Hinweise auf die Ergebnisse und Bedeutung der Spieltheorie

Autor(en): **Nolfi, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **57 (1957)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-550875

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Hinweise auf die Ergebnisse und Bedeutung der Spieltheorie

Von *P. Nolfi*, Zürich

Vortrag, gehalten an der Jahresversammlung der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, am 13. Oktober 1956, in Luzern

Mit den nachfolgenden Darlegungen soll versucht werden, eine möglichst leicht verständliche Einführung in die Besonderheiten der Spieltheorie zu vermitteln. Angesichts der Tatsache, dass die meisten Versicherungsmathematiker durch ihre beruflichen Aufgaben und Pflichten nur wenig Zeit für wissenschaftliche Studien erübrigen können, hoffen wir, durch nachstehende Darstellung manchem Leser – der noch nicht Gelegenheit hatte, sich mit der Spieltheorie zu befassen – einen Dienst erweisen zu können.

Die Spieltheorie ist zweifellos eine hervorragende Errungenschaft. Ihr Aufkommen wird mitunter mit der Entdeckung der Infinitesimalrechnung verglichen. Dazu ist allerdings zu bemerken, dass ein solcher Vergleich insoweit nicht zutreffend ist, als die Spieltheorie von ganz anderen Voraussetzungen ausgeht und dementsprechend auch andere Erfolge zu verzeichnen hat und andere Ziele verfolgt.

Die Grundidee zu einer Theorie der Spiele wird Leibniz zugeschrieben. Indessen ist es zweifellos so, dass das grösste Verdienst für ihre Ausgestaltung J. v. Neumann zukommt. Seine erste Publikation über diesen Gegenstand erschien im Jahre 1928, «Zur Theorie der Gesellschaftsspiele» (Mathematische Annalen, Bd. 100, S. 295). Im Jahre 1944 erschien dann sein Standardwerk, das er zusammen mit O. Morgenstern bearbeitet hat: «Theory of Games and Economic Behaviour», Princeton University Press. Dieses Werk umfasst über 600 Seiten und enthält sehr grundlegende Resultate. Seither ist die Literatur über diesen Gegenstand stark angewachsen. Ein ausführliches Verzeichnis ist in «Annals of Mathematic Studies: Contributions to the Theory of Games» zu finden. Als Einführung eignet sich das Buch von J. McKinsey, «Introduction to

the Theory of Games, Rand Series, 1952». Leicht verständlich und amüsant ist «The Compleat Strategist» von J. D. Williams, 1954, Hill Book Company, Inc., New York.

In diesem letztgenannten Buch wird besonders hervorgehoben, dass die Spieltheorie eine eminent wichtige Aufgabe zu erfüllen vermag; dass sie dazu angetan ist, Konflikte zu lösen, Anweisungen zu erteilen, wie Entscheide am vernünftigsten und zweckmässigsten getroffen werden können. Tatsächlich wird der Mensch immer wieder vor die Notwendigkeit gestellt, Entscheide zu fällen. Sofern er dazu die volle Freiheit besitzt, trägt er auch eine der Tragweite des Entscheides entsprechende Verantwortung; und es mag ihm sehr gedient sein, Methoden zu kennen, die sein Verhalten zu lenken vermögen.

Eine elementare, aber zugleich grundlegende Darstellung einer solchen Situation lässt sich mit Hilfe einer Matrix erreichen.

A \ B	1	2	3	4
1	2	3	3	4
2	6	4	5	8
3	1	2	4	3

Die vorliegende Matrix veranschaulicht ein Zweipersonenspiel. Die Spieler bezeichnen wir mit A und B. Die Spielregeln sind folgende: A kann eine Reihe wählen: die erste, zweite oder dritte. B kann eine Kolonne wählen: die erste, zweite, dritte oder vierte. Werden gleichzeitig von A und B eine Reihe bzw. eine Kolonne gewählt, so wird damit eine Zahl herausgeschnitten; z.B. wird durch die Wahl von Kolonne 2 und Reihe 1 die Zahl 3 ausgehoben. Diese Zahl soll den Gewinn von A und gleichzeitig den Verlust des Spielers B angeben. Auf Grund dieser Festsetzungen kann das Spiel beginnen. A wählt hinfort eine Reihe und B eine Kolonne. Jedesmal erzielt A einen Gewinn und B einen Verlust. Würde die Matrix auch negative Zahlen enthalten, dann hätte auch B Chancen, einen negativen Verlust, d.h. einen Gewinn zu erzielen. Der Einfachheit halber haben wir zu unserm Beispiel nur positive Zahlen in Betracht gezogen. Das Spiel ist dann für B immer mit einem Verlust verbunden. Man kann sich vorstellen, dass B aus irgendeinem Grunde gezwungen ist, sich an diesem Spiel zu beteiligen. Im praktischen Leben hat man es tatsächlich nicht selten mit einem Gegenspieler zu tun, der

ausgesprochen im Vorteil ist und mit dem trotzdem ein Kampf ausgetragen werden muss.

Wir nehmen nun an, A werde darnach trachten, möglichst viel zu gewinnen, und B, möglichst wenig zu verlieren. Die Frage ist dann: Wie sollen sich A und B verhalten? Lassen sich dafür Verhaltungsregeln angeben? Wir prüfen zunächst die Möglichkeiten für A.

Wählt A die 1. Reihe, dann kann er – ganz unabhängig von den Gegenmassnahmen, die B trifft – mindestens 2 gewinnen.

Wählt A die 2. Reihe, dann kann er mindestens 4 gewinnen.

» A » 3. » » » » » 1 »

Am vorteilhaftesten für ihn ist somit, wenn er die *zweite* Reihe wählt. Er kann dann mit Sicherheit mindestens 4 gewinnen. Bei keiner anderen Wahl hat er die Chance, mindestens diesen Betrag zu erhalten.

Wie soll B spielen, d. h. wie muss sich B verhalten, damit sein Verlust möglichst klein ausfällt?

Wählt B die 1. Kolonne, dann riskiert er, 6 zu verlieren.

» B » 2. » » » » 4 » »

» B » 3. » » » » 5 » »

» B » 4. » » » » 8 » »

Am vorteilhaftesten für B ist somit, wenn er die *zweite* Kolonne wählt; er weiss dann, dass er – ganz unabhängig von jedem noch so schlauen Verhalten des A – höchstens 4 verlieren muss.

Das Spiel kann somit für beide Partner am vorteilhaftesten gespielt werden, wenn A die zweite Reihe und B die zweite Kolonne wählt. Wir sehen damit, dass es möglich ist, für ein solches Spiel eine vernünftige Verhaltensregel anzugeben. Dies ist ausserordentlich interessant und bildet ein erstes Resultat der Spieltheorie.

Die nächste Aufgabe ist nun, für diese Erkenntnis die mathematische Formulierung zu finden. Dazu brauchen wir nur das, was wir hier erklärt haben, in die Sprache der Mathematik zu übertragen.

Wir betrachten eine allgemeine *Zahlenmatrix:*

$$|a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Wenn A die erste Reihe wählt, dann hat er Aussicht, mindestens den kleinsten Wert in dieser Reihe zu gewinnen, d.h. den Wert $\min\limits_j a_{1j}$, wenn er die zweite Reihe wählt, dann $\min\limits_j a_{2j}$ usw. ($\min\limits_j a_{ij}$ ist dabei immer der kleinste Wert von a_{ij} für i fest und $j = 1, 2, \ldots, n$). Welche Reihe soll A wählen? Am besten wohl diejenige, bei der $\min\limits_j a_{ij}$ am grössten ist, d.h. die Reihe

$$\underline{\max_i \min_j a_{ij}}.$$

Ähnliche Betrachtungen lassen sich für B anstellen. Wählt B die erste Kolonne, dann gibt der grösste Wert a_{i1} (für $i = 1, 2, \ldots m$) den maximalen Verlust an, den ihm A zufügen kann. Wir bezeichnen diesen Wert mit $\max\limits_i a_{i1}$. B wird also darnach trachten, diese Verlustmöglichkeit möglichst klein zu halten und diejenige Kolonne mit dem kleinsten Wert $\max\limits_i a_{ij}$ wählen, also

$$\underline{\min_j \max_i a_{ij}}.$$

In unserem Beispiel war $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 4$

und $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 4$.

Es galt also die Gleichung

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Im allgemeinen ist diese Beziehung aber nicht erfüllt. Dies zwingt zu weiteren Nachforschungen. Die angeführte Gleichung ist nur befriedigt, wenn die Matrix einen *Sattelpunkt* aufweist. Betrachtet man die Umgebung der Zahl 4 in unserem Beispiel, so erkennt man, dass sie in einem Sattel liegt. Von oben nach unten steigt der Zahlenwert zunächst von 3 auf 4 an, um dann wieder von 4 auf 2 zurückzugehen. Auf den beiden Seiten haben wir ansteigende «Abhänge», links 6 und rechts 5, also grössere Zahlen. Wenn wir uns diese Zahlen als Höhen abgetragen denken, erkennen wir, dass der Wert des Spiels, die Zahl 4, in einem Sattel (Passübergang) liegt.

Ein Spiel, bei dem die angeführte Gleichung nicht erfüllt ist, bildet die Stumme Mora. Es wird gespielt, indem ein Spieler A auf Gerade und ein Spieler B auf Ungerade setzt. Ergibt die Zahl der ausgestreckten Finger eine gerade Summe, so hat A, andernfalls B eine Einheit gewonnen.

Die Matrix dieses Spieles lautet:

$$\begin{array}{c|cc|} & G & U \\ \hline G & 1 & -1 \\ U & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} G = \text{Gerade,} \\ U = \text{Ungerade.} \end{array}$$

In diesem Fall ist:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i (-1, -1) = -1$$

und

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min_j \quad (1, 1) \quad = +1,$$

d.h. es ist:

$$\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij}.$$

Es lässt sich aber zeigen, dass sich auch für solche Spiele Normen angeben lassen, wie sie am vorteilhaftesten gespielt werden können. Gerade die Betrachtung von so einfachen Spielen gab den Anstoss, allgemeine Lösungen zu suchen, die dann auch gefunden werden konnten.

Die Strategie

Bevor das gezeigt wird, soll ein in der Spieltheorie sehr wichtiger Begriff, der Begriff der *Strategie*, eingeführt werden. Um ihn zu erläutern, betrachten wir folgendes Beispiel: Angenommen, ein Schachspieler sei verhindert, an einem Schachturnier teilzunehmen. In der Verlegenheit entschliesst er sich, einen Vertreter zu bestellen. Der Vertreter darf nun aber aus eigenem Wissen und persönlichen Erwägungen keine Züge machen. Er muss ausschliesslich den Willen seines Auftraggebers befolgen. Damit dies möglich ist, muss der verhinderte Spieler seinem Vertreter eine genaue, vollständige Anleitung mitgeben. Man erkennt leicht, dass eine solche Anleitung ausserordentlich umfangreich sein müsste, denn zum vornherein weiss er nicht, wie sich der Gegner benimmt. Die Anleitung müsste zu jeder denkbaren Eventualität einen entsprechenden Hinweis für die Abwicklung des Spieles enthalten. Eine solche vollständige Liste nennt man eine Strategie.

Eine Strategie für Weiss z.B. muss angeben, wie der erste Zug zu erfolgen hat, d.h. welche Figur der Vertreter zuerst ziehen muss, und zu jeder der 20 möglichen Antworten muss sie weiter vorschreiben,

welche Figur im zweiten Zuge zu ziehen ist. Da die Zahlen der Möglichkeiten sich multiplizieren, würde eine solche Liste eine ungeheure, praktisch nicht zu bewältigende Arbeitsleistung erfordern. Darauf kommt es indessen nicht an. Entscheidend ist die *Erkenntnis*, dass im Prinzip eine solche verbindliche Anleitung möglich ist.

Ganz analog kann auch für Schwarz eine entsprechende Anleitung erstellt werden. – Nehmen wir an, die Gesamtheit aller Situationen, in denen Weiss zum Zuge gelangen kann, sei Z_1, und z sei eine solche Situation $z \varepsilon Z_1$, dann bedeutet die Aufstellung einer Strategie für Weiss nichts anderes als die Vorgabe einer Funktion $f_1(z)$, die für jedes $z \varepsilon Z_1$ die Wahl des nächsten Zuges vorschreibt. Analog kann für Schwarz eine Funktion $f_2(z)$ aufgestellt werden, welche für jedes $z \varepsilon Z_2$ den nächsten Zug bestimmt. Da zu jeder Situation verschiedene Möglichkeiten für den nächsten Zug bestehen, kann die Funktion $f(z)$ sehr verschiedene Werte haben. Sind aber für $f_1(z)$ und $f_2(z)$ bestimmte Funktionswerte vorgegeben, dann ist der Spielverlauf eindeutig festgelegt. Ein Schiedsrichter kann das Spiel in Abwesenheit der beiden Spieler abwickeln. Aus f_1 kann er entnehmen, wie der erste Zug zu erfolgen hat, aus f_2 den zweiten und wieder aus f_1 den dritten Zug usw. Durch die Wahl von f_1 und f_2 ist der Ausgang des Spieles entschieden. *Die einzelnen Entscheide werden auf einen einzigen zurückgeführt.*

Es ist einleuchtend, dass die gleichen Überlegungen auch für andere Spiele angestellt werden können. Immerhin darf nicht übersehen werden, dass bei Spielen wie Schach besondere Verhältnisse vorliegen. Schach ist ein reines Vernunftsspiel, während die meisten anderen Gesellschaftsspiele mehr oder weniger Glücksspiele sind, bei denen es nicht allein auf die Geschicklichkeit des Spieler, sondern auch auf den Zufall ankommt. Bei solchen Spielen gibt es Situationen, in denen entweder der Zufall oder dann ein Spieler zu entscheiden hat, wie das Spiel fortgesetzt werden soll. Man sagt, ein solches Spiel enthalte sowohl persönliche als auch Glückszüge. Ein Beispiel dafür liegt beim Jaßspiel vor.

Es ist nun ein erfreulicher Umstand, dass sich die entwickelte Idee der Strategie *allgemein*, also auch für Glücksspiele, aufrechterhalten lässt. Dies geschieht folgendermassen: W sei die Menge aller Situationen w, bei denen im Verlaufe eines Spielganges ein Glückszug notwendig wird. In jeder Situation w geben dann die Spielregeln an, wie das Spiel fortgesetzt werden kann und welche Chancen für eine bestimmte Fort-

setzung bestehen. Mathematisch gesprochen heisst das: Zu jeder Situation w gibt es eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für jede Möglichkeit der Fortsetzung des Spiels. Nun kann man sich auch hier vorstellen, dass die Auslosungen durch einen Schiedsrichter erfolgen, und zwar von vornherein, d.h. bevor das Spiel beginnt. Eine solche hätte für jede mögliche Situation zu erfolgen, wodurch auf der Menge W eine Funktion $h(w)$ konstituiert wird. Die Funktion $h(w)$ erfüllt eine ähnliche Aufgabe, wie die Strategien $f_1(z)$ und $f_2(z)$ der Spieler; durch sie wird von vornherein festgesetzt, welche Auswahl bei Eintritt eines Glückszuges getroffen werden muss, $h(w)$ kann als die Strategie des Zufalles bezeichnet werden.

Das Auftreten von Glückszügen ändert nicht an der Tatsache, dass jeder Spieler eine Strategie wählen kann im Sinne der obigen Ausführungen. In diesem Falle muss der Spieler lediglich dem Umstand, dass nicht nur sein Gegner, sondern auch der Zufall Züge vollziehen kann, Rechnung tragen, d.h., er muss auch für jedes mögliche Ergebnis der Zufallszüge von vornherein einen Entscheid treffen.

Durch Angabe der Strategien $f_1(z)$, $f_2(z)$ und der Funktion $h(w)$ wird der Spielverlauf vollständig bestimmt. Beachtet man weiter, dass die Funktion $h(w)$ durch eine Folge von chronologischen Auslosungen entsteht, so erkennt man, dass jeder bestimmten Funktion $h(w)$ eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann, die nichts anderes ist als das Produkt der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Züge. Es kann damit zu jeder Funktion $h(w)$ ihre Wahrscheinlichkeit P_h berechnet werden. Ist H die Menge aller Verteilungen $h(w)$, so gilt offenbar: $\sum_{h \varepsilon H} P_h = 1$. Infolgedessen kann sich der Schiedsrichter einfach auf eine einzige Auslosung, die Auslosung eines $h \varepsilon H$, beschränken. – Genau so, wie durch die Einführung der Strategie die Gesamtheit aller notwendigen Einzelentscheide auf einen einzigen zurückgeführt werden kann, lässt sich auch die Gesamtheit aller Glückszüge durch einen einzigen ersetzen.

Damit lässt sich die Struktur eines Spiels sehr einfach beschreiben.

Spieler A wählt eine Strategie $f_1 \varepsilon F_1$, Spieler B eine Strategie $f_2 \varepsilon F_2$, wobei F_1 und F_2 die Mengen aller möglichen Strategien bezeichnen. Vom Schiedsrichter wird aus der Menge H eine Zufallsfolge h ausgelost. Damit erhält man eine Komposition $g = (f_1, f_2, h)$ von drei Funktionen. Durch ihre Vorgabe ist ein bestimmter Spielverlauf $g \varepsilon G$ und damit auch das Spielergebnis eindeutig bestimmt.

Die Normalform

Auf Grund der dargelegten Vereinfachungen ist es nun möglich, Gesellschaftsspiele ganz allgemein auf eine übersichtliche Normalform zurückzuführen. Der Kürze halber beschränken wir uns hierbei auf den Fall des Zweipersonenspiels. Beim Mehrpersonenspiel sind die Verhältnisse analog.

Wir denken uns die Strategien der Spieler und des Zufalls numeriert. Sind m bzw. n und l die Anzahlen der möglichen Strategien des Spielers A bzw. B und des Zufalls, dann wird jeder Spielverlauf durch Angabe von drei Zahlen $i \varepsilon I = (1, \ldots m)$; $j \varepsilon J = (1, \ldots n)$ und $k \varepsilon K = (1, \ldots l)$ festgelegt. Gleichzeitig mit Angabe dieser drei Grössen wird auch das Ergebnis, d. h. es werden die Gewinne (bzw. Verluste), welche jeder Spieler erzielt, bestimmt. Der Gewinn des Spielers A sei a_{ijk}. Dieser Gewinn erscheint mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, nämlich mit der Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsfolge $k \varepsilon K$ ausgelost wird; sie sei gegeben durch P_k. Mit Hilfe dieser Grössen kann der Erwartungswert des Gewinnes von A berechnet werden:

Er stellt sich auf: $$\underline{a_{ij} = \sum_{k \varepsilon K} a_{ijk} P_k} \qquad \text{mit} \sum_{k \varepsilon K} P_k = 1 .$$

Damit wird das Ergebnis für den Spieler A einzig von der Wahl der Strategien i und j abhängig, und es wird ersichtlich, dass die Gesamtheit aller möglichen Gewinne von A sich in Form einer Matrix $|a_{ij}|$ darstellen lässt, wie wir eine solche eingangs betrachtet haben. Dies ist ein sehr bemerkenswertes Resultat.

Analog könnte gezeigt werden, dass sich die Gewinne des Spielers B ebenfalls in Form einer Matrix $|b_{ij}|$ angeben lassen, wobei im allgemeinen a_{ij} und b_{ij} unabhängige Grössen sind. Sofern jedoch das Äquivalenzprinzip gilt, ist $a_{ij} = -b_{ij}$, d.h. der Gewinn von A ist gleich dem Verlust von B, entsprechend unserer eingangs getroffenen Annahme. Solche Spiele werden *Zweipersonenspiele mit Summe Null* bezeichnet, weil $a_{ij} + b_{ij} = 0$ ist.

Diese Einschränkung bringt zwar eine wesentliche Vereinfachung. Sie ist jedoch nicht notwendig. Wenn wir von den Gesellschaftsspielen absehen und wirtschaftliche Tauschhandlungen, die mit Vorteil als Spiele betrachtet werden können, ins Auge fassen, dann ist es so, dass der Gewinn der Beteiligten im allgemeinen eine positive Grösse ist. Der Gesamtnutzen, den zwei Personen aus einem Tausch erzielen, ist meistens eine

positive Grösse und kann sehr erheblich sein. Auch bei einer Versicherung ziehen in der Regel sowohl der Versicherer als auch der Versicherte einen Vorteil aus dem Abschluss eines Vertrages. Hieraus folgt, dass Spielen mit positiver Summe eine viel grössere Bedeutung zukommen als Spielen mit Summe Null. J. v. Neumann hat solche Spiele sehr eingehend untersucht und gezeigt, dass sich eine grosse Klasse von derartigen Spielen auf solche mit Summe Null zurückführen lassen. Das Studium der Spiele mit Summe Null bildet somit eine gute Grundlage für das Verständnis der Zusammenhänge bei allgemeinen Spielen mit Summe Nichtnull.

Der Hauptsatz der Spieltheorie für endliche Spiele

Wie gezeigt, können Gesellschaftsspiele auf eine Normalform zurückgeführt und in Form einer Matrix dargestellt werden. Von einer solchen Matrix wissen wir, dass sie unter Umständen einen Sattelwert besitzt und dass in diesem Fall eine Anweisung erteilt werden kann, wie sich jeder Spieler zu verhalten hat, damit sein Verlust einen gewissen Grenzbetrag nicht übersteigt.

Untersucht man die Matrix verschiedener Spiele, so erkennt man, dass lange nicht jede einen Sattelpunkt haben. Es gibt zwar eine grosse Klasse von Gesellschaftsspielen – die determinierten Spiele –, die einen Sattelwert aufweisen. Überraschenderweise gehört Schach hieher.

Die wichtige Frage ist aber die, wie man sich bei einem Spiel verhalten soll, dessen Matrix keinen Sattelpunkt besitzt. Da gilt der Hauptsatz der Spieltheorie, welcher zeigt, dass sich auch in solchen Fällen unter sehr allgemeinen Bedingungen Regeln angeben lassen, die ein bestmögliches Verhalten nahelegen, d.h. bei dem der Verlust auf ein Mindestmass beschränkt bzw. ein minimaler Gewinn sichergestellt werden kann. Dieser Satz stützt sich auf den Begriff der *gemischten Strategie*.

Betrachtet man das oben geschilderte Moraspiel, so erkennt man, dass Spieler A wohl am besten beraten ist, wenn er bald eine gerade, bald eine ungerade Zahl von Fingern ausstreckt, so dass B nicht erraten kann, was er vorhat. Würde nämlich A immer Gerade bieten, dann hätte B leichtes Spiel; er würde immer auf Ungerade setzen und könnte jedesmal 1 gewinnen. Spielt A aber bald Gerade, bald Ungerade, dann hat er Chancen, dass B sein Verhalten nicht ausspionieren kann. Eine eingehende Betrachtung zeigt, dass A am besten fährt, wenn er Gerade bzw.

Ungerade mit den Wahrscheinlichkeiten 0.5 bietet. Der Erwartungswert seines Gewinnes wird dann $0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot (-1) = 0$. D. h. auf diese Weise kann A zwar keinen positiven Gewinn erzielen, aber er kann mit Sicherheit verhindern, dass ihm B Verluste zufügt. Die gleiche Argumentation gilt auch für B. Das Spiel hat somit einen einheitlichen Wert, nämlich 0. Solche Spiele heissen fair.

Dieses Ergebnis legt nahe, ganz allgemein zu versuchen, durch Einführung einer alternativen Wahl der Reihen bzw. Spalten, die bestmöglichen Strategien für die beiden Spieler ausfindig zu machen. Man nennt ein solches Verfahren eine gemischte Strategie.

Eine gemischte Strategie geht also von der Annahme aus, die Wahl der Reihen bzw. Spalten erfolge nach bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Diese Verhältnisse werden durch die nachstehende Darstellung veranschaulicht.

$$\begin{array}{|cccc|c}
q_1 & q_2 & \cdots & q_n & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & p_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & p_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdot\cdot & a_{mn} & p_n
\end{array}$$

Hierin bedeutet q_j die Wahrscheinlichkeit, mit der die j-te Spalte bzw. p_i die Wahrscheinlichkeit, mit der die i-te Reihe gespielt wird.

Dabei gilt $$\sum_1^m p_i = 1, \qquad \sum_1^n q_j = 1.$$

Für die Feststellung des Erlöses muss der Erwartungswert berechnet werden:

$$\underline{a(p,q) = \sum_{1;1}^{m;n} a_{ij} \cdot p_i q_j,}$$

$a(p,q)$ stellt den durchschnittlichen Erlös von A bzw. Verlust von B bei Wahl der Wahrscheinlichkeitsverteilungen p und q dar.

Da die Interessen der beiden Spieler auseinanderfallen, wird Spieler A darnach trachten, den Wert $a(p,q)$ möglichst gross zu machen, während Spieler B bestrebt sein wird, seine Verteilung q so zu wählen, dass der Wert $a(p,q)$ möglichst klein wird.

A wird wie folgt argumentieren: Wähle ich eine bestimmte Verteilung p, so kann B sein q so wählen, dass $a(p,q)$ ein Minimum wird, also den Wert $\min\limits_q a(p,q)$ annimmt. Nun werden diese Werte $\min\limits_q a(p,q)$ verschieden hoch ausfallen, je nach der getroffenen Wahl von p. Unter ihnen gibt es sicher mindestens einen grössten, der für A am interessantesten ist. A wird also seine Verteilung p so bestimmen, dass der Erwartungswert $\max\limits_p \min\limits_q a(p,q)$ resultiert.

Analog kann B argumentieren. Wählt er irgendeine Verteilung q, dann weiss er, dass A den Wert $\max\limits_p a(p,q)$ zu erlangen sucht. Seine beste Wahl wird also sein, wenn er seine Verteilung so festsetzt, dass $\max\limits_p a(p,q)$ zu einem Minimum wird, d.h. den Erwartungswert $\min\limits_q \max\limits_p a(p,q)$ annimmt. Man sagt, A treibe eine Maximin- und B eine Minimax-Strategie.

Der Hauptsatz der Spieltheorie besagt nun, dass

$$\underline{\max_p \min_q a(p,q) = \min_q \max_p a(p,q)} \quad \text{ist.}$$

Dafür liegen bereits verschiedene Beweise vor. Sie sind einfach, indessen würde es doch zu weit führen, einen solchen hier in extenso anzugeben. Man findet ihn in der eingangs zitierten Literatur. Aus der Existenz dieses Satzes folgt, dass bei endlichen Spielen mit einer Matrix $|a_{ij}|$, $(i = 1, 2, \ldots m;\ j = 1, 2, \ldots n)$, für jeden Spieler eine beste Strategie existiert.

Der Hauptsatz der Spieltheorie bildet zweifellos einen Eckpfeiler in der ganzen mathematischen Entwicklung. Er ist ausserordentlich fundamental und umfassend. Er gilt für alle endlichen Werte von m und n. Dagegen gilt er nicht uneingeschränkt für Spiele mit *unendlich* vielen reinen Strategien.

Die Lösungen

Einige Schwierigkeiten bietet die Auffindung der besten Strategien für die beiden Spieler, d.h. die numerische Berechnung der Verteilungen p und q. Im Prinzip kann die Lösung eines endlichen Spieles durch die Lösung von Systemen linearer Gleichungen nach der Methode der «linearen Programmierung» gefunden werden. Dagegen hat man für die Lösung von unendlichen Spielen noch keine Universalmethode gefunden.

Das Mehrpersonenspiel

Das Ziel von Neumann war insbesondere auch das Studium des Mehrpersonenspiels. In gleicher Weise wie beim Zweipersonenspiel war sein Anliegen auch beim Mehrpersonenspiel, allgemeine Regeln ausfindig zu machen und Anhaltspunkte zu gewinnen, wie sich der einzelne Spieler zu verhalten hat, um bei vorgegebenen Spielregeln möglichst günstig abzuschliessen. Da unser Gesellschaftsleben ganz allgemein betrachtet als ein Spiel aufgefasst werden kann, bei dem jeder Partner sich zu entscheiden hat und – gestützt auf seinen Entscheid – einen Gewinn oder Verlust einheimsen kann bzw. muss, besteht die Aussicht, durch Ausbau der Spieltheorie Einsichten und Richtlinien zu gewinnen, um die ökonomischen Vorgänge besser beurteilen zu können. Dass dies notwendig und sehr erwünscht wäre, wird jeder, der die Schwierigkeiten auf diesem Gebiet einigermassen kennt, zugeben. Es zeigt sich, dass die Spieltheorie tatsächlich eine geeignete und wirksame Methode zur Begründung und Entwicklung der mathematischen Nationalökonomie zu liefern vermag. Bereits bei der Betrachtung einer Zweipersonenwirtschaft ergeben sich neue Aspekte gegenüber der alten Theorie. Während man früher glaubte, man habe nur mit einem Maximumproblem zu tun, zeigt die Spieltheorie, dass hier in Wirklichkeit Minimax- bzw. Maximin-Probleme auftauchen. Es war ein Irrtum, anzunehmen, es sei am besten, wenn jeder Partner versuche, seinen Gewinn zu maximieren; jeder muss vielmehr berücksichtigen, dass der Opponent auch über gewisse Entscheidungsfreiheiten verfügt und durchaus in der Lage sein kann, seine Absichten zu durchkreuzen.

Wesentlich neue Momente, die auch dem Wirtschaftsleben eigen sind, tauchen bei der Betrachtung des Dreipersonenspiels auf. Hier erweist sich als notwendig, dem Umstand Rechnung zu tragen, dass zwei Spieler sich zusammenschliessen und gemeinsam gegen den dritten vorgehen können. Die Lösungen, die Neumann hiefür gefunden hat, sind äusserst interessant, nicht nur vom nationalökonomischen, sondern besonders auch vom mathematischen Standpunkt aus. Man gelangt zu neuartigen Darstellungen, die eigenartig sind und bisher in der Mathematik unbekannt waren.

Beim Vierpersonenspiel mehren sich auch entsprechend die Schwierigkeiten, so dass eine allgemeine Lösung unseres Wissens nicht angegeben werden konnte. Immerhin hat man auch hier unter etwas verein-

fachten Bedingungen interessante mathematische Zusammenhänge gefunden.

Allgemein kann man sich fragen, ob die Verhältnisse in der Spieltheorie nicht ähnlich liegen wie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, d. h. ob nicht für grosses n (n = Anzahl der Spieler) allgemeine Resultate gewonnen werden können, von denen aus die Theorie für kleines n beherrscht werden kann. Dies scheint nicht in gleichem Mass der Fall zu sein. Immerhin kennt man gewisse Normen, die eine teilweise, wenn auch nicht erschöpfende Behandlung des Mehrpersonenspiels ermöglichen.

Indessen liegen in der Ökonomie die Verhältnisse auch wesentlich anders als in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Man hat es hier selten mit einer grossen, sondern in der Regel nur mit einer beschränkten Zahl von Kontrahenten zu tun. Deshalb kommt den strategischen Spielen mit einer kleinen Zahl von Personen auch besondere Bedeutung zu. Die wesentlichen Tauschhandlungen spielen sich meistens zwischen wenigen, oft nur zwei Wirtschaftsgruppen ab, was einem Zweipersonenspiel gleichkommt.

In der Versicherung haben wir es grosso modo nur mit zwei Vertragspartnern zu tun, dem Versicherer und dem Versicherten oder dem Versicherer und dem Rückversicherer. Wir stehen also grundsätzlich auch hier vor einem Zweipersonenspiel. Durch die Einführung der Nutzenfunktion wird es möglich, dieses Spiel näher zu verfolgen. Meines Erachtens ist es fraglos, dass damit ein tieferer Einblick in das Versicherungswesen und seine wirtschaftliche Bedeutung erreicht wird. (Vide: «Zur mathematischen Darstellung des Nutzens in der Versicherung», Heft 3, 1955, MSVM.)

In diesem Zusammenhang soll hierauf jedoch nicht weiter eingetreten werden. Dafür soll kurz auf eine andere Richtung in der Entwicklung der Spieltheorie hingewiesen werden, die ebenfalls von ausserordentlicher Tragweite sein dürfte. Es handelt sich um die Anwendung der Spieltheorie in der Statistik.

Das statistische Spiel

Die Arbeit des Forschers kann als ein Zweipersonenspiel aufgefasst werden, d. h. als ein Spiel zwischen dem Forscher und der Natur. In der Tat ist die Haltung des Forschers gegenüber der Natur ähnlich wie die

eines Spielers. Er weiss von vornherein nicht, wie sich diese in den einzelnen Situationen verhalten wird, was für «Züge» sie tun wird. Er kann aber doch annehmen, dass sie sich an gewisse Gesetze – die Spielregeln – halten wird, und hat die Möglichkeit, ihr Verhalten zu verfolgen, ähnlich wie ein Schachspieler das Verhalten seines Gegners genau beobachten kann, um daraus Anhaltspunkte für die Fortsetzung des Spieles zu gewinnen. – Was die Natur anbelangt, ist es allerdings nicht so, dass sich diese genau wie ein Spieler verhält. Sie kann nicht als ein bewusster Gegner aufgefasst werden, der bestrebt ist, seinen Gewinn zu maximieren. Der Forscher muss also nicht unbedingt befürchten, dass die Natur ihn zu bevorteilen sucht. Indessen ist es für ihn meistens von besonderem Interesse, zu wissen, wie er sich zu verhalten hat, für den Fall eines ungünstigen Ablaufes der Ereignisse, die seinen Erfolg in Frage stellen. Unter diesem Gesichtspunkt ergibt sich für ihn die gleiche Problemstellung wie für einen Spieler. Es ist für ihn wichtig, zu wissen, welche seine besten Strategien sind für den Fall eines zuwiderlaufenden Verhaltens der Natur.

Wir gehen also von der Annahme aus, die Natur wähle eine bestimmte Strategie, indem sie eine gewisse Wahrscheinlichkeitsverteilung vorschreibt. Nehmen wir an, das könne geschehen durch Vorgabe eines Parameters ω, dann wird durch die Menge Ω die Gesamtheit aller möglichen Strategien der Natur vorgegeben. (Z. B. wird die Poissonsche Verteilung $p(z) = \frac{1}{z!} \omega^z e^{-\omega z}$ durch den Parameter ω vollständig bestimmt.)

Der Statistiker kennt die Wahl der Natur nicht, er hat aber die Möglichkeit, eine bestimmte Annahme $a \varepsilon A$ zu treffen, wobei A die Menge aller möglichen Annahmen darstellt. Nun kommt es darauf an, inwieweit diese Annahme zutreffend ist. Wenn die Abweichung zwischen Annahme a und wahrem Wert ω gross ist, dann ist der Verlust, der aus diesem Auseinanderfallen resultiert, auch entsprechend hoch.

Man bezeichnet den Verlust, der so entsteht, mit $s(a,\omega)$ und nennt $s(a,\omega)$ die *Schadenfunktion.* – Damit sind grundsätzlich alle Grössen eines statistischen Spieles gegeben. Ein solches wir durch die Mengen Ω und A und eine auf der Produktmenge $\Omega \cdot A$ definierte Funktion $s(a,\omega)$ gegeben. Man schreibt dafür abgekürzt $G = (\Omega, A, s(a,\omega))$. Wie ersichtlich, ist die Struktur eines solchen Spieles die gleiche wie die eines Gesellschaftsspieles. An Stelle der Grössen Ω und A und $s(a,\omega)$ hatten wir dort

die Grössen I, J und a_{ij}. Der hauptsächlichste Unterschied besteht darin, dass beim statistischen Spiel die Zahl der möglichen Strategien im allgemeinen unendlich gross ist.

Zu bemerken bleibt noch, dass der Statistiker die Möglichkeit hat, Experimente, z. B. Stichproben, durchzuführen, womit seine Wahl von a wesentlich erleichtert und präzisiert werden kann. Diese Möglichkeit führt zu ausserordentlich interessanten Erweiterungen und Verfeinerungen der statistischen Spiele. Es würde aber über den Rahmen dieses Berichtes führen, auf sie einzutreten, es sei diesbezüglich auf die Literatur, insbesondere auf das Werk von Blackwell and Girsick: «Theory of Games and Statistical Decisions», 1954, verwiesen.

Andere Anwendungen in der Versicherung

Überall dort, wo der Mathematiker auf Grund gewisser, aber unvollständiger Informationen vor die Wahl gestellt wird und einen bestmöglichen Entscheid zu treffen hat, können ihm die Methoden und Betrachtungsweise der Spieltheorie gute Dienste leisten. Diese Situation tritt ausserordentlich häufig auf, insbesondere auch in der Versicherung. Der Versicherer muss viele Entscheide treffen, ohne restlos über die Auswirkung seiner zu ergreifenden Massnahmen orientiert zu sein. Der Ausbau des Betriebes, die Wahl der Tarifgrundlagen, die Festsetzung des Selbstbehaltes bei Rückversicherungen usw. erheischen von ihm mitunter folgenschwere Entscheide. Bei jeder damit verbundenen Anordnung stellt sich die Frage, inwieweit die damit verbundenen Annahmen zutreffen, und ob der erforderliche Kostenaufwand sich verantworten lässt. Ein interessantes Beispiel, das hieher gehört, bildet das vieldiskutierte Problem der Deckungskapitalberechnung. Die Berechnung des Bilanzdeckungskapitals einer grossen Versicherungsinstitution erfordert einen ausserordentlichen Arbeitsaufwand, der durch Anwendung von Approximationsmethoden erheblich vermindert werden kann. Inwieweit aber solche Abkürzungen statthaft sind, hängt vom Ausmass der Verluste ab, die sich aus einer unzutreffenden Abschätzung des richtigen Wertes ergeben. Die Situation ist also ähnlich wie oben geschildert. Es fragt sich, welche Strategie der Versicherungsmathematiker anwenden soll, um mit möglichst geringen Kosten und doch hinreichender Zuverlässigkeit das Bilanzdeckungskapital abzuschätzen. Hierüber liegt eine Dissertation

vor von Dietrich Bierlein: «Optimalmethoden für die Summenapproximation im Jechlins F-Methoden», erschienen in den Blättern der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematiker, Band II, Heft 3. Auch bei dieser Betrachtung wird angenommen, der «wahre» Wert, also der genaue Betrag des Deckungskapitals, werde durch die Natur vorgeschrieben, während dem Mathematiker die strategische Aufgabe zufällt, diesen abzuschätzen. – Einige Schwierigkeiten bietet die Feststellung der Schadenfunktion, da diese nicht von vornherein bekannt ist. Ihre Festsetzung muss auf Grund von geeigneten Annahmen erfolgen. Die Bedeutung der Schadenfunktion ergibt sich daraus, dass sie Anhaltspunkte über den riskierten Schaden zu bieten vermag und damit ein unerlässliches Kriterium für die Beurteilung einer Näherungsmethode an die Hand gibt.

Abschliessend sei bemerkt, dass die Spieltheorie sich noch stark in der Entwicklung befindet. Es gibt hier zahlreiche ungelöste Probleme. Wer sich die nötige Zeit erübrigen kann und Ausdauer besitzt, findet hier ein dankbares Arbeitsfeld.