varrho}\, y^\varrho + x^{\lambda-\mu}\, y^\mu, \tag{3.2}$$

$$\text{mit} \quad {}_{\lambda,\lambda}\alpha_{\mu,\mu} = 1.$$

Es gibt jetzt von jedem Grad ν wieder mehrere, nämlich $p_\nu = \binom{\nu+1}{\nu} = \nu + 1$ voneinander verschiedene Potenzprodukte $Q_{\nu,\varrho}(x,y) = x^{\nu-\varrho}\, y^\varrho$, $(\varrho = 0, 1, 2, \ldots, \nu)$.

Mit dieser neuen Bezeichnungsweise bedeutet $Q_{\nu,\varrho}(x,y)$ nicht mehr – wie früher auf Seite 62 – das ϱ-te Potenzprodukt ν-ten Grades, vielmehr stellt das Symbol das spezifische Potenzprodukt $x^{\nu-\varrho}\, y^\varrho$ dar, wo ϱ die $p_\nu = \nu + 1$ Werte $\varrho = 0, 1, 2, \ldots, \nu$ durchläuft.

Analog bedeutet $P_{\lambda,\mu}(x,y)$ jenes der insgesamt $p_\lambda = \lambda + 1$ möglichen Polynome λ-ten Grades, welches als letztes Potenzprodukt $x^{\lambda-\mu}\, y^\mu$ enthält, und ${}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho}$ ist der Koeffizient des Potenzproduktes $x^{\nu-\varrho}\, y^\varrho$ im Polynom $P_{\lambda,\mu}(x,y)$.

2. Alle auftretenden Integrale existieren. Wenn das oben definierte System der Polynome $P_{\lambda,\mu}(x,y)$, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda)$ orthogonal ist, gilt nach (1.7)

$$\int_B P_{\lambda,\mu}(x,y)\, P_{\nu,\varrho}(x,y)\, dF \begin{cases} = 0, & \text{für } \lambda \neq \nu \text{ oder } \mu \neq \varrho, \\ \neq 0, & \text{für } \lambda = \nu \text{ und } \mu = \varrho, \end{cases} \tag{3.3}$$

für alle $\lambda, \nu = 0, 1, 2, \ldots;\ \mu, \varrho = 0, 1, 2, \ldots, \lambda$ bzw. ν.

3. Die Polynome $P_{\lambda,\mu}(x,y)$, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda)$ bilden dann ein vollständiges Orthogonalsystem, wenn die Koeffizienten ${}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho}$ in (3.2) so bestimmt werden, dass nach (1.9) gilt:

$$\int_B [P_{\lambda,\mu}(x,y)]^2\, dF = \text{Extremum, mit } {}_{\lambda,\lambda}\alpha_{\mu,\mu} = 1. \tag{3.4}$$

Diese Forderung gewährleistet eine eindeutige Ermittlung der Polynome $P_{\lambda,\mu}(x,y)$.

4. Bilden die Polynome $P_{\lambda,\mu}(x,y)$, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda)$ ein vollständiges Orthogonalsystem, dann lässt sich nach (1.10) jedes beliebige Ausgleichspolynom $z_{l,k}(x,y)$ eindeutig als Linearkombination entsprechender Polynome dieses Orthogonalsystems darstellen, nämlich

$$z_{l,k}(x,y) = \sum_{\lambda=0}^{l-1} \sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{\lambda,\mu} P_{\lambda,\mu}(x,y) + \sum_{\mu=0}^{k} a_{l,\mu} P_{l,\mu}(x,y). \tag{3.5}$$

Hier ist $z_{l,k}(x,y)$ ein Polynom mit nicht verschwindendem Koeffizienten des «höchsten» Potenzproduktes $x^{l-k}\, y^k$.

Die Koeffizienten $a_{\lambda,\mu}$ ergeben sich nach (1.13) zu

$$a_{\lambda,\mu} = \frac{\int\limits_B P_{\lambda,\mu}(x,y)\, w(x,y)\, dF}{\int\limits_B [P_{\lambda,\mu}(x,y)]^2\, dF}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, 2, \ldots \\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda \end{pmatrix}; \tag{3.6}$$

wobei die Beobachtungswerte $w(x,y)$ wieder nach der Methode der kleinsten Quadrate (1.11) ausgeglichen werden.

32 Determinanten-Methode

Die Koeffizienten ${}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho}$ der Polynome $P_{\lambda,\mu}(x,y)$ in (3.2) werden so bestimmt, dass die Extremalbedingung (3.4) erfüllt ist. Dabei ist es zweckmässig die Abkürzung

$$\int\limits_B x^{\nu-\varrho}\, y^{\varrho}\, dF = {}_{\nu}C_{\varrho} \tag{3.7}$$

zu verwenden.

Um der Forderung (3.4) Genüge zu leisten, müssen notwendigerweise die partiellen Ableitungen nach den unbekannten Koeffizienten ${}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho}$ verschwinden.

Unter Berücksichtigung der Nebenbedingung ${}_{\lambda,\lambda}\alpha_{\mu,\mu} = 1$ erhält man nach wenigen Umformungen das aus $\binom{\lambda+1}{2} + \mu$ Gleichungen bestehende lineare, inhomogene Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{\varrho=0}^{\nu} {}_{\nu+l}C_{\varrho+m}\; {}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho} + \sum_{\varrho=0}^{\mu-1} {}_{\lambda+l}C_{\varrho+m}\; {}_{\lambda,\lambda}\alpha_{\mu,\varrho} = -\,{}_{\lambda+l}C_{\mu+m}, \tag{3.8}$$

$$\text{mit} \quad \begin{matrix} l = 0, 1, 2, \ldots, (\lambda-1) & \text{und} & l = \lambda \\ m = 0, 1, 2, \ldots, l & & m = 0, 1, 2, \ldots, (\mu-1). \end{matrix}$$

Die $\binom{\lambda+1}{2} + \mu$ unbekannten Koeffizienten ${}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho}$ lassen sich aus diesem Gleichungssystem (3.8) eindeutig bestimmen, falls die linksseitige Koeffizientendeterminante $D_{\lambda,\mu}$ nicht verschwindet.

Geht $D_{\lambda,\mu}(\nu,\varrho)$ aus $D_{\lambda,\mu}$ dadurch hervor, dass die mit ${}_{\nu}C_{\varrho}$ beginnende Spalte durch die auf der rechten Seite des Gleichungssystems (3.8) stehenden Grössen ersetzt wird, dann gilt

$${}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho} = \frac{D_{\lambda,\mu}(\nu,\varrho)}{D_{\lambda,\mu}}, \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda). \tag{3.9}$$

Mit den so bestimmten Koeffizienten ${}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho}$ hat man mittels der Definitionsbeziehung (3.2) eine eindeutige Darstellung der orthogonalen Polynome gefunden.

Der grosse Vorteil dieses Lösungsverfahrens besteht darin, dass es nicht nur für jeden Bereich B, sondern allgemein, d. h. sowohl für kontinuierliche, als auch für diskrete Argumente gültig ist; denn der zur Bestimmung der ${}_{\nu}C_{\varrho}$ massgebende Ansatz (3.7) erschliesst alle Möglichkeiten.

33 Beziehungen und Ansätze für die praktische Anwendung

331 Kontinuierliche Argumente

Das Stieltjes-Integral (3.1) lässt sich auch als

$$\int_B \varphi(x,y)\, dF$$

schreiben, wenn der Punkt $x \in B$ die Koordinaten (x,y) besitzt. Damit ist gleichzeitig die Abhängigkeit der stetigen Funktion φ von den beiden Variablen x und y angedeutet.

Handelt es sich um eine Ausgleichung nach einer in x und y stetigen Gewichtsfunktion $g(x,y)$, dann kann für

$$\int_B \varphi(x,y)\, dF = \int_B\!\!\int g(x,y)\, \varphi(x,y)\, dx\, dy$$

gesetzt werden, falls

$$F(X_\mu) = \int_{X_\mu}\!\!\int g(x,y)\, dx\, dy$$

ist für jedes Rechteck $X_\mu \in \mathfrak{M}$, das zur Überdeckung Z von B gehört.

331.1 Orthogonale Polynome

Wir stützen uns zunächst auf die im Abschnitt 32 dargelegte Determinanten-Methode und erhalten aus (3.7) für kontinuierliche Argumente

$${}_{\nu}C_{\varrho} = \int_B\!\!\int x^{\nu-\varrho}\, y^{\varrho}\, dx\, dy, \tag{3.10}$$

falls auf eine Gewichtsfunktion verzichtet werden kann.

Substituiert man (3.10) in den im Ansatz (3.9) vorkommenden Determinanten, dann sind die Entwicklungskoeffizienten ${}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho}$ formal bestimmt.

Um nun zu einer expliziten Darstellung zu gelangen, muss der Integrationsbereich B näher festgelegt werden. Stimmt dieser beispielsweise mit dem achsenparallelen Rechteck $R = [a \leqq x \leqq b;\ c \leqq y \leqq d]$ überein, dann wird

$$ {}_{\nu}C_{\varrho} = \int_a^b \int_c^d x^{\nu-\varrho}\, y^{\varrho}\, dy\, dx = \left\{ \int_a^b x^{\nu-\varrho}\, dx \right\} \left\{ \int_c^d y^{\varrho}\, dy \right\} $$

oder

$$ {}_{\nu}C_{\varrho} = C_{\nu-\varrho}\, C^*_{\varrho}. \tag{3.11} $$

Das Doppelintegral (3.10) lässt sich in diesem speziellen Fall als das Produkt zweier gewöhnlicher Integrale darstellen, die nach (2.11) mit $C_{\nu-\varrho}$ (in x) und C^*_{ϱ} (in y) bezeichnet werden können. Jetzt sind auch die Koeffizienten ${}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho}$ explizit berechenbar und führen gemäss (3.2) auf Polynome, die identisch sind mit jenen in (3.12″).

Man kann sich fragen, ob es möglich sei, für die Koeffizienten ${}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho}$ selbst – und damit auch für die orthogonalen Polynome $P_{\lambda,\mu}(x,y)$ – eine direkte formelmässige Darstellung zu finden. Da schon zur Ermittlung der Grössen ${}_{\nu}C_{\varrho}$ nach (3.10) der Bereich B explizit angegeben werden muss, drängt sich eine Spezialisierung auf gewisse einfache Bereiche auf, wobei das achsenparallele Rechteck auch hier eine besondere Ausnahmestellung einnimmt. Wie im eindimensionalen Fall bedienen wir uns der Variationsrechnung zur Lösung des Extremalproblems (3.4). Mit Hilfe der *Riemannschen* Reduktionsformel (*A. Ostrowski* [3]) für kanonische Bereiche finden wir nach *W. Gröbner* [20] folgende für den Rechtecksbereich $R = [a \leqq x \leqq b;\ c \leqq y \leqq d]$ gültige Darstellung

$$ P_{\lambda,\mu}(x,y) = \frac{(\lambda-\mu)!}{(2\lambda-2\mu)!} \frac{d^{\lambda-\mu}}{dx^{\lambda-\mu}} \left[(x-a)(x-b)\right]^{\lambda-\mu} \frac{\mu!}{(2\mu)!} \frac{d^{\mu}}{dy^{\mu}} \left[(y-c)(y-d)\right] \tag{3.12} $$

oder

$$ P_{\lambda,\mu}(x,y) = P_{\lambda-\mu}(x)\, P^*_{\mu}(y). \tag{3.12'} $$

Die zweidimensionalen, orthogonalen Polynome $P_{\lambda,\mu}(x,y)$ entarten nach diesem bemerkenswerten Resultat in das Produkt der eindimensionalen Polynome $P_{\lambda-\mu}(x)$ und $P^*_{\mu}(y)$, falls der Bereich B ein Rechteck ist und kontinuierliche Argumente vorliegen.

Nachstehend seien die ersten Ansätze zusammengestellt.

$$
\begin{aligned}
P_{0,0}(x,y) &= 1 \\
P_{1,0}(x,y) &= -\tfrac{1}{2}(a+b)+x \\
P_{1,1}(x,y) &= -\tfrac{1}{2}(c+d)+y \\
P_{2,0}(x,y) &= \tfrac{1}{6}(a^2+4ab+b^2)-(a+b)\,x+x^2 \\
P_{2,1}(x,y) &= \tfrac{1}{4}(a+b)(c+d)-\tfrac{1}{2}(c+d)\,x-\tfrac{1}{2}(a+b)\,y+xy \\
P_{2,2}(x,y) &= \tfrac{1}{6}(c^2+4cd+d^2)-(c+d)\,y+y^2 \\
P_{3,0}(x,y) &= -\tfrac{1}{20}(a^3+9a^2b+9ab^2+b^3)+\tfrac{3}{5}(a^2+3ab+b^2)\,x \\
&\quad -\tfrac{3}{2}(a+b)\,x^2+x^3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{3.12''}
$$

Nun liegt die Vermutung nahe, dass die für kontinuierliche Argumente erkannte Auszeichnung der Rechtecksbereiche auch für beliebige Argumente zutreffen dürfte. Es soll deshalb bereits an dieser Stelle gezeigt werden, dass die fundamentale Beziehung (3.12′) allgemeine Gültigkeit besitzt und zwar unter folgenden

Voraussetzungen:

1. Der Bereich B sei ein Rechteck,
2. $dF = dF_x\,dF_y$, (z. B. $dF = dx\,dy$),
3. $dF \geqq 0$.

Definition:

$$R_{\lambda,\mu}(x,y) = P_\lambda(x)\,P^*_\mu(y) \tag{3.13}$$

ist ein Polynom λ-ten Grades in x und μ-ten Grades in y mit dem Koeffizienten 1 für das höchste Potenzprodukt $x^\lambda\,y^\mu$.

Behauptungen:

1. Die Polynome $\{R_{\lambda,\mu}(x,y)\}$, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots; \mu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda)$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem auf B.

2. Für die nach (3.2) definierten Polynome $P_{\lambda,\mu}(x,y)$ gilt:

$$P_{\lambda,\mu}(x,y) = R_{\lambda-\mu,\mu}(x,y).$$

Beweis:

1. Das Polynomsystem $\{R_{\lambda,\mu}(x,y)\}$ ist auf B *orthogonal;* denn gemäss Definition (3.13) und (2.3) gilt für alle $\lambda = 0, 1, 2, \ldots; \mu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda$

$$\int\int_B R_{\lambda,\mu}(x,y)\, R_{\nu,\varrho}(x,y)\, dF = \int\int_B P_\lambda(x)\, P_\nu(x)\, P^*_\mu(y)\, P^*_\varrho(y)\, dF_x\, dF_y =$$

$$= \left\{ \int_B P_\lambda(x)\, P_\nu(x)\, dF_x \right\} \left\{ \int_B P^*_\mu(y)\, P^*_\varrho(y)\, dF_y \right\}$$

und somit

$$\int\int_B R_{\lambda,\mu}(x,y)\, R_{\nu,\varrho}(x,y)\, dF \begin{cases} = 0, & \text{für } \lambda \neq \nu \text{ oder } \mu \neq \varrho, \\ \neq 0, & \text{für } \lambda = \nu \text{ und } \mu = \varrho. \end{cases} \tag{3.14}$$

Zum Nachweis der *Vollständigkeit* des von den orthogonalen Polynomen $R_{\lambda,\mu}(x,y)$ erzeugten Systems genügt es zu zeigen, dass jedes Potenzprodukt $x^\lambda\, y^\mu$ eindeutig als Linearkombination der Polynome $R_{\lambda,\mu}(x,y)$ dargestellt werden kann; denn ein (beliebiges) Polynom ist aus endlich vielen solchen Potenzprodukten zusammengesetzt.

Nach (2.21) lässt sich jede Potenz x^λ eindeutig als Linearkombination der eindimensionalen Polynome $P_\nu(x)$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda)$, eines vollständigen Orthogonalsystems darstellen:

$$x^\lambda = \sum_{\nu=0}^{\lambda} A_{\lambda,\nu}\, P_\nu(x).$$

Analog gilt für y^μ

$$y^\mu = \sum_{\varrho=0}^{\mu} A^*_{\mu,\varrho}\, P^*_\varrho(y),$$

und daraus folgt durch Produktbildung

$$x^\lambda\, y^\mu = \sum_{\nu=0}^{\lambda} \sum_{\varrho=0}^{\mu} (A_{\lambda,\nu}\, A^*_{\mu,\varrho})\, P_\nu(x)\, P^*_\varrho(y),$$

oder

$$x^\lambda\, y^\mu = \sum_{\nu=0}^{\lambda} \sum_{\varrho=0}^{\mu} (A_{\lambda,\nu}\, A^*_{\mu,\varrho})\, R_{\nu,\varrho}(x,y),$$

was zu beweisen war.

2. Wir wissen jetzt, dass die Polynome $R_{\lambda,\mu}(x,y)$, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots; \mu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda)$ ein vollständiges Orthogonalsystem bilden. In $R_{\lambda-\mu,\mu}(x,y)$ kommen – wie in $P_{\lambda,\mu}(x,y)$ – nur die Potenzprodukte $Q_{0,0}, Q_{1,0}, Q_{1,1}, \ldots, Q_{\lambda-\mu,\mu}$ vor (vgl. Bemerkungen zu (3.2), Seite 90) und zwar das letzte mit dem Koeffizienten 1. Im Abschnitt 13 wurde gezeigt,

dass es nur ein System orthogonaler Polynome mit diesen Eigenschaften gibt. Somit stimmen die beiden Systeme vollständig überein und die Richtigkeit der 2. Behauptung

$$R_{\lambda-\mu,\mu}(x,y) = P_{\lambda,\mu}(x,y) \tag{3.15}$$

ist ebenfalls bewiesen.

Mit (3.13), (3.14) und (3.15) ist der Nachweis erbracht, dass unter den genannten Voraussetzungen stets die Zerlegung

$$P_{\lambda,\mu}(x,y) = P_{\lambda-\mu}(x)\, P^*_{\mu}(y) \tag{3.16}$$

möglich ist.

Wenn also der Bereich B ein achsenparalleles Rechteck und $dF = dF_x\, dF_y$ sowie $dF \geqq 0$ ist, dann können die zweidimensionalen orthogonalen Polynome $P_{\lambda,\mu}(x,y)$ für beliebige Argumentfolgen stets als Produkt der beiden eindimensionalen Polynome $P_{\lambda-\mu}(x)$ und $P^*_{\mu}(y)$ dargestellt werden.

Diese Tatsache hat eine wesentliche Verminderung des Rechenaufwandes zur Folge, lässt sich doch das Problem der Ausgleichung von Beobachtungswerten über einem achsenparallelen Rechtecksbereich auf den eindimensionalen Fall zurückführen.

331.2 Ausgleichsansätze

Jedes Ausgleichspolynom $z_{l,k}(x,y)$ kann nach (3.5) als Linearkombination der $P_{\lambda,\mu}(x,y)$ dargestellt werden mit

$$a_{\lambda,\mu} = \frac{\iint\limits_B P_{\lambda,\mu}(x,y)\, w(x,y)\, dx\, dy}{\iint\limits_B [P_{\lambda,\mu}(x,y)]^2\, dx\, dy}, \tag{3.17}$$

$$\text{für } \lambda = 0, 1, 2, \ldots, l;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, k \leqq l,$$

wenn die Gewichtsfunktion $g(x,y) \equiv 1$ gesetzt wird.

Bei Rechtecksbereichen sind die zweidimensionalen orthogonalen Polynome $P_{\lambda,\mu}(x,y)$ gemäss (3.16) bzw. (3.12′) durchwegs durch das Produkt $P_{\lambda-\mu}(x)\, P^*_{\mu}(y)$ zu ersetzen, was zu beachtlichen Vereinfachungen führt.

332 Diskrete Argumente

Liegen nur zu den endlich vielen $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$ diskreten Argumenten $x_\mu = (x_i, y_j)$, $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n_i)$ auszugleichende Beobachtungswerte $w(x_i, y_j)$ vor, dann ergibt sich durch Spezialisierung nach (3.1)

$$\int_B \varphi(x)\, dF = \lim_{D \to 0} \sum_{\mu=1}^{N} \varphi(x_\mu)\, F(X_\mu) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} g(x_i, y_j)\, \varphi(x_i, y_j),$$

wenn $F(X_\mu) = \sum_{(x_i, y_j) \in X_\mu} g(x_i, y_j)$ gesetzt wird.

Wie bei der eindimensionalen Betrachtungsweise nehmen wir die Zweiteilung «nicht äquidistante» und «äquidistante» Argumente vor.

332.1 Diskrete, nicht äquidistante Argumente

Der Unbestimmtheit der vorliegenden Argumente $x_\mu = (x_i, y_j)$, $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n_i)$ wegen handelt es sich im wesentlichen darum, die für das Aufsuchen der orthogonalen Polynome und der Ausgleichsansätze massgebenden Rekursionsbeziehungen herzuleiten.

332.11 Orthogonale Polynome

Um das Gleichungssystem (3.8) ohne umständliche Determinantenberechnungen auszuwerten, werden die Grössen

$$_\nu C_\varrho = \int_B x^{\nu-\varrho}\, y^\varrho\, dF = \sum_{x_i, y_j} g(x_i, y_j)\, x_i^{\nu-\varrho}\, y_j^\varrho \tag{3.18}$$

oder

$$_\nu C_\varrho = \sum_{x,y} x^{\nu-\varrho}\, y^\varrho, \quad \text{für } g(x,y) \equiv 1, \tag{3.18'}$$

unter Berücksichtigung von (3.2) wie folgt erweitert

$$_{\lambda,\nu} C_{\mu,\varrho} = \sum_{x,y} x^{\lambda-\mu}\, y^\mu\, P_{\nu,\varrho}(x,y), \tag{3.19}$$

$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda-1;\ \varrho = 0, 1, 2, \ldots, \nu$ und $\nu = \lambda;\ \varrho = 0, 1, 2, \ldots, \mu)$.

Dadurch geht $_\lambda C_\mu$ in $_{\lambda,0} C_{\mu,0}$ über.

Wird (3.2) nach $x^{\lambda-\mu}\,y^{\mu}$ aufgelöst, findet man durch Iteration für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda$ die Darstellung

$$x^{\lambda-\mu}\,y^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{\lambda-1}\sum_{\varrho=0}^{\nu} {}_{\lambda,\nu}A_{\mu,\varrho}\,P_{\nu,\varrho}(x,y) + \sum_{\varrho=0}^{\mu} {}_{\lambda,\lambda}A_{\mu,\varrho}\,P_{\lambda,\varrho}(x,y), \quad (3.20)$$
$$\text{mit } {}_{\lambda,\lambda}A_{\mu,\mu} = 1.$$

Unter Beachtung der Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum_{x,y} P_{\lambda,\mu}(x,y)\,P_{\nu,\varrho}(x,y \begin{cases} = 0, & \text{für } \lambda \neq \nu \text{ oder } \mu \neq \varrho, \\ \neq 0, & \text{für } \lambda = \nu \text{ und } \mu = \varrho, \end{cases} \quad (3.21)$$

folgert man aus der umgeformten Relation (3.20)

$$P_{\lambda,\mu}(x,y) = -\sum_{\nu=0}^{\lambda-1}\sum_{\varrho=0}^{\nu} {}_{\lambda,\nu}A_{\mu,\varrho}\,P_{\nu,\varrho}(x,y) - \sum_{\varrho=0}^{\mu-1} {}_{\lambda,\lambda}A_{\mu,\varrho}\,P_{\lambda,\varrho}(x,y) + x^{\lambda-\mu}\,y^{\mu}, \quad (3.22)$$

nach Erweiterung mit $P_{\varkappa,\tau}(x,y)$ und Summation über alle Argumente für die Koeffizienten ${}_{\lambda,\nu}A_{\mu,\varrho}$ (dabei wurde $\varkappa$ wieder durch ν und τ durch ϱ ersetzt) die Beziehung

$${}_{\lambda,\nu}A_{\mu,\varrho} = \frac{\sum\limits_{x,y} x^{\lambda-\mu}\,y^{\mu}\,P_{\nu,\varrho}(x,y)}{\sum\limits_{x,y}[P_{\nu,\varrho}(x,y)]^2} = \frac{{}_{\lambda,\nu}C_{\mu,\varrho}}{{}_{\nu,\nu}C_{\varrho,\varrho}}, \quad \begin{pmatrix} \nu \leqq (\lambda-1); & \nu = \lambda \\ \varrho \leqq \nu; & \varrho \leqq \mu \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Die hier auftretenden Grössen ${}_{\lambda,\nu}C_{\mu,\varrho}$ genügen, wie man durch Einsetzen von (3.22) in (3.19) erkennt, den Rekursionsbeziehungen

$${}_{\lambda,\nu}C_{\mu,\varrho} = {}_{\lambda+\nu,0}C_{\mu+\varrho,0} - \sum_{\varkappa=0}^{\nu-1}\sum_{\tau=0}^{\varkappa} {}_{\nu,\varkappa}A_{\varrho,\tau}\;{}_{\lambda,\varkappa}C_{\mu,\tau} - \sum_{\tau=0}^{\varrho-1} {}_{\nu,\nu}A_{\varrho,\tau}\;{}_{\lambda,\nu}C_{\mu,\tau}, \quad (3.24)$$

d. h. die Polynome $P_{\lambda,\mu}(x,y)$ lassen sich rekursiv bestimmen, wenn nur die Nullmomente ${}_{\nu,0}C_{\varrho,0}$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, 2\lambda;\ \varrho = 0, 1, 2, \ldots, 2\mu$ gegeben sind.

Auch zwischen den Koeffizienten ${}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho}$ besteht eine einfache Bindung. Man erhält nach Gleichsetzen von (3.2) mit (3.22) durch Koeffizientenvergleich die Ansätze

$${}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho} = -\sum_{\tau=\varrho}^{\nu} {}_{\lambda,\nu}A_{\mu,\tau}\;{}_{\nu,\nu}\alpha_{\tau,\varrho} - \sum_{\varkappa=\nu+1}^{\lambda-1}\sum_{\tau=0}^{\varkappa} {}_{\lambda,\varkappa}A_{\mu,\tau}\;{}_{\varkappa,\nu}\alpha_{\tau,\varrho} - \sum_{\tau=0}^{\mu-1} {}_{\lambda,\lambda}A_{\mu,\tau}\;{}_{\lambda,\nu}\alpha_{\tau,\varrho} \quad (3.25)$$
$$\text{mit } \nu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda-1;\ \varrho = 0, 1, 2, \ldots, \nu$$

und

$${}_{\lambda,\lambda}\alpha_{\mu,\varrho} = -\sum_{\tau=\varrho}^{\mu-1} {}_{\lambda,\lambda}A_{\mu,\tau}\;{}_{\lambda,\lambda}\alpha_{\tau,\varrho}, \quad ({}_{\lambda,\lambda}\alpha_{\mu,\mu} = 1) \quad (3.25')$$
$$\text{mit } \varrho = 0, 1, 2, \ldots, \mu-1.$$

Wie im eindimensionalen Fall haben wir damit die beiden gleichwertigen Rekursionsverfahren (3.22) mit (3.23) und (3.24) sowie (3.2) in Verbindung mit (3.25) und (3.25′) kennen gelernt.

332.12 Ausgleichsansätze

Die im Ausgleichspolynom (3.5) auftretenden Koeffizienten $a_{\lambda,\mu}$ lauten gemäss (3.6)

$$a_{\lambda,\mu} = \frac{\sum\limits_{x,y} P_{\lambda,\mu}(x,y)\, w(x,y)}{\sum\limits_{x,y} [P_{\lambda,\mu}(x,y)]^2} = \frac{{}_{\lambda}M^*_{\mu}}{{}_{\lambda,\lambda}C_{\mu,\mu}}, \tag{3.26}$$

$$(\lambda \leqq l-1;\ \mu \leqq \lambda \text{ und } \lambda = l;\ \mu \leqq k), \text{ mit } g(x,y) \equiv 1.$$

Sind die Werte $\quad {}_{\lambda}M_{\mu} = \sum\limits_{x,y} x^{\lambda-\mu}\, y^{\mu}\, w(x,y) \qquad (3.27)$

bekannt, so genügen die Hilfsgrössen

$${}_{\lambda}M^*_{\mu} = \sum_{x,y} P_{\lambda,\mu}(x,y)\, w(x,y) \tag{3.28}$$

den Rekursionsgleichungen

$${}_{\lambda}M^*_{\mu} = {}_{\lambda}M_{\mu} - \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{\varrho=0}^{\nu} {}_{\lambda,\nu}A_{\mu,\varrho}\ {}_{\nu}M^*_{\varrho} - \sum_{\varrho=0}^{\mu-1} {}_{\lambda,\lambda}A_{\mu,\varrho}\ {}_{\lambda}M^*_{\varrho}, \tag{3.29}$$

für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, (l-1)$; $\mu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda$ und $\lambda = l$; $\mu = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Zur Darstellung des Ausgleichspolynoms $z_{l,k}(x,y)$ nach aufsteigenden Potenzprodukten wird

$$z_{l,k}(x,y) = \sum_{\lambda=0}^{l-1} \sum_{\mu=0}^{\lambda} {}_{l,\lambda}b_{k,\mu}\, x^{\lambda-\mu}\, y^{\mu} + \sum_{\mu=0}^{k} {}_{l,l}b_{k,\mu}\, x^{l-\mu}\, y^{\mu} \tag{3.30}$$

mit (3.5) gleichgesetzt, und es ergeben sich dann durch Koeffizientenvergleich nachstehende Relationen

$${}_{l,\lambda}b_{k,\mu} = \sum_{\varrho=\mu}^{\lambda} a_{\lambda,\varrho}\ {}_{\lambda,\lambda}\alpha_{\varrho,\mu} + \sum_{\nu=\lambda+1}^{l-1} \sum_{\varrho=0}^{\nu} a_{\nu,\varrho}\ {}_{\nu,\lambda}\alpha_{\varrho,\mu} + \sum_{\varrho=0}^{k} a_{l,\varrho}\ {}_{l,\lambda}\alpha_{\varrho,\mu}, \tag{3.31}$$

$$(\mu \leqq \lambda \leqq l-1),$$

$${}_{l,l}b_{k,\mu} = \sum_{\varrho=\mu}^{k} a_{l,\varrho}\ {}_{l,l}\alpha_{\varrho,\mu}, \quad (\mu \leqq k). \tag{3.31′}$$

Die Ausgleichspolynome $z_{l,k}(x,y)$ können auf zwei Arten ermittelt werden, nach (3.5) mit (3.2) und (3.26) einerseits und (3.30) mit (3.31) und (3.31′) anderseits; für die Auswertung müssen nur die ${}_{\nu,0}C_{\varrho,0}$, $(\nu \leqq 2\lambda,\ \varrho \leqq 2\mu)$ und die ${}_{\nu}M_{\varrho}$, $(\nu \leqq \lambda,\ \varrho \leqq \mu)$ gegeben sein.

332.13 Schema der numerischen Auswertung

Um die numerische Auswertung einfach und übersichtlich zu gestalten, bedient man sich mit Vorteil der beiden Rechenschemas IV und V auf den Seiten 102/103 und 104 (vgl. auch die analogen Schemas II und III im eindimensionalen Fall, Seiten 79 und 80).

332.14 Beurteilung der Güte der Ausgleichung

Die letzte Spalte des Schemas IV dient einer ersten Beurteilung der Güte der Ausgleichung. Wie im Abschnitt 232.14 bildet man

$$L_{l,k}^2 = \frac{1}{f} \sum_{x,y} [w(x,y) - z_{l,k}(x,y)]^2 = \frac{1}{f} \sum_{x,y} [u_{l,k}(x,y)]^2, \quad (3.32)$$

mit f = Anzahl Freiheitsgrade.

Für achsenparallele Rechtecksbereiche und für n = fest gilt beispielsweise:

$$f \begin{cases} = mn - \underbrace{\left\{\frac{l(l+1)}{2} + (k+1)\right\}}_{\substack{\text{Zahl}\\ \text{der Parameter}\\ a_{\lambda,\mu}}} - \underbrace{\frac{n}{2}(2m-n-3)}_{\substack{\text{Zusatzbedingung dafür, dass } f \text{ ver-}\\ \text{schwindet, wenn } (l,k) \text{ die grösst-}\\ \text{möglichen Werte annimmt:}\\ (l,k) \begin{cases} = (n, n-1), & \text{für } m > n,\\ = (m-1, m-1), & \text{für } m \leqq n.\end{cases}}}, & \text{für } m > n, \\ = mn - \left\{\frac{l(l+1)}{2} + (k+1)\right\} - \frac{m}{2}(2n-m-1), & \text{für } m \leqq n. \end{cases}$$

Wegen (3.5) und (3.26), sowie unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsbedingungen (3.21) ist

$$\sum_{x,y} [u_{l,k}(x,y)]^2 = \sum_{x,y} [w(x,y)]^2 - \left\{\sum_{\lambda=0}^{l-1} \sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{\lambda,\mu}\ {}_{\lambda}M_{\mu}^* + \sum_{\mu=0}^{k} a_{l,\mu}\ {}_{l}M_{\mu}^*\right\}. \quad (3.33)$$

Wird an Stelle des Ausgleichspolynoms $z_{l,k}(x,y)$ bzw. $z_{l,l}(x,y)$ das nächst höhere Polynom $z_{l,k+1}(x,y)$ bzw. $z_{l+1,0}(x,y)$ zur Ausgleichung verwendet, dann beträgt die dadurch erzielte Verbesserung nach (3.33)

$$\sum_{x,y} u_{l,k}^2(x,y) - \sum_{x,y} u_{l,k+1}^2(x,y) = a_{l,k+1}\ {}_lM_{k+1}^*,$$

oder

$$\sum_{x,y} u_{l,l}^2(x,y) - \sum_{x,y} u_{l+1,0}^2(x,y) = a_{l+1,0}\ {}_{l+1}M_0^*.$$

Die Berücksichtigung des nächst höheren Ausgleichspolynoms ist dann sinnvoll, wenn nach dem verallgemeinerten Kriterium von *G. J. Lidstone* (2.35)

$$L_{l,k+1}^2 < L_{l,k}^2 \text{ bzw. } L_{l+1,0}^2 < L_{l,l}^2 \tag{3.34}$$

ausfällt. Es kann sich hier natürlich nicht um eine endgültige Beurteilung der Güte der Ausgleichung handeln, dazu müssen weitere Kriterien herangezogen werden. Trotz dieses Vorbehaltes ist es aber dank (3.34) möglich, einen ersten Überblick über den Stand der Ausgleichung zu gewinnen, der umso wertvoller ist, als dazu keine ausgeglichenen Werte erforderlich sind.

332.2 Diskrete, äquidistante Argumente

Die Argumente (x_i,y_j), $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n_i)$ liegen regelmässig in der (x,y)-Ebene verteilt, d. h.

$$x_i = a,\ a+h,\ a+2h,\ \ldots,\ a+(m-1)h,$$
$$y_j = c,\ c+h',\ c+2h',\ \ldots,\ c+(n_i-1)h';$$

sie gehen durch die Transformationen

$$\xi_i = \frac{x_i - a}{h} \quad \text{und} \quad \eta_j = \frac{y_j - c}{h'} \tag{3.35}$$

in die Punkte des Einheitsgitters

$$\xi_i = 0, 1, 2, \ldots, (m-1);\ \eta_j = 0, 1, 2, \ldots, (n_\xi - 1) \qquad \text{über.}$$

Sind zu jedem ξ-Wert immer gleichviele η-Werte vorhanden, dann ist n_ξ eine nicht mehr von ξ abhängige, feste Zahl $n_\xi = n$, und dem Bereich B entspricht ein achsenparalleles Rechteck. Zur Vereinfachung der Darlegungen beschränken wir uns im folgenden ausschliesslich auf Rechtecksbereiche.

	(1)	${}_{0,0}C_{0,0}$	${}_{1,0}C_{0,0}$	${}_{1,0}C_{1,0}$	${}_{2,0}C_{0,0}$	${}_{2,0}C_{1,0}$	${}_{2,0}C_{2,0}$	${}_{0}M_0 = {}_{0}M_0^*$	S_1	$\sum_{x,y} w^2(x,y)$
$(1):{}_{0,0}C_{0,0}$	(2)	1	${}_{1,0}A_{0,0}$	${}_{1,0}A_{1,0}$	${}_{2,0}A_{0,0}$	${}_{2,0}A_{1,0}$	${}_{2,0}A_{2,0}$	$a_{0,0}$	S_2	$-a_{0,0}\ {}_{0}M_0^*$
	(3)		${}_{2,0}C_{0,0}$	${}_{2,0}C_{1,0}$	${}_{3,0}C_{0,0}$	${}_{3,0}C_{1,0}$	${}_{3,0}C_{2,0}$	${}_{1}M_0$	S_3	$\sum_{x,y} u_{0,0}^2(x,y)$
$(1)\cdot(-{}_{1,0}A_{0,0})$	(4)	$\underline{-{}_{1,0}A_{0,0}}$	$\underline{-{}_{1,0}A_{0,0}\ {}_{1,0}C_{0,0}}$	$\underline{-{}_{1,0}A_{0,0}\ {}_{1,0}C_{1,0}}$	$\underline{-{}_{1,0}A_{0,0}\ {}_{2,0}C_{0,0}}$	$\underline{-{}_{1,0}A_{0,0}\ {}_{2,0}C_{1,0}}$	$\underline{-{}_{1,0}A_{0,0}\ {}_{2,0}C_{2,0}}$	$\underline{-{}_{1,0}A_{0,0}\ {}_{0}M_0^*}$	$\underline{S_4}$	
$+$	(5)	${}_{1,0}\alpha_{0,0}$	${}_{1,1}C_{0,0}$	${}_{1,1}C_{1,0}$	${}_{2,1}C_{0,0}$	${}_{2,1}C_{1,0}$	${}_{2,1}C_{2,0}$	${}_{1}M_0^*$	S_5	
$(5):{}_{1,1}C_{0,0}$	(6)		1	${}_{1,1}A_{1,0}$	${}_{2,1}A_{0,0}$	${}_{2,1}A_{1,0}$	${}_{2,1}A_{2,0}$	$a_{1,0}$	S_6	$-a_{1,0}\ {}_{1}M_0^*$
	(7)			${}_{2,0}C_{2,0}$	${}_{3,0}C_{1,0}$	${}_{3,0}C_{2,0}$	${}_{3,0}C_{3,0}$	${}_{1}M_1$	S_7	$\sum_{x,y} u_{1,0}^2(x,y)$
$(1)\cdot(-{}_{1,0}A_{1,0})$	(8)	$-{}_{1,0}A_{1,0}$		$-{}_{1,0}A_{1,0}\ {}_{1,0}C_{1,0}$	$-{}_{1,0}A_{1,0}\ {}_{2,0}C_{0,0}$	$-{}_{1,0}A_{1,0}\ {}_{2,0}C_{1,0}$	$-{}_{1,0}A_{1,0}\ {}_{2,0}C_{2,0}$	$-{}_{1,0}A_{1,0}\ {}_{0}M_0^*$	S_8	
$(5)\cdot(-{}_{1,1}A_{1,0})$	(9)	$\underline{-{}_{1,1}A_{1,0}\ {}_{1,0}\alpha_{0,0}}$	$\underline{-{}_{1,1}A_{1,0}}$	$\underline{-{}_{1,1}A_{1,0}\ {}_{1,1}C_{1,0}}$	$\underline{-{}_{1,1}A_{1,0}\ {}_{2,1}C_{0,0}}$	$\underline{-{}_{1,1}A_{1,0}\ {}_{2,1}C_{1,0}}$	$\underline{-{}_{1,1}A_{1,0}\ {}_{2,1}C_{2,0}}$	$\underline{-{}_{1,1}A_{1,0}\ {}_{1}M_0^*}$	$\underline{S_9}$	
$+$	(10)	${}_{1,0}\alpha_{1,0}$	${}_{1,1}\alpha_{1,0}$	${}_{1,1}C_{1,1}$	${}_{2,1}C_{0,1}$	${}_{2,1}C_{1,1}$	${}_{2,1}C_{2,1}$	${}_{1}M_1^*$	S_{10}	
$(10):{}_{1,1}C_{1,1}$	(11)			1	${}_{2,1}A_{0,1}$	${}_{2,1}A_{1,1}$	${}_{2,1}A_{2,1}$	$a_{1,1}$	S_{11}	$-a_{1,1}\ {}_{1}M_1^*$
	(12)				${}_{4,0}C_{0,0}$	${}_{4,0}C_{1,0}$	${}_{4,0}C_{2,0}$	${}_{2}M_0$	S_{12}	$\sum_{x,y} u_{1,1}^2(x,y)$
$(1)\cdot(-{}_{2,0}A_{0,0})$	(13)	$-{}_{2,0}A_{0,0}$			$-{}_{2,0}A_{0,0}\ {}_{2,0}C_{0,0}$	$-{}_{2,0}A_{0,0}\ {}_{2,0}C_{1,0}$	$-{}_{2,0}A_{0,0}\ {}_{2,0}C_{2,0}$	$-{}_{2,0}A_{0,0}\ {}_{0}M_0^*$	S_{13}	
$(5)\cdot(-{}_{2,1}A_{0,0})$	(14)	$-{}_{2,1}A_{0,0}\ {}_{1,0}\alpha_{0,0}$	$-{}_{2,1}A_{0,0}$		$-{}_{2,1}A_{0,0}\ {}_{2,1}C_{0,0}$	$-{}_{2,1}A_{0,0}\ {}_{2,1}C_{1,0}$	$-{}_{2,1}A_{0,0}\ {}_{2,1}C_{2,0}$	$-{}_{2,1}A_{0,0}\ {}_{1}M_0^*$	S_{14}	
$(10)\cdot(-{}_{2,1}A_{0,1})$	(15)	$\underline{-{}_{2,1}A_{0,1}\ {}_{1,0}\alpha_{1,0}}$	$\underline{-{}_{2,1}A_{0,1}\ {}_{1,1}\alpha_{1,0}}$	$\underline{-{}_{2,1}A_{0,1}}$	$\underline{-{}_{2,1}A_{0,1}\ {}_{2,1}C_{0,1}}$	$\underline{-{}_{2,1}A_{0,1}\ {}_{2,1}C_{1,1}}$	$\underline{-{}_{2,1}A_{0,1}\ {}_{2,1}C_{2,1}}$	$\underline{-{}_{2,1}A_{0,1}\ {}_{1}M_1^*}$	$\underline{S_{15}}$	
$+$	(16)	${}_{2,0}\alpha_{0,0}$	${}_{2,1}\alpha_{0,0}$	${}_{2,1}\alpha_{0,1}$	${}_{2,2}C_{0,0}$	${}_{2,2}C_{1,0}$	${}_{2,2}C_{2,0}$	${}_{2}M_0^*$	S_{16}	
$(16):{}_{2,2}C_{0,0}$	(17)				1	${}_{2,2}A_{1,0}$	${}_{2,2}A_{2,0}$	$a_{2,0}$	S_{17}	$-a_{2,0}\ {}_{2}M_0^*$
	(18)					${}_{4,0}C_{2,0}$	${}_{4,0}C_{3,0}$	${}_{2}M_1$	S_{18}	$\sum_{x,y} u_{2,0}^2(x,y)$
$(1)\cdot(-{}_{2,0}A_{1,0})$	(19)	$-{}_{2,0}A_{1,0}$				$-{}_{2,0}A_{1,0}\ {}_{2,0}C_{1,0}$	$-{}_{2,0}A_{1,0}\ {}_{2,0}C_{2,0}$	$-{}_{2,0}A_{1,0}\ {}_{0}M_0^*$	S_{19}	
$(5)\cdot(-{}_{2,1}A_{1,0})$	(20)	$-{}_{2,1}A_{1,0}\ {}_{1,0}\alpha_{0,0}$	$-{}_{2,1}A_{1,0}$			$-{}_{2,1}A_{1,0}\ {}_{2,1}C_{1,0}$	$-{}_{2,1}A_{1,0}\ {}_{2,1}C_{2,0}$	$-{}_{2,1}A_{1,0}\ {}_{1}M_0^*$	S_{20}	
$(10)\cdot(-{}_{2,1}A_{1,1})$	(21)	$-{}_{2,1}A_{1,1}\ {}_{1,0}\alpha_{1,0}$	$-{}_{2,1}A_{1,1}\ {}_{1,1}\alpha_{1,0}$	$-{}_{2,1}A_{1,1}$		$-{}_{2,1}A_{1,1}\ {}_{2,1}C_{1,1}$	$-{}_{2,1}A_{1,1}\ {}_{2,1}C_{2,1}$	$-{}_{2,1}A_{1,1}\ {}_{1}M_1^*$	S_{21}	
$(16)\cdot(-{}_{2,2}A_{1,0})$	(22)	$\underline{-{}_{2,2}A_{1,0}\ {}_{2,0}\alpha_{0,0}}$	$\underline{-{}_{2,2}A_{1,0}\ {}_{2,1}\alpha_{0,0}}$	$\underline{-{}_{2,2}A_{1,0}\ {}_{2,1}\alpha_{0,1}}$	$\underline{-{}_{2,2}A_{1,0}}$	$\underline{-{}_{2,2}A_{1,0}\ {}_{2,2}C_{1,0}}$	$\underline{-{}_{2,2}A_{1,0}\ {}_{2,2}C_{2,0}}$	$\underline{-{}_{2,2}A_{1,0}\ {}_{2}M_0^*}$	$\underline{S_{22}}$	
$+$	(23)	${}_{2,0}\alpha_{1,0}$	${}_{2,1}\alpha_{1,0}$	${}_{2,1}\alpha_{1,1}$	${}_{2,2}\alpha_{1,0}$	${}_{2,2}C_{1,1}$	${}_{2,2}C_{2,1}$	${}_{2}M_1^*$	S_{23}	
$(23):{}_{2,2}C_{1,1}$	(24)					1	${}_{2,2}A_{2,1}$	$a_{2,1}$	S_{24}	$-a_{2,1}\ {}_{2}M_1^*$
	(25)						${}_{4,0}C_{4,0}$	${}_{2}M_2$	S_{25}	$\sum_{x,y} u_{2,1}^2(x,y)$
$(1)\cdot(-{}_{2,0}A_{2,0})$	(26)	$-{}_{2,0}A_{2,0}$					$-{}_{2,0}A_{2,0}\ {}_{2,0}C_{2,0}$	$-{}_{2,0}A_{2,0}\ {}_{0}M_0^*$	S_{26}	
$(5)\cdot(-{}_{2,1}A_{2,0})$	(27)	$-{}_{2,1}A_{2,0}\ {}_{1,0}\alpha_{0,0}$	$-{}_{2,1}A_{2,0}$				$-{}_{2,1}A_{2,0}\ {}_{2,1}C_{2,0}$	$-{}_{2,1}A_{2,0}\ {}_{1}M_0^*$	S_{27}	
$(10)\cdot(-{}_{2,1}A_{2,1})$	(28)	$-{}_{2,1}A_{2,1}\ {}_{1,0}\alpha_{1,0}$	$-{}_{2,1}A_{2,1}\ {}_{1,1}\alpha_{1,0}$	$-{}_{2,1}A_{2,1}$			$-{}_{2,1}A_{2,1}\ {}_{2,1}C_{2,1}$	$-{}_{2,1}A_{2,1}\ {}_{1}M_1^*$	S_{28}	
$(16)\cdot(-{}_{2,2}A_{2,0})$	(29)	$-{}_{2,2}A_{2,0}\ {}_{2,0}\alpha_{0,0}$	$-{}_{2,2}A_{2,0}\ {}_{2,1}\alpha_{0,0}$	$-{}_{2,2}A_{2,0}\ {}_{2,1}\alpha_{0,1}$	$-{}_{2,2}A_{2,0}$		$-{}_{2,2}A_{2,0}\ {}_{2,2}C_{2,0}$	$-{}_{2,2}A_{2,0}\ {}_{2}M_0^*$	S_{29}	
$(23)\cdot(-{}_{2,2}A_{2,1})$	(30)	$\underline{-{}_{2,2}A_{2,1}\ {}_{2,0}\alpha_{1,0}}$	$\underline{-{}_{2,2}A_{2,1}\ {}_{2,1}\alpha_{1,0}}$	$\underline{-{}_{2,2}A_{2,1}\ {}_{2,1}\alpha_{1,1}}$	$\underline{-{}_{2,2}A_{2,1}\ {}_{2,2}\alpha_{1,0}}$	$\underline{-{}_{2,2}A_{2,1}}$	$\underline{-{}_{2,2}A_{2,1}\ {}_{2,2}C_{2,1}}$	$\underline{-{}_{2,2}A_{2,1}\ {}_{2}M_1^*}$	$\underline{S_{30}}$	
$+$	(31)	${}_{2,0}\alpha_{2,0}$	${}_{2,1}\alpha_{2,0}$	${}_{2,1}\alpha_{2,1}$	${}_{2,2}\alpha_{2,0}$	${}_{2,2}\alpha_{2,1}$	${}_{2,2}C_{2,2}$	${}_{2}M_2^*$	S_{31}	
$(31):{}_{2,2}C_{2,2}$	(32)						1	$a_{2,2}$	S_{32}	$-a_{2,2}\ {}_{2}M_2^*$
										$\sum_{x,y} u_{2,2}^2(x,y)$

Schema V

$a_{0,0} = {}_{0,0}b_{0,0}$					
$+{}_{1,0}\alpha_{0,0}\ a_{1,0} = {}_{1,0}b_{0,0}$	$a_{1,0} = {}_{1,1}b_{0,0}$				
$+{}_{1,0}\alpha_{1,0}\ a_{1,1} = {}_{1,0}b_{1,0}$	$+{}_{1,1}\alpha_{1,0}\ a_{1,1} = {}_{1,1}b_{1,0}$	$a_{1,1} = {}_{1,1}b_{1,1}$			
$+{}_{2,0}\alpha_{0,0}\ a_{2,0} = {}_{2,0}b_{0,0}$	$+{}_{2,1}\alpha_{0,0}\ a_{2,0} = {}_{2,1}b_{0,0}$	$+{}_{2,1}\alpha_{0,1}\ a_{2,0} = {}_{2,1}b_{0,1}$	$a_{2,0} = {}_{2,2}b_{0,0}$		
$+{}_{2,0}\alpha_{1,0}\ a_{2,1} = {}_{2,0}b_{1,0}$	$+{}_{2,1}\alpha_{1,0}\ a_{2,1} = {}_{2,1}b_{1,0}$	$+{}_{2,1}\alpha_{1,1}\ a_{2,1} = {}_{2,1}b_{1,1}$	$+{}_{2,2}\alpha_{1,0}\ a_{2,1} = {}_{2,2}b_{1,0}$	$a_{2,1} = {}_{2,2}b_{1,1}$	
$+{}_{2,0}\alpha_{2,0}\ a_{2,2} = {}_{2,0}b_{2,0}$	$+{}_{2,1}\alpha_{2,0}\ a_{2,2} = {}_{2,1}b_{2,0}$	$+{}_{2,1}\alpha_{2,1}\ a_{2,2} = {}_{2,1}b_{2,1}$	$+{}_{2,2}\alpha_{2,0}\ a_{2,2} = {}_{2,2}b_{2,0}$	$+{}_{2,2}\alpha_{2,1}\ a_{2,2} = {}_{2,2}b_{2,1}$	$a_{2,2} = {}_{2,2}b_{2,2}$

332.21 Orthogonale Polynome

Nach (3.18) und (3.18′) gilt

$$ {}_{\lambda}C_{\mu} = \sum_{x,y} x^{\lambda-\mu}\, y^{\mu}\, g(x,y) = \sum_{\xi,\eta} \xi^{\lambda-\mu}\, \eta^{\mu}\, g(\xi,\eta)\,, \tag{3.36} $$

oder ohne Gewichtsfunktion

$$ {}_{\lambda}C_{\mu} = \sum_{x} x^{\lambda-\mu} \sum_{y} y^{\mu} = \sum_{\xi=0}^{m-1} \xi^{\lambda-\mu} \sum_{\eta=0}^{n-1} \eta^{\mu}\,. \tag{3.36′} $$

Mit diesen Grössen könnten die Koeffizienten ${}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho}$ der orthogonalen Polynome $P_{\lambda,\mu}(\xi,\eta)$ nach der Determinanten-Methode (3.9) ermittelt werden. Diesen Arbeitsgang kann man sich ersparen, wenn man bedenkt, dass nach (3.16) für Rechtecksbereiche die Bindung

$$ P_{\lambda,\mu}(\xi,\eta) = P_{\lambda-\mu}(\xi)\, P^{*}_{\mu}(\eta) \tag{3.37} $$

besteht, wo $P_{\lambda-\mu}(\xi)$ bzw. $P^{*}_{\mu}(\eta)$ die gemäss (2.39) definierten eindimensionalen orthogonalen Polynome darstellen.

Die ersten Ansätze lauten:

$$ \begin{aligned} P_{0,0}(\xi,\eta) &= 1 \\ P_{1,0}(\xi,\eta) &= -\tfrac{1}{2}(m-1) + \xi \\ P_{1,1}(\xi,\eta) &= -\tfrac{1}{2}(n-1) + \eta \\ P_{2,0}(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{6}(m^2-3m+2) - (m-1)\,\xi + \xi^2 \\ P_{2,1}(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(m-1)(n-1) - \tfrac{1}{2}(n-1)\,\xi - \tfrac{1}{2}(m-1)\,\eta + \xi\eta \\ P_{2,2}(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{6}(n^2-3n+2) - (n-1)\,\eta + \eta^2 \\ P_{3,0}(\xi,\eta) &= -\tfrac{1}{20}(m^3-6m^2+11m-6) + \tfrac{1}{10}(6m^2-15m+11)\,\xi \\ &\quad -\tfrac{3}{2}(m-1)\,\xi^2 + \xi^3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3.37′} $$

332.22 Ausgleichsansätze

Zur Berechnung der Koeffizienten $a_{\lambda,\mu}$ im Ausgleichspolynom

$$ z_{l,k}(\xi,\eta) = \sum_{\lambda=0}^{l-1} \sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{\lambda,\mu}\, P_{\lambda-\mu}(\xi)\, P^{*}_{\mu}(\eta) + \sum_{\mu=0}^{k} a_{l,\mu}\, P_{l-\mu}(\xi)\, P^{*}_{\mu}(\eta)\,, \tag{3.38} $$

$(l = 0, 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots, l)$, bildet man nach (3.26) und (3.16)

$$ a_{\lambda,\mu} = \frac{\sum_{\xi} \sum_{\eta} P_{\lambda-\mu}(\xi)\, P^{*}_{\mu}(\eta)\, w(\xi,\eta)}{\{\sum_{\xi} [P_{\lambda-\mu}(\xi)]^2\}\, \{\sum_{\eta} [P^{*}_{\mu}(\eta)]^2\}}\,. \tag{3.39} $$

34 Eigenschaften der orthogonalen Polynome für Rechtecksbereiche

Die orthogonalen Polynome *zweier* Veränderlicher $P_{\lambda,\mu}(x,y)$ lassen sich – wie verschiedentlich erwähnt – nach (3.16) als Produkt der beiden orthogonalen Polynome *einer* Variablen $P_{\lambda-\mu}(x)$ und $P^*_\mu(y)$ darstellen, falls der Bereich B ein achsenparalleles Rechteck und die Funktion F so beschaffen ist, dass $dF \geqq 0$ und $dF = dF_x\, dF_y$ ist.

341 Herleitung von Rekursionsbeziehungen

Abgesehen von der sehr allgemeinen für beliebige Argumente und Bereiche B gültigen Rekursionsbeziehung (3.22) ergeben sich für Rechtecksbereiche spezifische Bindungen zwischen den orthogonalen Polynomen zweier Veränderlichen.

Wegen $\quad P_{\lambda-\mu}(x) = P_{\lambda-\mu,0}(x,y)$ und $P^*_\mu(y) = P_{\mu,\mu}(x,y)$

gilt nach (3.16) neben

$$P_{\lambda,\mu}(x,y) = P_{\lambda-\mu}(x)\, P^*_\mu(y)$$

auch

$$P_{\lambda,\mu}(x,y) = P_{\lambda-\mu,0}(x,y)\, P_{\mu,\mu}(x,y)\,. \tag{3.40}$$

Um im folgenden die beiden Varianten kontinuierlicher $[a \leqq x \leqq b;\ c \leqq y \leqq d]$ und diskreter, äquidistanter [1]) Argumente $[\xi = 0, 1, 2, \ldots, (m-1);\ \eta = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)]$ gleichzeitig erfassen zu können, bedienen wir uns einer vereinfachten Bezeichnungsweise. Es bedeuten $P_{\lambda,\mu}$ orthogonale Polynome in zwei Veränderlichen und P_λ bzw. P^*_μ solche in einer Veränderlichen; welcher Natur die Argumente sind, bleibt dabei offen.

In (3.40) ersetzt man $P_{\lambda-\mu,0} = P_{\lambda-\mu}$ durch die anderweitig gefundene Rekursionsbeziehung (2.43) und erhält für $0 \leqq \mu \leqq \lambda-2;\ \lambda \geqq 2$

$$P_{\lambda,\mu} = P_{1,0}\, P_{\lambda-1,\mu} - K_1\, P_{\lambda-2,\mu} \tag{3.41}$$

oder, anders gruppiert

$$P_{\lambda,\mu} = P_{\lambda-\mu-1,0}\, P_{\mu+1,\mu} - K_1\, P_{\lambda-\mu-2,0}\, P_{\mu,\mu}\,. \tag{3.41'}$$

---

[1]) Nach (3.35) auf ξ,η transformiert.

Dabei ist
$$K_1 = \frac{(\lambda-\mu-1)^2\,(a-b)^2}{4\,[2(\lambda-\mu)-1]\,[2(\lambda-\mu)-3]}$$
nach (2.43′) für kontinuierliche Argumente x oder
$$K_1 = \frac{(\lambda-\mu-1)^2\,[m^2-(\lambda-\mu-1)^2]}{4\,[2(\lambda-\mu)-1]\,[2(\lambda-\mu)-3]}$$
nach (2.43″) für diskrete, äquidistante Argumente ξ.

Die beiden Ansätze (3.41) und (3.41′) unterscheiden sich äusserlich für $0<\mu<\lambda-2$, sind aber vollständig gleichwertig.

Um auch für $\mu=\lambda-1$ oder $\mu=\lambda$ einfache Rekursionen zu besitzen, substituieren wir $P_{\mu,\mu}=P^*_\mu$ in (3.40) und finden auf analoge Weise für $2\leqq\mu\leqq\lambda;\ \lambda\geqq 2$
$$P_{\lambda,\mu} = P_{1,1}P_{\lambda-1,\mu-1} - K_2 P_{\lambda-2,\mu-2} \tag{3.42}$$
oder, anders zusammengefasst
$$P_{\lambda,\mu} = P_{\lambda-(\mu-1),1}P_{\mu-1,\mu-1} - K_2 P_{\lambda-\mu,0}P_{\mu-2,\mu-2}\,. \tag{3.42′}$$
Nun bedeutet
$$K_2 = \frac{(\mu-1)^2\,(c-d)^2}{4\,(2\mu-1)\,(2\mu-3)}$$
nach (2.43′) für kontinuierliche Argumente y oder
$$K_2 = \frac{(\mu-1)^2\,[n^2-(\mu-1)^2]}{4\,(2\mu-1)\,(2\mu-3)}$$
nach (2.43″) für diskrete, äquidistante Argumente η.

Trotz der formalen Verschiedenheit, speziell für $2<\mu<\lambda$, sind auch (3.42) und (3.42′) miteinander äquivalent.

Vorerwähnte Beziehungen stellen recht praktische Rekursionen dar, mit denen alle Polynome höheren Grades bestimmt werden können, falls ausser $P_{0,0}\equiv 1$ auch noch $P_{1,0}$, $P_{1,1}$ und $P_{2,1}$ bekannt sind.

342 Symmetrie-Eigenschaften

Auf Grund der Symmetrie-Eigenschaften der orthogonalen Polynome einer Variablen lassen sich auch die Verhältnisse bei den zweidimensionalen Polynomen rasch überblicken. Wird nämlich durch die Transformationen (2.45) der Ursprung in den Intervall-Mittelpunkt verlegt, so sind gewisse Vereinfachungen möglich. Insbesondere

verschwinden die bei der Determinanten-Methode eingeführten Nullmomente (3.10) bzw. (3.18′) für kontinuierliche und diskrete, äquidistante Argumente, falls mindestens λ oder μ ungerade ist.

Dadurch reduziert sich natürlich der Rechenaufwand zur Ermittlung der Koeffizienten ${}_{\lambda,\nu}\alpha_{\mu,\varrho}$, da die meisten Elemente der Determinanten (3.9) Null werden.

Wie im eindimensionalen Fall gelten dann für die transformierten Variablen mit Berücksichtigung von (2.46) und (2.46′) nach (3.16) die Symmetriebeziehungen:

$$\begin{aligned} P_{\lambda,\mu}(-,+) &= (-1)^{\lambda-\mu} P_{\lambda,\mu}(+,+), \\ P_{\lambda,\mu}(+,-) &= (-1)^{\mu} P_{\lambda,\mu}(+,+), \\ P_{\lambda,\mu}(-,-) &= (-1)^{\lambda} P_{\lambda,\mu}(+,+). \end{aligned} \tag{3.43}$$

An Stelle der Argumente x^*, y^* oder ξ^*, η^* wurde nur deren Vorzeichen gesetzt, sodass (3.43) für kontinuierliche und für diskrete äquidistante Argumente beansprucht werden kann.

35 Numerische Auswertung

Ein praktisches Beispiel über die Konstruktion einer schweizerischen Sterbefläche möge die vorangehenden theoretischen Darlegungen verdeutlichen. Es sei aber auch auf eine Abhandlung von *P. Lorenz* [33] verwiesen, in welcher eine Selektionssterbetafel für Invalidierte mittels zweidimensionaler orthogonaler Polynome ausgeglichen wurde.

351 Problemstellung und Grundlagen

Die gewöhnlichen Sterbetafeln (auch Periodensterbetafeln genannt) geben für eine bestimmte Beobachtungsperiode die Mortalität einer Personengesamtheit nach Geschlecht und Alter wieder. Bekanntlich verändert sich aber die Sterblichkeit mit der Zeit. Die Frage ist daher berechtigt, welcher Gesetzmässigkeit die Mortalität der Geschlechter in Abhängigkeit vom Alter x und von der Zeit t unterliegt.

Betrachtet man die amtlichen schweizerischen Volkssterbetafeln als Stichproben für gewisse Zeitpunkte, dann kann mit Hilfe der zweidimensionalen Ausgleichsrechnung eine diesen Werten bestangepasste Fläche, die sogenannte Sterbefläche über der xt-Ebene konstruiert werden.

Als Grundlage für unsere Untersuchungen wählen wir die rohen, einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten für Männer, und zwar für das Altersintervall $20 \leqq x \leqq 70$ und für die in Tabelle 1 zusammengestellten acht schweizerischen Volkssterbetafeln.

Die $m = 51$ diskreten Altersargumente $x = 20, 21, \ldots, 70$ liegen äquidistant im Abstand 1 auseinander, während die $n = 8$ diskreten Argumente in der Richtung der Zeitachse $t = 0; 6{,}5; \ldots; 72{,}5$ nicht äquidistant sind. In der xt-Ebene bilden die erwähnten Argumente ein rechteckiges Punktgitter, sodass nach der im Abschnitt 331.1 bewiesenen Aussage (3.16) die zweidimensionalen orthogonalen Polynome $P_{\lambda,\mu}(x,t)$ in das Produkt der beiden eindimensionalen Polynome $P_{\lambda-\mu}(x)$ und $P^*_{\mu}(t)$ zerlegt werden können.

Die rechnerische Arbeit liesse sich weiter vereinfachen, wenn die nicht äquidistanten Argumente in der Zeitrichtung wenigstens symmetrisch liegen würden in bezug auf einen Mittelpunkt. Dann käme man nämlich zufolge der Symmetrie-Eigenschaft (2.50) mit der halben Anzahl von Polynomwerten $P^*_{\mu}(t)$ aus.

Durch unwesentliche, für praktische Belange nicht ins Gewicht fallende Korrekturen der Zeitargumente kann die gewünschte Symmetrie erzwungen werden. Die t-Argumente (Tabelle 1, Spalte 3) gehen somit in die korrigierten t^* (Spalte 4) über; letztere transformieren wir weiter gemäss Ansatz

$$\tau = \frac{t^* - 37{,}5}{5}. \tag{3.44}$$

Grundlagen

1 Sterbetafel SM	Tafel-mitttelpunkt	Argumente		
		t	t^*	$\tau = \frac{t^* - 37{,}5}{5}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1876/80	1. 7. 1878	0	2,5	— 7
1881/88	1. 1. 1885	6,5	7,5	— 6
1889/00	1. 1. 1895	16,5	17,5	— 4
1901/10	1. 1. 1906	27,5	27,5	— 2
1921/30	1. 1. 1926	47,5	47,5	2
1931/41	1. 7. 1936	58,0	57,5	4
1941/50	1. 1. 1946	67,5	67,5	6
1948/53	1. 1. 1951	72,5	72,5	7

352 Bestimmung der orthogonalen Polynome

Analog wie für die Zeitargumente üben wir auf die Altersargumente x die Transformationen (2.36) und (2.45) aus und erhalten

$$\xi = x - 45; \tag{3.45}$$

die neue Argumentenfolge erschliesst jetzt den Bereich $-25\ (1) + 25$. Im Tabellenwerk *Pearson and Hartley* [35] sind die Polynomwerte $P_{\lambda-\mu}(\xi)$ tabelliert für die 26 äquidistanten Argumente $\xi = -25, -24, \ldots, 0$ und für die Grade $\lambda - \mu = 1, 2, \ldots, 6$. Vermöge der Symmetrie-Eigenschaften (2.46′) sind die Polynomwerte auch für positive ξ-Argumente bekannt.

Zur Ermittlung der (nur von der Zeit abhängigen) orthogonalen Polynome $P^*_\mu(\tau)$ stützen wir uns auf das im Abschnitt 232.1 dargelegte Verfahren.

Tab. 2 zeigt die Berechnung der Nullmomente $C_{\nu,0}$ ($\nu = 0, 2, 4, 6, 8$); für ungerade ν verschwindet $C_{\nu,0}$ gemäss (2.48).

Berechnung der Nullmomente $C_{\nu,0}$

2 τ	τ^0	τ^2	τ^4	τ^6	τ^8
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
2	1	4	16	64	256
4	1	16	256	4 096	65 536
6	1	36	1296	46 656	1 679 616
7	1	49	2401	117 649	5 764 801
$\sum$	4	105	3969	168 465	7 510 209
$C_{\nu,0} = 2\sum$	$C_{0,0} = 8$	$C_{2,0} = 210$	$C_{4,0} = 7938$	$C_{6,0} = 336\,930$	$C_{8,0} = 15\,020\,418$

Diese $C_{\nu,0}$-Werte setzen wir in Schema II (Seite 79) ein, und daraus ergeben sich die Koeffizienten $\alpha^*_{\mu,\nu}$ der gesuchten orthogonalen Polynome

$$P^*_\mu(\tau) = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \alpha^*_{\mu,\nu}\, \tau^\nu + \tau^\mu; \tag{3.46}$$

speziell also

$$\begin{aligned} P^*_0(\tau) &= 1 \\ P^*_1(\tau) &= \tau \\ P^*_2(\tau) &= -\tfrac{105}{4} + \tau^2 \\ P^*_3(\tau) &= -\tfrac{189}{5}\,\tau + \tau^3 \\ P^*_4(\tau) &= \tfrac{645\,288}{1\,617} - \tfrac{85\,705}{1\,617}\,\tau^2 + \tau^4. \end{aligned} \tag{3.46′}$$

Wie dies für diskrete, äquidistante Argumente üblich ist, stellen wir auch die Werte für die Polynome (3.46′) in einer Tabelle zusammen.

Polynomwerte $c_\mu^* P_\mu^*(\tau)$

3 τ	$P_1^*(\tau)$	$4\,P_2^*(\tau)$	$\frac{5}{2}\,P_3^*(\tau)$	$\frac{1617}{20}\,P_4^*(\tau)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
—7	—7	91	—196	16 408
—6	—6	39	27	—17 223
—4	—4	—41	218	—15 602
—2	—2	—89	169	16 417
$\sum_\tau [P_\mu^*(\tau)]^2$	210	38 808	230 460	2 157 588 972
c_μ^*	1	4	$\frac{5}{2}$	$\frac{1617}{20}$

Die eingetragenen Polynomwerte sind mit dem Faktor c_μ^* multipliziert. Diese Konstante hat bekanntlich keinen Einfluss auf die Ausgleichung und wurde jeweils so gewählt, dass die Polynomwerte möglichst klein, aber noch ganzzahlig ausfallen.

353 Bestimmung der Ausgleichspolynome

Nach (3.5) und (3.16) gilt

$$z_{l,k}(\xi,\tau) = \sum_{\lambda=0}^{l-1} \sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{\lambda,\mu} P_{\lambda-\mu}(\xi)\, P_\mu^*(\tau) + \sum_{\mu=0}^{k} a_{l,\mu} P_{l-\mu}(\xi)\, P_\mu^*(\tau)\,, \quad (3.47$$

mit

$$a_{\lambda,\mu} = \frac{\sum_\xi \sum_\tau P_{\lambda-\mu}(\xi)\, P_\mu^*(\tau)\, w(\xi,\tau)}{\{\sum_\xi [P_{\lambda-\mu}(\xi)]^2\}\,\{\sum_\tau [P_\mu^*(\tau)]^2\}}\,. \quad (3.48)$$

Die Berechnung der Koeffizienten $a_{\lambda,\mu}$ nach (3.48) erfordert die Kenntnis der Summen

$$\sum_{\xi=-25}^{+25} \sum_\tau P_{\lambda-\mu}(\xi)\, P_\mu^*(\tau)\, w(\xi,\tau)\,, \quad (3.49)$$

wo unter $\sum_\tau$ die Summation über die Argumente $\tau = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 7$

zu verstehen ist. Zufolge der Symmetrieeigenschaften für äquidistante Argumente (2.46′) sowie für nicht äquidistante, aber symmetrisch gelegene Argumente (2.50) lässt sich (3.49) – analog wie (2.52) im eindimensionalen Fall – mit den Hilfsgrössen

$$\begin{aligned} \Delta_{\lambda-\mu} &= w(-\xi, \pm\tau) + (-1)^{\lambda-\mu} w(+\xi, \pm\tau) \\ \Delta^*_{\mu} &= w(\pm\xi, -\tau) + (-1)^{\mu} w(\pm\xi, +\tau) \\ \Delta^*_{\mu}(\Delta_{\lambda-\mu}) &= [w(-\xi, -\tau) + (-1)^{\lambda-\mu} w(+\xi, -\tau)] + \\ &\quad + (-1)^{\mu}[w(-\xi, +\tau) + (-1)^{\lambda-\mu} w(+\xi, +\tau)] \end{aligned} \tag{3.50}$$

wie folgt darstellen

$$\sum_{\xi=-25}^{+25} \sum_{\tau} P_{\lambda-\mu}(\xi)\, P^*_{\mu}(\tau)\, w(\xi,\tau) = \sum_{\xi=+1}^{+25} \sum_{\tau}{}' P_{\lambda-\mu}(-\xi)\, P^*_{\mu}(-\tau)\, \Delta^*_{\mu}(\Delta_{\lambda-\mu}) + \\ + \sum_{\tau}{}' P_{\lambda-\mu}(0)\, P^*_{\mu}(-\tau)\, \Delta^*_{\mu}; \tag{3.51}$$

dabei bedeutet jetzt $\sum_{\tau}{}'$ die Summation über die positiven Argumente $\tau = +2, +4, +6, +7$.

Je nachdem ob $\lambda-\mu$ und μ gerade oder ungerade sind, bilden die Hilfsgrössen (3.50) «reine» oder «gemischte» Summen und Differenzen. Es empfiehlt sich deshalb, passende Summen- und Differenzentabellen anzulegen. Über deren schematische Anordnung orientieren nachstehende Übersichten, die in zwei- (Fälle *a)* und *b)*) bzw. vierfacher Ausführung (Fälle *a)* bis *d)*) anzufertigen sind.

Hilfsgrössen $\Delta_{\lambda-\mu}$

a) $\lambda-\mu =$ gerade (Summen) *b)* $\lambda-\mu =$ ungerade (Differenzen)

4 ξ \ τ	—7	—6	—4	—2	2	4	6	7	$\sum_{\tau}$
—25									
—24									
⋮									
—1									
0									
$\sum_{\xi}$									

Hilfsgrössen $\Delta^*_\mu(\Delta_{\lambda-\mu})$

a) $\lambda-\mu =$ gerade, $\mu =$ gerade
b) $\lambda-\mu =$ ungerade, $\mu =$ gerade
c) $\lambda-\mu =$ gerade, $\mu =$ ungerade
d) $\lambda-\mu =$ ungerade, $\mu =$ ungerade

$5 \backslash \tau$ / ξ	—7	—6	—4	—2
—25				
—24				
⋮				
—1				
0				

Die Koeffizienten $a_{\lambda,\mu}$ können nun in einem einzigen Arbeitsgang berechnet werden und lauten:

$a_{0,0} = 1\,839{,}112\,745$	$a_{3,0} = 0{,}122\,295$	$a_{4,2} = -0{,}000\,383$
$a_{1,0} = 99{,}573\,575$	$a_{3,1} = -0{,}020\,590$	$a_{4,3} = 0{,}001\,883$
$a_{1,1} = -90{,}553\,035$	$a_{3,2} = -0{,}056\,712$	$a_{4,4} = 0{,}000\,535$
$a_{2,0} = 1{,}277\,506$	$a_{3,3} = 0{,}029\,896$	$a_{5,0} = 0{,}000\,832$
$a_{2,1} = -2{,}831\,024$	$a_{4,0} = 0{,}003\,911$	$a_{5,1} = -0{,}000\,122$
$a_{2,2} = -0{,}644\,073$	$a_{4,1} = -0{,}003\,247$	

Die Frage, bis zu welchem Grad das Ausgleichspolynom (3.47) anzusetzen ist, wurde in erster Näherung mit dem Kriterium von *Lidstone* (3.34) beurteilt; wir entschieden uns, die Ausgleichung mit dem zweiten Ausgleichspolynom fünften Grades $z_{5,1}(\xi,\tau)$ durchzuführen. Die gefundenen ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten – im folgenden auch mit $q(x,t)$ bezeichnet – sind für die ausgewählten Alter 20, 25, ..., 70 in Tabelle 6 den beobachteten (unausgeglichenen) und den amtlich ausgeglichenen Werten gegenübergestellt.

Aus den vorliegenden Zahlen tritt deutlich die starke Abnahme der Mortalität mit der Zeit hervor. Die mit orthogonalen Polynomen nach dem zweidimensionalen Ansatz (3.47) ausgeglichenen Werte weichen naturgemäss stärker von den Beobachtungswerten ab, als die jeweils für bestimmte Zeitabschnitte mechanisch ausgeglichenen amtlichen Werte; doch darf die Ausgleichung als gut bezeichnet werden.

Einjährige Sterbenswahrscheinlichkeiten q(x,t) für Männer

6 Alter	SM 1876/80	SM 1881/88	SM 1889/00	SM 1901/10	SM 1921/30	SM 1931/41	SM 1941/50	SM 1948/53
	Beobachtete (unausgeglichene) Werte							
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
20	0,00 680	0,00 606	0,00 573	0,00 517	0,00 370	0,00 319	0,00 244	0,00 163
25	876	772	661	548	399	349	274	188
30	964	871	731	628	429	358	281	205
35	1 117	1 086	903	772	482	425	307	228
40	1 292	1 246	1 121	1 010	637	520	381	319
45	0,01 543	0,01 549	0,01 507	0,01 320	0,00 908	0,00 767	0,00 591	0,00 511
50	2 103	1 961	1 930	1 837	1 369	1 143	876	794
55	2 696	2 609	2 552	2 471	1 942	1 681	1 447	1 334
60	3 759	3 796	3 592	3 679	2 798	2 641	2 241	2 020
65	5 615	5 267	5 176	4 976	4 346	3 952	3 376	3 169
70	8 369	7 993	7 586	7 328	6 477	6 092	5 520	5 138
	Mit zweidimensionalen orthogonalen Polynomen ausgeglichene Werte							
20	0,00 715	0,00 643	0,00 547	0,00 481	0,00 348	0,00 277	0,00 228	0,00 223
25	840	763	654	572	404	315	249	237
30	947	866	746	649	438	325	235	211
35	1 093	1 013	887	776	524	384	266	227
40	1 309	1 231	1 105	986	694	527	377	321
45	0,01 616	0,01 546	0,01 424	0,01 300	0,00 971	0,00 773	0,00 587	0,00 512
50	2 058	1 996	1 882	1 752	1 380	1 148	919	820
55	2 718	2 663	2 553	2 413	1 984	1 707	1 423	1 293
60	3 744	3 693	3 577	3 415	2 899	2 559	2 200	1 941
65	5 373	5 317	5 175	4 970	4 319	3 888	3 427	3 199
70	7 956	7 878	7 680	7 399	6 541	5 982	5 377	5 073
	Mechanisch ausgeglichene Werte (Amtliche Sterbetafeln)							
20	0,00 720	0,00 635	0,00 567	0,00 516	0,00 365	0,00 325	0,00 236	0,00 163
25	841	742	648	556	394	343	275	192
30	973	858	724	620	412	339	268	202
35	1 104	1 057	907	754	486	413	300	238
40	1 312	1 255	1 140	983	643	527	386	330
45	0,01 555	0,01 524	0,01 486	0,01 308	0,00 921	0,00 761	0,00 590	0,00 497
50	2 086	1 984	1 917	1 788	1 344	1 133	914	821
55	2 682	2 574	2 554	2 485	1 950	1 728	1 424	1 338
60	3 793	3 701	3 550	3 543	2 843	2 579	2 196	2 035
65	5 457	5 264	5 176	5 042	4 258	3 964	3 383	3 168
70	8 006	7 814	7 557	7 393	6 491	5 963	5 418	5 076

354 Interpolation, Extrapolation und Generationensterbetafeln

Dank der flächenmässigen Darstellung (3.47) der Sterblichkeit im Altersintervall «20, 70» und für die Zeit von 1878 bis 1951, kann für jeden beliebigen Punkt (ξ,τ) innerhalb dieses Bereiches die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit berechnet werden *(Interpolation)*. Für die noch zu erörternden Generationensterbetafeln benötigten wir mehrere interpolierte Werte, die allgemein zur Zufriedenheit ausgefallen sind.

Bedeutungsvoller als die Berechnung von Zwischenwerten ist die *Extrapolation*. Die Sterbefläche ist sowohl hinsichtlich des Alters- wie auch des Zeitargumentes erweiterungsfähig. Für die Alter über 70 erhielten wir gute, für die Alter unter 20 erwartungsgemäss schlechte Werte.

Zeitlich lohnt sich vor allem, die Extrapolation in die Zukunft zu prüfen. Hier machte sich für den Zeitraum 1951–1986 eine eigenartige Erscheinung bemerkbar, indem in den Altern $x \leqq 45$ bald einmal Verzerrungen der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten auftraten. Selbst eine neue Abgrenzung des Basisbereiches – Altersintervall «25, 75» und neue Sterbetafeln SM 1921/30, 1929/32, 1931/41, 1939/44, 1941/50 und 1948/53 – vermochte dieses seltsame Verhalten nicht zu beheben. Es scheint demnach, dass sich Schwingungen in den untern Altern des Basisbereiches durch die zeitliche Extrapolation mit zweidimensionalen orthogonalen Polynomen in höhere Altersstufen fortpflanzen. Bei der Beurteilung des mutmasslichen künftigen Verlaufes der Sterblichkeit ist also Vorsicht geboten. Für die Alter $x > 45$ konnten immerhin die extrapolierten Sterbenswahrscheinlichkeiten bis 1986 bedenkenlos zur Konstruktion von Generationensterbetafeln für ausgewählte Jahrgänge verwendet werden.

Eine *Generationensterbetafel* misst – im Gegensatz zur Periodensterbetafel – das tatsächliche Absterben einer gleichaltrigen Personengesamtheit in der Zeit. Sie erfordert deshalb die Kenntnis der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten zu Zeitpunkten, die sich über mehrere Jahrzehnte erstrecken.

Zur Darstellung einer Generationensterbetafel beziehen wir uns auf die Ausführungen im Lehrbuch *E. Zwinggi* [45] und definieren:

$q(x,t)$ = Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person, im Zeitabschnitt $t/t+1$ zu sterben.

$q(x,t-x+x) = q(x,\theta+x) =$ Wahrscheinlichkeit einer im Zeitpunkt $\theta = t-x$ geborenen, nunmehr x-jährigen Person, im Zeitabschnitt $t/t+1$ zu sterben.

Mit Hilfe der auf den Geburtszeitpunkt θ bezogenen einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten $q(x,\theta+x)$ konstruiert man die Überlebensordnungen

$$l(x,\theta+x) = l(0,\theta) \prod_{\lambda=0}^{x-1} [1-q(\lambda,\theta+\lambda)]. \tag{3.52}$$

Die Generationensterbetafel $l(x,\theta+x)$ gibt das «wahre» Absterben einer Generation wieder, indem auf die Nulljährigen $l(0,\theta)$ des Jahrganges θ schrittweise die Sterblichkeit der Zeitabschnitte $\theta/\theta+1$, $\theta+1/\theta+2$, usw., einwirkt.

Zwischen den oben definierten Wahrscheinlichkeiten $q(x,t)$ und $q(x,\theta+x)$ besteht die Bindung

$$q(x,\theta+x) = q(x,t-x+x) = q(x,t); \tag{3.53}$$

demnach genügt es, die Ansätze für $q(x,t)$ zu kennen.

In unserem Beispiel gilt insbesondere

$$q(x,t) = z_{5,1}(\xi,\tau).$$

Nach (3.52) in Verbindung mit (3.53) können wir damit die Generationensterbetafel $l(x,\theta+x)$ aufbauen.

Wir gehen von den in Tabelle 6 angegebenen, ausgeglichenen einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten $q(x,t)$ für den Basisbereich «20, 70» aus, interpolieren die fehlenden Zwischenwerte und berechnen die erforderlichen extrapolierten Werte (Alter und Zeit). Unter Berücksichtigung der Zuverlässigkeit der zeitlichen Extrapolation betrachten wir die Generationen der Jahrgänge $\theta = 1875$, 1885, 1895, 1905, 1915 und beschränken uns auf die Ermittlung der ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten nach (3.47) [1]) für die Alter $x = 20, 25, \ldots, 90$.

Die jeweils zwischen $q(x,t)$ und $q(x+5,t+5)$ gelegenen vier Werte $q(x+r,t+r)$, mit $r = 1, 2, 3, 4$, wurden nach der von *W. Wegmüller* [43] vereinfachten oskulatorischen Interpolationsformel berechnet.

---

[1]) Grundlagen: $a_{\lambda,\mu}$ gemäss Ansätzen auf Seite 113; $P_{\lambda-\mu}(\xi)$ nach (2.39′), sofern nicht bereits im Tabellenwerk *Pearson and Hartley* [35] vorhanden; $P^*_\mu(\tau)$ nach (3.46′), falls nicht schon in Tabelle 3 (Seite 111) enthalten.

$$q(x+r,t+r) = q(x,t) + \binom{r}{1}\delta q(x,t) + \binom{r}{2}\delta^2 q(x,t) + \binom{r}{3}\delta^3 q(x,t)\,, \quad (3.54)$$

mit

$$\begin{aligned}
\delta q(x,t) &= 0{,}200\,\Delta q(x-5,t-5) + 0{,}120\,\Delta^2 q(x-5,t-5) - 0{,}016\,\Delta^3 q(x-5,t-5)\\
\delta^2 q(x,t) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0{,}040\,\Delta^2 q(x-5,t-5) - 0{,}016\,\Delta^3 q(x-5,t-5)\\
\delta^3 q(x,t) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0{,}024\,\Delta^3 q(x-5,t-5)
\end{aligned}$$

und

$$\Delta q(x-5,t-5) = q(x,t) - q(x-5,t-5)$$

$$\Delta^2 q(x-5,t-5) = \Delta[\Delta q(x-5,t-5)] = q(x+5,t+5) - 2q(x,t) + q(x-5,t-5)$$

. . . . . .

für $x = 20, 25, \ldots, 90$ (Alter der Generation)
$t = \theta + x$ ($\theta = 1875, 1885, 1895, 1905, 1915$)
$r = 1, 2, 3, 4$ (Zwischenwerte).

Für die beiden Randintervalle ($21 \leqq x \leqq 24$ und $86 \leqq x \leqq 89$) beruht die in Tabelle 7 zusammengestellte Generationensterblichkeit auf einer graphischen Ausgleichung.

Nach (3.52) konstruieren wir Überlebensordnungen für $x \geqq 20$ gemäss

$$l(x,\theta+x) = l(20,\theta) \prod_{\lambda=20}^{x-1} [1 - q(\lambda,\theta+\lambda)]\,, \qquad (3.52')$$

mit $l(20,\theta) = 100\,000$.

Die einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten (Tabelle 7), besonders aber die daraus hergeleiteten Generationensterbetafeln bzw. Überlebensordnungen (Tabelle 8) bekunden die grosse Bedeutung der säkularen Sterblichkeitsabnahme. Danach erreichten von 100 000 zwanzigjährigen Männern der im Jahre 1875 geborenen Generation etwas mehr als die Hälfte das 65. Altersjahr. Dasselbe Alter erleben bereits zwei Drittel des Jahrganges 1895 und sogar drei Viertel der Generation 1915. Ferner starben mehr als ein Viertel aller zwanzigjährigen Männer der Generation 1875 vor dem 54. Altersjahr, während der Jahrgang 1915 rund elf Jahre später – etwa im Alter 65 – diesen Zustand erreicht.

Schliesslich sei noch auf eine Besonderheit in den Sterbenswahrscheinlichkeiten hingewiesen; diese nehmen für die Generationen nach 1895 ein immer ausgeprägteres relatives Minimum an, welches sich im Laufe der Zeit vom Alter 30 (Generation 1895) auf das Alter 34 (Generation 1915) verlagert.

Generationensterbetafeln für die Jahrgänge

Einjährige Sterbens-

7

Alter x	$q(x,1875+x)$	$q(x,1885+x)$	$q(x,1895+x)$	$q(x,1905+x)$	$q(x,1915+x)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
20	0,00 547	0,00 481	0,00 418	0,00 348	0,00 277
21	556	488	425	350	280
22	569	498	432	353	281
23	584	510	439	356	280
24	599	524	445	358	278
25	0,00 612	0,00 533	0,00 449	0,00 358	0,00 275
26	621	538	449	354	269
27	627	541	446	347	260
28	633	542	443	339	251
29	640	545	439	331	242
30	0,00 649	0,00 549	0,00 438	0,00 325	0,00 235
31	660	555	439	322	231
32	671	561	440	318	226
33	685	569	442	316	224
34	700	579	446	317	224
35	0,00 719	0,00 592	0,00 453	0,00 320	0,00 227
36	740	608	463	326	233
37	763	625	475	335	242
38	789	645	489	346	254
39	818	668	507	360	269
40	0,00 851	0,00 694	0,00 527	0,00 377	0,00 287
41	887	724	551	397	309
42	925	756	577	421	334
43	967	791	607	447	363
44	1 013	830	640	477	395
45	0,01 064	0,00 873	0,00 677	0,00 512	0,00 431
46	1 118	919	717	549	471
47	1 175	969	761	590	515
48	1 238	1 023	808	635	563
49	1 306	1 083	861	684	615
50	0,01 380	0,01 148	0,00 919	0,00 739	0,00 673
51	1 461	1 219	985	800	735
52	1 545	1 294	1 057	867	801
53	1 637	1 375	1 134	938	872
54	1 737	1 464	1 214	1 014	950

θ = 1875, 1885, 1895, 1905 und 1915

wahrscheinlichkeiten $q(x,\theta+x)$

Alter x	$q(x,1875+x)$	$q(x,1885+x)$	$q(x,1895+x)$	$q(x,1905+x)$	$q(x,1915+x)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
55	0,01 849	0,01 563	0,01 293	0,01 093	0,01 037
56	1 969	1 671	1 361	1 169	1 130
57	2 097	1 785	1 421	1 243	1 229
58	2 235	1 909	1 487	1 325	1 336
59	2 388	2 046	1 575	1 423	1 454
60	0,02 559	0,02 200	0,01 701	0,01 547	0,01 586
61	2 744	2 368	1 869	1 700	1 728
62	2 941	2 546	2 070	1 874	1 880
63	3 155	2 741	2 295	2 067	2 045
64	3 393	2 957	2 537	2 278	2 228
65	0,03 659	0,03 199	0,02 789	0,02 504	0,02 433
66	3 948	3 464	3 044	2 739	2 682
67	4 257	3 746	3 306	2 985	2 930
68	4 592	4 054	3 587	3 250	3 211
69	4 963	4 395	3 897	3 544	3 479
70	0,05 377	0,04 777	0,04 249	0,03 876	0,03 760
71	5 827	5 192	4 635	4 239	
72	6 307	5 637	5 048	4 628	
73	6 829	6 120	5 498	5 052	
74	7 402	6 652	5 994	5 519	
75	0,08 038	0,07 243	0,06 547	0,06 041	
76	8 726	7 885	7 147	6 637	
77	9 461	8 570	7 789	7 275	
78	10 255	9 312	8 485	7 942	
79	11 123	10 125	9 247	8 634	
80	0,12 078	0,11 020	0,10 090	0,09 389	
81	13 108	11 988	11 001		
82	14 205	13 019	11 973		
83	15 386	14 131	13 021		
84	16 668	15 339	14 162		
85	0,18 068	0,16 661	0,15 413		
86	19 487	18 175	16 722		
87	21 103	19 798	18 201		
88	22 822	21 513	19 833		
89	24 711	23 324	21 519		
90	0,26 728	0,24 865	0,23 197		

Generationensterbetafeln für die Jahrgänge

Überlebensordnungen

8 Alter x	$l(x,1875+x)$	$l(x,1885+x)$	$l(x,1895+x)$	$l(x,1905+x)$	$l(x,1915+x)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
20	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000
21	99 453	99 519	99 582	99 652	99 723
22	98 900	99 033	99 159	99 303	99 444
23	98 337	98 540	98 730	98 953	99 164
24	97 748	98 038	98 297	98 600	98 887
25	97 150	97 524	97 860	98 247	98 612
26	96 547	97 004	97 420	97 896	98 341
27	95 941	96 482	96 983	97 549	98 076
28	95 334	95 960	96 550	97 211	97 821
29	94 724	95 440	96 122	96 881	97 576
30	94 109	94 920	95 701	96 560	97 339
31	93 488	94 399	95 281	96 247	97 111
32	92 861	93 875	94 863	95 937	96 886
33	92 225	93 348	94 446	95 632	96 667
34	91 593	92 817	94 028	95 329	96 451
35	90 952	92 280	93 609	95 027	96 235
36	90 298	91 733	93 185	94 723	96 016
37	89 630	91 176	92 753	94 414	95 793
38	88 946	90 606	92 313	94 098	95 561
39	88 244	90 021	91 861	93 772	95 318
40	87 522	89 420	91 396	93 435	95 062
41	86 777	88 800	90 914	93 083	94 789
42	86 008	88 157	90 413	92 713	94 493
43	85 212	87 490	89 891	92 323	94 177
44	84 388	86 798	89 346	91 910	93 835
45	83 533	86 078	88 774	91 472	93 465
46	82 644	85 326	88 173	91 003	93 062
47	81 720	84 542	87 541	90 504	92 624
48	80 760	83 723	86 875	89 970	92 147
49	79 760	82 866	86 173	89 398	91 628
50	78 719	81 969	85 431	88 787	91 064
51	77 632	81 028	84 645	88 131	90 451
52	76 498	80 040	83 812	87 426	89 787
53	75 316	79 005	82 926	86 668	89 067
54	74 083	77 918	81 985	85 855	88 291

θ = 1875, 1885, 1895, 1905 und 1915

$l(x,\theta+x)$

Alter x	$l(x,1875+x)$	$l(x,1885+x)$	$l(x,1895+x)$	$l(x,1905+x)$	$l(x,1915+x)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
55	72 797	76 777	80 990	84 984	87 452
56	71 451	75 577	79 943	84 055	86 545
57	70 044	74 315	78 855	83 073	85 567
58	68 575	72 988	77 734	82 040	84 515
59	67 042	71 595	76 579	80 953	83 386
60	65 441	70 130	75 372	79 801	82 174
61	63 767	68 587	74 090	78 567	80 871
62	62 017	66 963	72 706	77 231	79 473
63	60 193	65 258	71 201	75 784	77 979
64	58 294	63 469	69 567	74 217	76 384
65	56 316	61 592	67 802	72 527	74 683
66	54 255	59 622	65 911	70 710	72 866
67	52 113	57 557	63 904	68 774	70 911
68	49 895	55 401	61 792	66 721	68 834
69	47 604	53 155	59 575	64 552	66 623
70	45 241	50 819	57 253	62 265	64 306
71	42 809	48 391	54 821	59 851	61 888
72	40 314	45 879	52 280	57 314	
73	37 771	43 292	49 641	54 662	
74	35 192	40 643	46 911	51 900	
75	32 587	37 939	44 100	49 036	
76	29 968	35 191	41 212	46 074	
77	27 353	32 417	38 267	43 016	
78	24 765	29 638	35 286	39 886	
79	22 225	26 879	32 292	36 718	
80	19 753	24 157	29 306	33 548	
81	17 367	21 495	26 349	30 398	
82	15 091	18 918	23 451		
83	12 947	16 455	20 643		
84	10 955	14 130	17 955		
85	9 129	11 963	15 412		
86	7 480	9 969	13 037		
87	6 022	8 158	10 857		
88	4 751	6 542	8 881		
89	3 667	5 135	7 119		
90	2 761	3 937	5 587		
91	2 023	2 958	4 291		

4 Zusammenfassung

Die systematische Bearbeitung der orthogonalen Polynome sowie die Untersuchungen hinsichtlich ihrer Anwendung in der Ausgleichsrechnung haben sich als aufschlussreich erwiesen. Die allgemeine Betrachtungsweise in n Veränderlichen vermittelt eine vollständige Übersicht über die grundlegenden Eigenschaften. Die Spezialisierung auf eine oder zwei Veränderliche erschliesst sodann weitere spezifische Beziehungen und Bindungen. Nachstehende Hauptergebnisse dürften den Theoretiker wie den Praktiker interessieren.

1. Die Einführung des Stieltjesschen Integralbegriffs verbürgt eine einheitliche, allgemeine Darstellung der Theorie orthogonaler Polynome und deren Verwendung in der Ausgleichsrechnung.

2. Ohne auf die eigentlichen Orthogonalitätsbedingungen angewiesen zu sein, lassen sich auf Grund des vollständigen Orthogonalsystems, das im Abschnitt 13 konstruiert wurde, die Koeffizienten der orthogonalen Polynome durch eine passende Extremalbedingung (1.9) eindeutig bestimmen. Diese Tatsache liegt später der Determinanten-Methode zugrunde, ein Verfahren zum Aufsuchen orthogonaler Polynome, das sich besonders gut für den Einsatz von programmgesteuerten, elektronischen Rechengeräten eignet.

3. Sowohl für kontinuierliche wie für diskrete, äquidistante Argumente lassen sich im ein- und zweidimensionalen Fall – bei letzterem für den Rechtecksbereich – explizite formelmässige Darstellungen der orthogonalen Polynome angeben (Ansätze (2.12), (2.12′), (2.39); (3.12), (3.37)). Dabei tritt die Bindung zu den klassischen orthogonalen Polynomen im allgemeinen und zu den Legendre-Polynomen im speziellen deutlich hervor.

4. Im Falle diskreter, nicht äquidistanter Argumente führen die Rekursionsbeziehungen (Ansätze (2.22), (2.24), (2.25); (3.22), (3.23) und (3.24)) auf ein handliches Rechenschema zur Bestimmung der orthogonalen Polynome; gleichzeitig ist damit eine vorläufige, mit

fortschreitender Rechnung parallel laufende Beurteilung der Güte der Ausgleichung verbunden, ohne dass hierzu die ausgeglichenen Werte bekannt sein müssen.

5. Wird das Ausgleichspolynom als Linearkombination der orthogonalen Polynome eines vollständigen Systems angesetzt, so sind die zugehörigen Entwicklungskoeffizienten vom Grade des gewählten Ausgleichsansatzes unabhängig. Der Orthogonalitätsbedingungen wegen entarten nämlich die zugrundeliegenden Bestimmungsgleichungen (1.13).

6. Für Ausgleichsprobleme in zwei unabhängigen Veränderlichen verdient die Behandlung des Rechtecksbereiches besondere Beachtung. In diesem Falle gilt die bemerkenswerte Aussage ((3.12′), (3.16)), dass die zweidimensionalen orthogonalen Polynome in das Produkt der entsprechenden eindimensionalen orthogonalen Polynome zerfallen. Dieses fundamentale Ergebnis gewährleistet den rationellen Einsatz der für eine Veränderliche gültigen Beziehungen und Ansätze.

7. Zur Erstellung tabellarischer Unterlagen erweisen sich die Eigenschaften der auf die Veränderlichen ξ und η transformierten orthogonalen Polynome als sehr wertvoll; zufolge der Symmetrie (2.46), (2.46′) und (3.43) brauchen die Polynomwerte nur für die eine Hälfte des Argumentbereiches angegeben zu werden. Dem Praktiker dürften ferner das spezielle Auflösungsverfahren für diskrete, nicht äquidistante Argumente (Abschnitte 232.1 und 332.1), die ausgewiesenen Rekursionsbeziehungen, sowie die Ausführungen über die numerische Auswertung nützlich sein.

5 Literaturverzeichnis

Grundlagen und Stieltjes-Integral

[1] *Jacob, M.:* Sugli integrali di Stieltjes e sulla loro applicazione nella matematica atturiale. Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari. 1932. Vol. III, p. 160–181.

[2] *Loewy, A.:* Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik. Blätter für Versicherungsmathematik. 1933. Bd. 2, S. 3–18, 74–82, 207–216.

[3] *Ostrowski, A.:* Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung (3 Bände). Basel, Birkhäuser Verlag. 1945–1954.

[4] *Saks, S.:* Theory of the Integral. New York, Hafner Publications, 1937.

[5] *Schärf, H.:* Über links- und rechtsseitige Stieltjesintegrale und deren Anwendungen. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 1943. Bd. 43, S. 127–179.

[6] *Steffensen, J.F.:* On Stieltjes' Integral and its Applications to Actuarial Questions. Journal of the Institute of Actuaries. 1932. Vol. LXIII, p. 443–483.

[7] *Zurmühl, R.:* Matrizen. Berlin, Springer Verlag. 1950.

[8] *Eidgenössisches Statistisches Amt:* Schweizerische Volkssterbetafeln 1931/41 und 1939/44. Stand und Entwicklung der Sterblichkeit in der Schweiz. Statistische Quellenwerke der Schweiz. Bern. Reihe Bk 4, 1951. H. 232.

[9] – Schweizerische Volkssterbetafeln 1941/50 und 1948/53. Grundzahlen und Nettowerte. Statistische Quellenwerke der Schweiz. Bern. Reihe Bk 6, 1955. H. 282.

Orthogonale Polynome

[10] *Aitken, A.C.:* On the Graduation of Data by Orthogonal Polynomials of Least Squares. Proceedings of the Royal Society of Edingburgh. 1932/33. Vol. 53, p. 54–78.

[11] – On Fitting Polynomials to weighted Data by least Squares. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1933. Vol. 54, p. 1–11.

[12] *Allan, F.E.:* The general form of the orthogonal Polynomials for simple series with proofs of their simple properties. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1930. Vol. 50, p. 310–320.

[13] *Anderson, R.L. and Houseman, E.E.:* Tables of orthogonal Polynomials. Research Bulletin. Jowa Agricultural Experimental Station. 1942. No. 297, p. 595–672.

[14] *Birge, R.T.:* Least Squares fitting of Data by Means of Polynomials. Reviews of modern Physics. 1947. Vol. 19, No. 4, p. 298–360.

[15] *Doolittle, M.H.:* U.S. Coast and Geodetic Survey. Report. 1878. Appendix 8.

[16] *Fisher, R.A.:* Statistical Methods for Research Workers. Edinburgh and London. Oliver and Boyd. 1932–1946 (4.–10. Auflage).

[17] *Fisher, R.A. and Yates, F.:* Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research. Edinburgh, Oliver and Boyd. 1953 (4. Auflage).

[18] *Fletcher, A., Miller, J.C.P. and Rosenhead, L.:* An Index of mathematical tables. London, Scientific Computing service. 1946.

[19] *Gram, J.P.:* Über partielle Ausgleichung mittels Orthogonalfunktionen. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 1915. H.10, S.3–23.

[20] *Gröbner, W.:* Über die Konstruktion von Systemen orthogonaler Polynome in ein- und zweidimensionalen Bereichen. Monatshefte für Mathematik. Wien, Springer Verlag. 1948. Bd.52, H.1, S.38–54.

[21] *Grossen, H.:* Regression mit orthogonalen Polynomen. Dissertation. Universität Bern. 1948.

[22] *Guest, P.G.:* Orthogonal Polynomials in the Least Squares Fitting of Observations. The Philosophical Magazine. 1950. Serie 7, Vol.41, No.313, p.124–137.

[23] – The Doolittle method and the fitting of polynomials to weighted data. Biometrika. 1953. Vol.40, p.229–231.

[24] – Note on the fitting of polynomials to equallyspaced observations. Journal of Mathematics and Physics. 1953. Vol.32, p.68–71.

[25] *Hayashi, K.:* Fünfstellige Funktionentafeln. Berlin, Springer Verlag. 1930. S.120–123.

[26] – Tafeln der Besselschen, Theta-, Kugel- und anderer Funktionen. Berlin, Springer Verlag. 1930. S.105–109, 124–125.

[27] *Jahnke, E. – Emde, F.:* Tafeln höherer Funktionen. Leipzig, Teubner Verlag. 1952 (5. Auflage), S.104–124.

[28] *Kreis, H.:* Über die Orthogonalpolynome. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 1953. Bd.53, S.46–56.

[29] *Lidstone, G.J.:* Notes on orthogonal polynomials and their application to least-square methods of (1) fitting polynomial curves to data, (2) graduation by weighted means. Journal of the Institute of Actuaries. 1933. Vol.LXIV, p.128–159.

[30] *Lorenz, P.:* Der Trend. Ein Beitrag zur Methode seiner Berechnung und seiner Auswertung für die Untersuchung von Wirtschaftskurven. Vierteljahreshefte zur Konjunkturforschung. Berlin. 1928. Sonderheft 9.

[31] – Der Trend. Ein Beitrag zur Methode seiner Berechnung und seiner Auswertung für die Untersuchung von Wirtschaftskurven und sonstigen Zeitreihen. Vierteljahreshefte zur Konjunkturforschung. Berlin. 1931. Sonderheft 21.

[32] – Über gewisse Funktionen, die in der mathematischen Konjunkturforschung eine grosse Rolle spielen. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1932. Bd.168, H.1, S.170–175.

[33] – Darstellung statistischer Übersichten mit zwei Eingängen durch orthogonale ganze rationale Funktionen (Flächendarstellung). Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung. 1940. Bd.VI, H.2, S.57–70.

[34] *Pareto, V.:* Tables pour faciliter l'application de la méthode des moindres carrés. Zeitschrift für schweizerische Statistik. 1899. Vol. 1, S. 121–150.

[35] *Pearson, E.S. and Hartley, H.O.:* Biometrika Tables for Statisticians. Cambridge University Press. 1956. Vol. I, p. 91–95, 212–221.

[36] *Ruchti, W.:* Analytische Ausgleichung durch Polynome. Dissertation. Universität Bern. 1937.

[37] *Rushton, S.:* On least squares fitting by orthonormal polynomials, using the Choleski Method. Journal of the Royal Statistical Society. Serie B. 1951. Vol. 13. No. 1, p. 92–99.

[38] *Schöb, W.:* Ein Beitrag zur Theorie der Ausgleichsrechnung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 1935. H. 30, S. 53–127.

[39] *Tölke, F.:* Praktische Funktionenlehre. Bd. 1: Elementare und elementare transzendente Funktionen. Berlin, Springer Verlag. 1950. S. 320–326, 373–390.

[40] *Tricomi, F.G.:* Vorlesungen über Orthogonalreihen. Berlin, Springer Verlag 1955.

[41] *Tschebyscheff, P.L.:* Oeuvres. St. Petersburg. 1854–1875. Vol. 1 und 2.

[42] *Van der Reyden, D.:* Curve fitting by the orthogonal polynomials of least squares. Onderstepoort, Journal of Veterinary Science and Animal Industry. 1943. Vol. 18, p. 355–404.

[43] *Wegmüller, W.:* Neue Rechnungsgrundlagen der Eidgenössischen Versicherungskasse. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1950. Bd. 50, S. 77–110.

[44] *Wishart, J.* and *Metakides, T.:* Orthogonal Polynomial fitting. Biometrika. 1953. Vol. 40, p. 361–369.

[45] *Zwinggi, E.*, Versicherungsmathematik. Basel, Birkhäuser Verlag, 1945.

Inhaltsverzeichnis

		Seite
0	*Einleitung*	55
1	*Allgemeines*	56
11	Grundsätzliches und Definition des Stieltjes-Integrals	56
12	Satz über orthogonale Funktionensysteme	60
13	Konstruktion eines vollständigen Orthogonalsystems	61
14	Darstellung der Ausgleichspolynome durch orthogonale Polynome	65
2	*Eindimensionale Betrachtungsweise*	67
21	Grundsätzliches und Definition des Stieltjes-Integrals	67
22	Determinanten-Methode	69
23	Beziehungen und Ansätze für die praktische Anwendung	70
231	Kontinuierliche Argumente	71
231.1	Orthogonale Polynome	71
231.2	Ausgleichsansätze	74
232	Diskrete Argumente	74
232.1	Diskrete, nicht äquidistante Argumente	75
232.11	Orthogonale Polynome	75
232.12	Ausgleichsansätze	77
232.13	Schema der numerischen Auswertung	77
232.14	Beurteilung der Güte der Ausgleichung	80
232.2	Diskrete, äquidistante Argumente	81
232.21	Orthogonale Polynome	81
232.22	Ausgleichsansätze	83
24	Eigenschaften der orthogonalen Polynome	83
25	Numerische Auswertung	85
251	Kontinuierliche Argumente	86
252	Diskrete, äquidistante Argumente	87
3	*Zweidimensionale Betrachtungsweise*	89
31	Grundsätzliches und Definition des Stieltjes-Integrals	89
32	Determinanten-Methode	91
33	Beziehungen und Ansätze für die praktische Anwendung	92
331	Kontinuierliche Argumente	92
331.1	Orthogonale Polynome	92
331.2	Ausgleichsansätze	96

Seite

332 Diskrete Argumente 97
332.1 Diskrete, nicht äquidistante Argumente 97
332.11 Orthogonale Polynome 97
332.12 Ausgleichsansätze 99
332.13 Schema der numerischen Auswertung 100
332.14 Beurteilung der Güte der Ausgleichung 100
332.2 Diskrete, äquidistante Argumente 101
332.21 Orthogonale Polynome 105
332.22 Ausgleichsansätze 105
34 Eigenschaften der orthogonalen Polynome für Rechtecksbereiche . 106
341 Herleitung von Rekursionsbeziehungen 106
342 Symmetrie-Eigenschaften 107
35 Numerische Auswertung 108
351 Problemstellung und Grundlagen 108
352 Bestimmung der orthogonalen Polynome 110
353 Bestimmung der Ausgleichspolynome 111
354 Interpolation, Extrapolation und Generationensterbetafel 115

4 *Zusammenfassung* 122

5 *Literaturverzeichnis* 124