Sur une extension du calcul des probabilités

Autor(en): **Muller, Maurice**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **58 (1958)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966801

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Sur une extension du calcul des probabilités

Par *Maurice Muller*, Zurich

L'analyse des principes d'une théorie mathématique apporte toujours quelque lumière sur la nature des opérations que le technicien est appelé à effectuer. Il est, dans ce but, utile de comparer des théories voisines l'une de l'autre, comme l'on compare les axiomes de la géométrie euclidienne à ceux de la géométrie de Riemann. L'art de l'actuaire, en tant qu'application du calcul des probabilités, n'échappe pas à une certaine exigence de rigueur et nous voudrions montrer ici en quoi – et pourquoi – la technique actuarielle, en tant que fondée sur les principes classiques du calcul des probabilités, s'écarte d'une théorie statistique qui recouvre dans une mesure non négligeable certains phénomènes de la microphysique.

Supposons que nous soyons en présence d'une population ou d'un groupe d'individus bien déterminés par des signes facilement reconnaissables, par exemple la population d'un canton suisse ou les membres et bénéficiaires d'une caisse de retraite. Au temps t_1 nous pouvons mesurer (à condition de procéder aux enquêtes nécessaires, aussi longues et délicates qu'elles soient) l'état de notre population ou de notre groupe selon les composantes qui nous intéressent, par exemple le nombre de valides, d'invalides et de mariés, la répartition des revenus ou des salaires, le nombre de rentiers ou de veuves et les pensions qu'ils reçoivent, les cotisations versées par les actifs et les fonds en réserve. La mesure d'un groupe de composantes – par exemple relatif aux salaires ou à l'état civil – ne peut d'aucune manière nous interdire la mesure exacte d'un autre groupe de composantes – par exemple relatif à l'état d'invalidité ou au taux de l'intérêt. Nous trouvant au temps t_1, nous pourrons essayer de nous rendre compte de l'état futur, au temps t_2, de notre population ou de notre caisse de retraite. Dans

ce but nous ferons usage de probabilités issues de données statistiques, relatives à la mortalité, à la nuptialité, à l'invalidité; nous ferons des hypothèses – si possible elles-mêmes appuyées sur des données statistiques – concernant l'évolution des salaires ou du taux de l'intérêt, le renouvellement de la population ou de l'effectif des assurés. Nous pourrons en particulier faire dépendre ce renouvellement de probabilités, lui conférer une nature aléatoire, assimiler par exemple le milieu extérieur à la population envisagée ou à la caisse de retraite à une urne dans laquelle cette population ou cette caisse puise tout ou partie de son renouvellement. Nous obtiendrons ainsi les renseignements qui nous intéressent sur l'état probable au temps ultérieur t_2. Mais, quelles que soient les hypothèses faites, quelle que soit en particulier notre manière de substituer des probabilités à des hypothèses plus restrictives, nous pourrons de toute façon, lorsque nous serons effectivement parvenus au temps t_2, mesurer simultanément les différentes composantes de l'état de notre population ou de notre caisse de retraite, en renouvelant les mesures déjà effectuées au temps t_1. Le fait qu'au temps t_1 nous ne possédions que des renseignements probables sur l'état au temps t_2 ne modifie en rien la possibilité que nous aurons, lorsque nous serons parvenus au temps t_2, de déterminer l'état au temps t_2 de notre population ou de notre caisse de retraite. Bien entendu, par état de la caisse de retraite au temps t il faut entendre ici non pas son bilan technique, lequel présume de l'évolution subséquente de la mortalité ou de l'invalidité, mais ses réserves telles qu'elles sont en fait constituées et la composition de son effectif.

De toute façon – et ceci est important – l'actuaire ne connaît, au moins dans la pratique usuelle de ses opérations, aucune *interdiction* du genre de celles auxquelles la microphysique nous a habitués. (Par exemple, pour le physicien, la mesure exacte du lieu occupé par une particule interdit la connaissance précise de la quantité de mouvement de cette particule.) D'une manière plus adéquate – et aussi plus restrictive – *si une telle interdiction n'existe pas pour l'actuaire, le calcul des probabilités dont il fait usage a (on le présumera tout au moins) une structure logique différente de celle du calcul des probabilités utilisé par le physicien.*

Nous essaierons ici, d'une façon à la fois plus modeste et plus générale, de faire apercevoir la différence de principe entre deux modes de calcul statistique en montrant, d'une manière d'ailleurs élémentaire,

comment on peut passer du calcul des probabilités classique à un calcul plus général.

Soit par exemple un groupe d'assurés masculins comprenant l personnes réparties de la manière suivante:

a mariés, dont e valides et g invalides,

b non mariés, dont f valides et h invalides,

c valides, dont e mariés et f non mariés,

d invalides, dont g mariés et h non mariés;

ces grandeurs sont évidemment reliées par les relations suivantes:

$$a + b = c + d = l;$$

$$e + f = c; \qquad g + h = d;$$

$$e + g = a; \qquad f + h = b.$$

Si nous choisissons à tout hasard un individu dans ce groupe d'assurés, la probabilité pour que notre choix tombe sur un individu marié *et* invalide est égale à:

$$\frac{g}{l} = \frac{a}{l} \cdot \frac{g}{a} = \frac{d}{l} \cdot \frac{g}{d},$$

relation qui est une expression du théorème des probabilités composées.

Plus généralement, envisageons un ensemble d'individus ou un état physique ayant certains caractères, *que nous supposons ici réduits à deux*, α et β, correspondant, *par exemple* (pour un ensemble d'individus), α à l'état civil (marié ou non marié) et β à la capacité de travail (valide ou invalide). Ces caractères peuvent prendre certaines valeurs ou certains rangs (par exemple le rang $\mu = 1$ du caractère α signifiant marié et le rang $\mu = 2$ signifiant non marié). Nous définirons les probabilités de la manière suivante:

p_μ^α, la probabilité pour que le caractère α ait le rang μ;

p_ν^β, la probabilité pour que le caractère β ait le rang ν;

$q_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$, la probabilité pour que, le caractère α *ayant* le rang μ, le caractère β *prenne* le rang ν;

$q_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$, la probabilité pour que, le caractère β *ayant* le rang ν, le caractère α *prenne* le rang μ,

en supposant qu'un caractère ne puisse pas prendre deux rangs (ou valeurs) à la fois. Conformément à l'exemple que nous avons donné, nous pourrons exprimer le théorème des probabilités composées (qui est plus un principe qu'un théorème) de la façon suivante:

$$p_\mu^\alpha q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = p_\nu^\beta q_{\nu\mu}^{\beta\alpha}.$$

Nous pourrons dès lors écrire les relations suivantes:

$$\sum_\mu p_\mu^\alpha = 1; \qquad \sum_\nu q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = 1; \qquad \sum_\nu p_\nu^\beta = 1; \qquad \sum_\mu q_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = 1,$$

dont on déduit:

$$\sum_\nu p_\mu^\alpha q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = p_\mu^\alpha; \qquad \sum_\mu p_\nu^\beta q_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = p_\nu^\beta$$

et, en vertu du théorème des probabilités composées:

$$\sum_\nu p_\nu^\beta q_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = p_\mu^\alpha; \qquad \sum_\mu p_\mu^\alpha q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = p_\nu^\beta.$$

La généralisation du calcul des probabilités que nous avons en vue consiste à admettre que les deux dernières relations, découlant du théorème (ou principe) des probabilités composées ne sont pas exactes dans tous les cas et que par conséquent ce théorème n'est pas toujours applicable. Nous poserons à la base de notre calcul les groupes de relations *I* et *II* suivantes,

$$(I) \qquad \sum_\mu p_\mu^\alpha = 1; \qquad \sum_\nu q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = 1; \qquad \sum_\nu p_\nu^\beta = 1; \qquad \sum_\mu q_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = 1,$$

dont on déduit, comme auparavant,

$$\sum_\nu p_\mu^\alpha q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = p_\mu^\alpha; \qquad \sum_\mu p_\nu^\beta q_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = p_\nu^\beta,$$

et

$$(II) \qquad p_\mu^\alpha - \sum_\nu p_\nu^\beta q_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = \varepsilon_{\cdot\mu}^{\beta\alpha},$$

$$p_\nu^\beta - \sum_\mu p_\mu^\alpha q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \varepsilon_{\cdot\nu}^{\alpha\beta},$$

le théorème des probabilités composées n'étant alors applicable que si les seconds membres sont nuls. Nous avons ainsi dans le cas général (sauf éventuellement pour des valeurs particulières de μ et ν):

$$p_\mu^\alpha q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \neq p_\nu^\beta q_{\nu\mu}^{\beta\alpha};$$

en effet, si nous sommons les deux membres de cette inégalité par rapport à ν, ou par rapport à μ, nous obtenons bien les inégalités évidentes:

$$p_\mu^\alpha \neq p_\mu^\alpha - \varepsilon_{.\mu}^{\beta\alpha},$$

$$p_\nu^\beta \neq p_\nu^\beta - \varepsilon_{.\nu}^{\alpha\beta}.$$

D'autre part, en sommant par rapport à μ la première équation II et par rapport à ν la seconde, on obtient les deux identités importantes:

$$\sum_\mu \varepsilon_{.\mu}^{\beta\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_\nu \varepsilon_{.\nu}^{\alpha\beta} = 0.$$

En mécanique ondulatoire, les probabilités sont fonction de certaines grandeurs imaginaires. Ecrivons dès lors:

$$p_\mu^\alpha = a_\mu^\alpha \bar{a}_\mu^\alpha; \qquad p_\nu^\beta = a_\nu^\beta \bar{a}_\nu^\beta; \qquad q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = c_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \bar{c}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}; \qquad q_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = c_{\nu\mu}^{\beta\alpha} \bar{c}_{\nu\mu}^{\beta\alpha},$$

où a_μ^α surmonté d'un trait, $\bar{a}_\mu^\alpha$, représente l'imaginaire conjugué de a_μ^α. Nous donnerons un caractère plus restreint à notre calcul en posant les relations III suivantes:

$$(III) \qquad a_\nu^\beta = \sum_\mu a_\mu^\alpha c_{\mu\nu}^{\alpha\beta}; \qquad a_\mu^\alpha = \sum_\nu a_\nu^\beta c_{\nu\mu}^{\beta\alpha},$$

dont on déduit aisément, par exemple,

$$p_\nu^\beta = a_\nu^\beta \bar{a}_\nu^\beta = \sum_\mu a_\mu^\alpha \bar{a}_\mu^\alpha c_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \bar{c}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{\tau \\ \tau \neq \sigma}} \sum_\sigma (a_\tau^\alpha \bar{a}_\sigma^\alpha c_{\tau\nu}^{\alpha\beta} \bar{c}_{\sigma\nu}^{\alpha\beta} + \bar{a}_\tau^\alpha a_\sigma^\alpha \bar{c}_{\tau\nu}^{\alpha\beta} c_{\sigma\nu}^{\alpha\beta}).$$

On dit alors dans ce cas qu'il y a «interférence des probabilités». Dans cette équation, la première somme est égale à

$$\sum_\mu p_\mu^\alpha q_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$$

et la seconde à

$$\varepsilon_{.\nu}^{\alpha\beta}.$$

Nous sommes donc bien en présence d'une relation de la forme attendue:

$$p_\nu^\beta = \sum_\mu p_\mu^\alpha q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + \varepsilon_{.\nu}^{\alpha\beta}.$$

Les probabilités de la mécanique ondulatoire dépendent du développement d'une certaine fonction ψ selon des suites de fonctions φ_μ^α ou φ_ν^β, les relations suivantes étant valables:

$$\psi = \sum_{\mu} a_{\mu}^{\alpha} \varphi_{\mu}^{\alpha} = \sum_{\nu} a_{\nu}^{\beta} \varphi_{\nu}^{\beta}; \qquad \varphi_{\mu}^{\alpha} = \sum_{\nu} c_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varphi_{\nu}^{\beta}; \qquad \varphi_{\nu}^{\beta} = \sum_{\mu} c_{\nu\mu}^{\beta\alpha} \varphi_{\mu}^{\alpha}$$

avec, dw représentant l'élément de volume et l'intégrale étant étendue à tout l'espace (ou à un domaine déterminé):

$$\int \psi \overline{\psi}\, dw = 1; \qquad \int \varphi_{\mu}^{\alpha} \overline{\varphi}_{\sigma}^{\alpha}\, dw = \delta_{\mu\sigma}; \qquad \int \varphi_{\nu}^{\beta} \overline{\varphi}_{\sigma}^{\beta} = \delta_{\nu\sigma}$$

où $\delta_{\tau\sigma}$ est égal à 1 si $\sigma = \tau$ et à zéro si $\sigma \neq \tau$. (Une théorie plus complète devrait faire intervenir le caractère non-commutatif ou commutatif des opérateurs dont dépendent les fonctions introduites.)

De ces relations nous déduisons aisément:

$$\varphi_{\mu}^{\alpha} \overline{\varphi}_{\nu}^{\beta} = \varphi_{\mu}^{\alpha} \sum_{\sigma} \overline{c}_{\nu\sigma}^{\beta\alpha} \overline{\varphi}_{\sigma}^{\alpha} = \overline{\varphi}_{\nu}^{\beta} \sum_{\sigma} c_{\mu\sigma}^{\alpha\beta} \varphi_{\sigma}^{\beta};$$

en intégrant, on constate immédiatement que l'on doit avoir (les coefficients $c_{\mu\sigma}^{\alpha\beta}$ et $c_{\nu\sigma}^{\beta\alpha}$ ne dépendant pas des coordonnées d'espace):

$$c_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \overline{c}_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$$

et, en conséquence,

$$q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = q_{\nu\mu}^{\beta\alpha}.$$

Ceci montre bien que nous avons, dans le cas général:

$$p_{\mu}^{\alpha} q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \neq p_{\nu}^{\beta} q_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$$

puisque p_{μ}^{α} est en général différent de p_{ν}^{β}.

Au moins dans la mesure où la technique actuarielle reconnaît le principe des probabilités composées, elle s'écarte nécessairement des principes de nature statistique utilisés par le microphysicien. Telle est la conclusion à laquelle nous voulions parvenir, les prévisions de l'actuaire respectant en général, *mutatis mutandis*, les principes du calcul des probabilités tels qu'ils étaient acceptés par Laplace.