La correspondance prospective-rétrospective et les méthodes de calcul par groupes des réserves mathématiques

Autor(en): **Urech, Auguste**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **60 (1960)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966781

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

La correspondance prospective-rétrospective et les méthodes de calcul par groupes des réserves mathématiques

Par Auguste Urech, Berne et Lausanne

Résumé

Le théorème connu suivant lequel les réserves mathématiques prospective et rétrospective sont égales si elles sont calculées d'après les mêmes bases techniques permet de définir une correspondance $P \rightarrow R$ entre les éléments de la période d'assurance qui s'étend au-delà de l'inventaire et ceux de la période qui précède. Appliquée aux méthodes de calcul par groupes des réserves mathématiques d'un portefeuille d'assurances, la transformation $P \rightarrow R$, ou son inverse $R \rightarrow P$, fait alors correspondre à toute méthode donnée de groupement une méthode dérivée, obtenue par la transformation de la première. Aux propriétés de la méthode primitive correspondent des propriétés symétriques de la méthode dérivée. L'étude s'étend à la méthode de groupement U, dérivée de celle d'Altenburger, à la méthode t, dérivée de celle de Lidstone, ainsi qu'à la méthode de Fouret qui se correspond à elle-même.

Les méthodes de groupement pour le calcul des réserves mathématiques d'un portefeuille d'assurances sont fort nombreuses et variées. Cependant, beaucoup de celles qui ont été publiées ne se distinguent pas d'une manière essentielle les unes des autres.

Ce qui frappe lorsqu'on étudie ces méthodes, dont plusieurs remontent bientôt à une centaine d'années, c'est qu'on n'a guère cherché à en faire des études systématiques. En particulier, on ne s'est pas appliqué à découvrir des procédés généraux qui permettraient, en partant de méthodes connues, d'en trouver d'autres.

L'actuaire est un homme de science à qui l'on demande de trouver rapidement des solutions à toutes sortes de problèmes, en tenant compte de nécessités commerciales, souvent sans lui laisser le loisir d'étudier ces solutions sous tous leurs aspects. Il n'est dès lors point surprenant qu'on ait imaginé une multitude de méthodes de groupement des polices d'un portefeuille d'assurances en vue du calcul des réserves mathématiques, qu'on les ait améliorées pour en tirer le profit maximum du point de vue administratif, sans toujours en examiner à fond les aspects scientifiques.

Dans une thèse de doctorat présentée à l'Université de Lausanne en 1959, M. Kénan Ural a étudié un procédé qui permet de faire correspondre à toute méthode de groupement une autre méthode, dite dérivée de la première. La correspondance envisagée est définie en partant du théorème connu: pour toute assurance, les réserves mathématiques prospective et rétrospective sont égales si elles sont calculées d'après les mêmes bases techniques.

Considérons une assurance quelconque, de capital C, x désignant l'âge d'entrée de l'assuré, n la durée de l'assurance, $s = x + n$ l'âge-terme et P la prime pure. La réserve mathématique prospective après t années peut s'écrire:

$$C\,{}_tV_x^{\text{pr.}} = C\,{}_tA - P\,{}_t\ddot{a},$$

et la réserve mathématique rétrospective:

$$C\,{}_tV_x^{\text{rétr.}} = P\,\ddot{s}_{x:\overline{t}|} - C\,{}_{|t}A_x^*.$$

Nous utiliserons autant que possible la notation actuarielle internationale. Le symbole ${}_{|t}A_x^*$ n'en fait cependant pas partie. Il désigne la valeur finale du risque, suivant l'expression introduite par M. Ch. Jéquier sous la désignation ${}_{|t}r_x$ dans son ouvrage: «De la capitalisation viagère», Lausanne, La Concorde 1949, page 41. $\ddot{s}_{x:\overline{t}|}$ est le facteur de capitalisation viagère du même auteur (page 29). L'astérisque signifie qu'il s'agit d'une quantité concernant le calcul rétrospectif ou découlant de la transformation $P \rightarrow R$ définie plus loin.

On aurait des formules analogues pour les assurances de rentes.

La méthode prospective fait intervenir des éléments futurs: primes et prestations à échoir, durée restant à courir, âge-terme, etc. Dans la formule rétrospective, on trouve en revanche des éléments du passé: primes et prestations payées, durée courue, âge d'entrée, etc. Puisque le résultat numérique est le même dans les deux cas à la seule condition qu'on utilise les mêmes bases techniques, il doit être possible d'établir, à partir du moment t, une correspondance entre les éléments de l'avenir et ceux du passé.

A la période future, nous faisons donc correspondre celle qui est passée. La valeur actuelle $P_t\ddot{a}$ des primes futures se transforme en la valeur finale $P\,\ddot{s}_{x:\overline{t}|}$ des primes versées dans le passé; celle des prestations futures $C\,{}_tA$, en la valeur finale du risque $C\,{}_{|t}A_x^*$. Le moment t de l'inventaire se correspond à lui-même tandis que l'âge d'entrée x

s'oppose à l'échéance s. A tout calcul par la méthode prospective correspond un calcul bien déterminé de la méthode rétrospective, et réciproquement.

Pour toute assurance, il existe ainsi une correspondance entre les éléments futurs et passés, que nous désignerons avec M. Ural par le terme: «correspondance prospectif-rétrospectif», ou simplement par $P \rightarrow R$. Il ne s'agit pas d'une correspondance point par point telle qu'on la rencontre par exemple dans l'homologie, mais d'une transformation spéciale qui doit être définie pour nos besoins et qui rappellerait plutôt certains problèmes de l'analysis situs.

Ces remarques sont valables pour n'importe quelle assurance. A elles seules, elles permettent quelques applications intéressantes.

Considérons par exemple un portefeuille d'assurances à un moment t. La correspondance $P \rightarrow R$ s'applique à chaque assurance. A une méthode de groupement utilisant la formule prospective, il doit donc être possible d'en faire correspondre une autre fondée sur la formule rétrospective, précisément la méthode dérivée de la première, et inversément.

En cherchant les méthodes dérivées de méthodes de groupement connues, on peut espérer en trouver de nouvelles ou éclairer des méthodes connues sous un jour nouveau. A des propriétés connues d'une méthode doivent correspondre certaines propriétés de la méthode dérivée.

Partons par exemple de *la méthode d'Altenburger*. On sait qu'elle est fondée sur la formule prospective du calcul de la réserve mathématique. Pour une assurance mixte de capital C, dont la durée du paiement de la prime est de m années et la prime pure constante P, on a pour $t \leqq m$:

$$
\begin{aligned}
C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} &= C\,\frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} - P\,\frac{N_{x+t} - N_{x+m}}{D_{x+t}} \\
&= C\,\frac{M_{x'}}{D_{x'}} - P\,\frac{N_{x'}}{D_{x'}} + \frac{1}{D_{x'}}\left[P\,N_{x+m} + C\,D_{x+n} - C\,M_{x+n}\right] \\
&= C\,A_{x'} - P\,\ddot{a}_{x'} + \frac{K}{D_{x'}},
\end{aligned}
$$

en posant: $x' = x + t$ et $K = P\,N_{x+m} + C\,D_{x+n} - C\,M_{x+n}$.

K est le coefficient d'Altenburger.

La réserve mathématique s'exprime au moyen d'une somme algébrique dont chaque terme est, pour une police déterminée, le produit d'une constante indépendante de x' par un multiplicateur qui ne dépend que de l'âge x' à l'inventaire.

Si donc dans un portefeuille d'assurances on groupe toutes les polices dont les assurés ont le même âge x' à l'inventaire, les multiplicateurs $A_{x'}$, $\ddot{a}_{x'}$ et $\frac{1}{D_{x'}}$ ont les mêmes valeurs pour toutes les polices du groupe. Les réserves mathématiques du groupe seront données par la formule:

$$\sum_i C_i \, {}_{t_i}V_{x_i:\overline{n_i}|} = A_{x'} \sum_i C_i - \ddot{a}_{x'} \sum_i P_i + \frac{1}{D_{x'}} \sum_i K_i ,$$

où l'indice i s'étend à toutes les polices du groupe considéré, dont l'âge à l'inventaire est x'.

Pour d'autres formes d'assurances (vie entière, terme fixe, assurances à prime croissante, assurances de capitaux différés avec ou sans contre assurance, rentes, assurances sur deux têtes, etc.), on peut pratiquer d'une manière analogue; de nouveaux multiplicateurs, fonctions de x', apparaissent: $v^{x'}$, $(IA)_{x'}$, $\ddot{a}_{x'y'}$, etc.; mais les réserves mathématiques d'un groupe de polices ayant le même âge à l'inventaire peuvent s'exprimer en fonction des multiplicateurs $A_{x'}$, $\ddot{a}_{x'}$, $v^{x'}$, $(IA)_{x'}$, $\ddot{a}_{x'y'}$, $\frac{1}{D_{x'}}$, etc., qui dépendent de l'âge x', et de sommes de quantités caractéristiques des polices du groupe, indépendantes de l'âge à l'inventaire. C'est le propre de la méthode d'Altenburger, sa caractéristique essentielle. *La méthode de Whiting* n'en est qu'une variante. Tandis qu'Altenburger exprime sa constante en fonction de l'âge à l'échéance, Whiting le fait au moyen de l'âge d'entrée. Il peut y avoir certains avantages d'ordre pratique en faveur de l'un ou de l'autre de ces calculs. Cependant, les deux méthodes ne sont pas essentiellement différentes. Du reste, pour toute police, la valeur numérique du coefficient de Whiting est égale à celle du coefficient d'Altenburger.

Après avoir rappelé les principes qui sont à la base de la méthode d'Altenburger et le caractère fondamental de celle-ci, nous allons essayer d'en déduire la méthode dérivée par le moyen de la correspondance $P \rightarrow R$.

A la méthode prospective du calcul de la réserve mathématique d'une police, nous substituons la méthode rétrospective. Pour l'assurance mixte, la formule s'écrit:

$$C\,{}_tV^{\text{rétr.}}_{x:\overline{n}|} = P\,\frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{C\,M_x - C\,M_{x+t}}{D_{x+t}}.$$

L'âge à l'inventaire $x' = x + t$ ne changeant pas dans la correspondance $P \to R$, la méthode dérivée de celle d'Altenburger groupera de nouveau les polices d'un portefeuille d'assurances d'après l'âge atteint à l'inventaire, ou ce qui revient au même, par groupes d'assurés de même âge. Dans la méthode d'Altenburger, on introduit les valeurs actuelles $A_{x'}$ et $\ddot{a}_{x'}$ de l'assurance vie entière et de la rente viagère. Cela signifie qu'on fait entrer dans la formule des assurances auxiliaires d'âge à l'entrée x' et d'âge-terme $\omega + 1$, ω étant le plus grand âge représenté dans la table de mortalité.

Nous n'avons pas encore défini quel âge doit correspondre à $\omega + 1$ dans la transformation $P \to R$. $\omega + 1$ est l'âge très spécial où tous les vivants de la table ont disparu. On est tenté de lui faire correspondre l'âge 0, puisque dans la vie des hommes on oppose volontiers la naissance à la mort. Mais rien ne nous oblige à le faire ici. Nous pouvons tout aussi bien faire correspondre à l'âge $\omega + 1$ où la table de mortalité prend en quelque sorte fin, un âge α convenablement choisi, qu'on peut considérer comme début de la table. La signification des assurances auxiliaires que l'on va introduire est facilitée par le choix pour α, d'un âge plus petit que tous les âges d'entrée des assurances du portefeuille; mais cela n'est pas une condition nécessaire pour les transformations algébriques des formules.

A l'assurance vie entière de valeur actuelle $A_{x'}$ correspondra alors dans la transformation $P \to R$ une assurance temporaire en cas de décès qui prend effet à l'âge α. A la rente $\ddot{a}_{x'}$ correspondra la rente $\ddot{a}_{\alpha:\overline{x'-\alpha}|}$.

A la formule prospective de la réserve mathématique, que nous aurions pu écrire:

$$C\,{}_tV^{\text{pr.}}_{x:\overline{n}|} = C\,\frac{M_{x'} - M_{\omega+1}}{D_{x'}} - P\,\frac{N_{x'} - N_{\omega+1}}{D_{x'}} +$$

$$+ \frac{1}{D_{x'}}\left[P(N_{x+m} - N_{\omega+1}) + C\,D_{x+n} - C(M_{x+n} - M_{\omega+1})\right],$$

correspond la formule rétrospective:

$$C\,{}_tV^{\text{rétr.}}_{x:\overline{n}|} = P\frac{(N_\alpha - N_{x'})}{D_{x'}} - C\frac{(M_\alpha - M_{x'})}{D_{x'}} - \frac{1}{D_{x'}}\left[P(N_\alpha - N_x) - C(M_\alpha - M_x)\right],$$

c'est-à-dire, à l'aide des symboles s et A^*:

$$C\,{}_tV^{\text{rétr.}}_{x:\overline{n}|} = P\,\ddot{s}_{\alpha:\overline{x'-\alpha}|} - C\,{}_{|x'-\alpha}A^*_\alpha - \frac{K^*}{D_{x'}},$$

$$\text{où}\quad K^* = P(N_\alpha - N_x) - C(M_\alpha - M_x).$$

La réserve mathématique apparaît sous la forme d'une somme algébrique de termes où la rente temporaire $\ddot{s}_{\alpha:\overline{x'-\alpha}|}$, la valeur finale du risque ${}_{|x'-\alpha}A^*_\alpha$ et le quotient $\frac{1}{D_{x'}}$, facteurs qui dépendent tous de l'âge à l'inventaire x', sont multipliés respectivement par des quantités P, C et K^*, toutes indépendantes de x', qui sont des constantes caractéristiques d'une police.

Dès lors, nous avons une nouvelle méthode de groupement pour calculer les réserves mathématiques d'un portefeuille d'assurances, que M. Ural désigne par la lettre U; c'est la méthode U. Comme dans la méthode d'Altenburger, on range dans un même groupe toutes les polices de même âge à l'inventaire. Les réserves mathématiques du groupe se calculent par la formule:

$$\sum_i C_i\,{}_tV_{x_i:\overline{n_i}|} = \ddot{s}_{\alpha:\overline{x'-\alpha}|}\sum_i P_i - {}_{|x'-\alpha}A^*_\alpha\sum_i C_i - \frac{1}{D_{x'}}\sum_i K^*_i.$$

Il est clair que nos considérations peuvent s'étendre sans difficulté aux autres formes d'assurances: vie entière, terme fixe, assurances de capitaux croissants ou décroissants, etc. De sorte que la méthode U est générale au même degré que la méthode d'Altenburger. K^* est la constante de la méthode U; elle correspond dans la transformation $P \to R$ à la constante d'Altenburger.

La méthode U est apparentée à la méthode d'Altenburger par le moyen de la transformation $P \to R$. Tandis que celle-ci est fondée sur la méthode prospective de calcul de la réserve mathématique, celle-là part de la méthode rétrospective. On reconnaît immédiatement une symétrie entre les deux méthodes, qui vient précisément de la symétrie des méthodes prospective et rétrospective de calcul des réserves mathématiques. Les rentes $\ddot{a}_{x'}$ et $\ddot{s}_{\alpha:\overline{x'-\alpha}|}$ se correspondent; il en est de même des éléments $A_{x'}$ et ${}_{|x'-\alpha}A^*_\alpha$ ainsi que des coefficients K et K^*.

Cependant, cette symétrie n'est pas parfaite. D'une part, nous avons des éléments viagers en regard d'éléments temporaires. Cela vient de ce que, dans la méthode d'Altenburger, l'âge $\omega + 1$ est un élément singulier auquel nous avons fait correspondre, si nous pouvons nous exprimer ainsi, un élément régulier : l'âge α. D'autre part, des dissymétries apparaissent du fait de la présence de D_{x+n} et de l'âge $x + m$ dans la constante K.

Le choix des éléments viagers $\ddot{a}_{x'}$ et $A_{x'}$ dans la méthode d'Altenburger, et donc de l'âge $\omega + 1$, répond uniquement à des préoccupations d'ordre pratique, découlant de la présentation usuelle des tables de mortalité et de la définition des nombres de commutation.

Il est cependant aisé de *généraliser* un peu la méthode d'Altenburger afin d'éliminer l'emploi de l'âge singulier $\omega + 1$.

Partons de la nouvelle méthode U et appliquons-lui la transformation $R \to P$, inverse de $P \to R$. Si l'on faisait correspondre à l'âge α de la méthode U, l'âge $\omega + 1$, on retrouverait la méthode usuelle d'Altenburger. Mais rien ne nous empêche de faire correspondre à l'âge α un autre âge de la table de mortalité, ϱ, qu'il est parfois commode de supposer plus grand que tous les âges-termes des assurances du portefeuille considéré. A l'assurance temporaire $\overset{1}{\alpha}:\overline{x'-\alpha|}$ correspondra alors une assurance temporaire $\overset{1}{x'}:\overline{\varrho-x'|}$; aux valeurs finales ${}_{|x'-\alpha}A^{*}_{\alpha}$ et $\ddot{s}_{\alpha:\overline{x':\alpha|}}$, les valeurs actuelles $A^{1}_{x':\overline{\varrho-x'|}}$ et $\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'|}}$. La transformation $R \to P$ fait correspondre à la formule rétrospective de la réserve mathématique la formule prospective :

$$C\,{}_tV^{\text{pr.}}_{x:\overline{n|}} = C\,\frac{M_{x'} - M_\varrho + M_\varrho - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x'}} - P\,\frac{N_{x'} - N_\varrho + N_\varrho - N_{x+m}}{D_{x'}}$$

$$= C\,A^{1}_{x':\overline{\varrho-x'|}} - P\,\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'|}} + \frac{K}{D_{x'}},$$

où $K = P(N_{x+m} - N_\varrho) + C(D_{x+n} - (M_{x+n} - M_\varrho))$.

Les réserves mathématiques du groupe d'assurances d'âge x' à l'inventaire sont alors données par la formule :

$$\sum_i C_i\,{}_{t_i}V_{x_i:\overline{n_i|}} = A^{1}_{x':\overline{\varrho-x'|}} \sum_i C_i - \ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'|}} \sum_i P_i + \frac{1}{D_{x'}} \sum_i K_i,$$

où l'indice i s'étend à toutes les assurances du groupe.

Non seulement nous avons obtenu d'une manière élégante la méthode d'Altenburger généralisée, mais la symétrie avec la méthode U est maintenant meilleure.

Cependant, la méthode d'Altenburger généralisée peut paraître plus compliquée que la méthode originale, en particulier pour les applications pratiques, à cause des éléments temporaires. En réalité il n'en est rien. Il suffit d'établir l'instrument convenant aux calculs, soit une table de commutations et autres valeurs actuarielles adaptée à nos besoins. Arrêtons la table à l'âge $\varrho - 1$ comme on le fait parfois; c'est-à-dire, partant des D_x et C_x habituels, inscrivons dans la table les commutations $N_{x:\overline{\varrho-x}|}$, $S_{x:\overline{\varrho-x}|}$, $M_{x:\overline{\varrho-x}|}$ et $R_{x:\overline{\varrho-x}|}$ par addition des D_x, M_x, etc., dès l'âge $\varrho - 1$, au lieu de le faire dès l'âge ω. En utilisant la table de mortalité de la population masculine suisse SM 1948/53, on obtient, pour $\varrho = 85$, la table 1° ci-après. Nous y inscrivons également les valeurs actuelles de la rente temporaire et de l'assurance temporaire de 1:

$$\ddot{a}_{x:\overline{\varrho-x}|} = \frac{N_{x:\overline{\varrho-x}|}}{D_x}, \quad \text{et} \quad A^1_{x:\overline{\varrho-x}|} = \frac{M_{x:\overline{\varrho-x}|}}{D_x}.$$

Pour simplifier, nous désignerons les quantités ci-dessus par: ${}_|N_x$, ${}_|S_x$, ${}_|M_x$, ${}_|R_x$, ${}_|A_x$ et ${}_|\ddot{a}_x$. Les nombres de commutation ${}_|S$ et ${}_|R$ permettront en outre de calculer rapidement les valeurs actuelles de rentes ou d'assurances croissantes.

De même, la méthode U n'est ni plus ni moins compliquée que la méthode d'Altenburger. Cependant, il s'agit ici aussi d'établir une table de commutations et de valeurs finales pour faciliter les calculs. Nous sommes partis ci-après, (table 2°), de $\alpha = 20$ et de la table SM 1948/53. Les nombres de commutation N, S, M, R tels qu'on les définit en général conviennent essentiellement aux calculs prospectifs. La méthode U étant fondée sur des calculs rétrospectifs, il vaut la peine d'en introduire de nouveaux définis de la manière suivante:

$${}_|N^*_x = \sum_{\tau=\alpha}^{x-1} D_\tau, \quad \text{avec} \quad N_\alpha = 0,$$

$${}_|S^*_x = \sum_{\tau=\alpha}^{x-1} N_\tau, \quad \text{avec} \quad S_\alpha = 0,$$

$${}_|M^*_x = \sum_{\tau=\alpha}^{x-1} C_\tau, \quad \text{avec} \quad M_\alpha = 0,$$

$${}_|R^*_x = \sum_{\tau=\alpha}^{x-1} M_\tau, \quad \text{avec} \quad R_\alpha = 0.$$

Les valeurs finales s'en déduisent facilement. On a:

$$\ddot{s}_{\alpha:x'-\alpha|} = \frac{{}_{|}N^*_{x'}}{D_{x'}}, \quad \text{et} \quad {}_{|x'-\alpha}A^*_{\alpha} = \frac{{}_{|}M^*_{x'}}{D_{x'}}.$$

Les nombres de commutation ${}_{|}S^*_x$ et ${}_{|}R^*_x$ servent à calculer les valeurs finales de rentes et d'assurances décroissantes.

De cette manière, la symétrie entre la méthode d'Altenburger et la méthode U est bien apparente. Toutes deux sont du reste des méthodes exactes. Elles se valent théoriquement et pour les applications.

Cependant, nous l'avons vu, la présence de D_{x+n} dans la constante d'Altenburger est encore une cause de dissymétrie qui tient à la nature spéciale du capital différé; nous ne pouvons pas l'éliminer. Du point de vue auquel nous nous plaçons, une assurance temporaire en cas de décès $A^1_{x:\overline{n}|}$ peut être considérée comme symétrique par rapport au moment t de l'inventaire en ce sens que les décès de la période future $x' \to s$ sont assurés au même titre que les décès de la période passée $x' \to x$. Il n'en est pas de même d'un capital différé; la prestation assurée n'apparaît que dans la période future; on ne peut rien lui faire correspondre dans le passé. C'est une assurance asymétrique. De même, l'assurance mixte, l'assurance à terme fixe, les assurances à prestations croissantes, celles à primes décroissantes, etc. sont asymétriques. Tant qu'on n'envisage pas de cas numériques, on pourrait établir la symétrie en complétant ou en modifiant convenablement l'assurance. Le capital différé ou l'assurance mixte, par exemple, seraient théoriquement complétés par une prestation C^* payable au début de l'assurance, ce qui conduirait à une symétrie parfaite, et C^* serait égal à zéro pour le capital différé ordinaire ou l'assurance mixte.

Quoique ces remarques soient intéressantes du point de vue théorique, nous n'en poursuivrons pas l'étude ici. Elles ont pourtant l'avantage de faire comprendre pourquoi la symétrie entre les formules prospectives et rétrospectives n'est souvent pas complète. Cela vient de ce que l'assurance doit être adaptée aux besoins de la vie humaine. Celle-ci se déroule dans un seul sens. Les besoins qu'elle engendre ne sont pas symétriques par rapport à un moment t. Il est naturel d'assurer un capital différé C; en revanche, l'assurance d'une prestation C^* payable au début de l'assurance ne convient que dans des cas spéciaux. Les calculs prospectifs ont certains avantages sur les formules rétrospectives.

SM 1948/53 $2^1/_2$ %, $\alpha = 20$, $\varrho = 85$

1° Table de commutations et de valeurs actuelles

x	D_x	$_{\vert}N_x$	$_{\vert}S_x:1000$	$_{\vert}\ddot{a}_x$	C_x	$_{\vert}M_x$	$_{\vert}R_x:1000$	$_{\vert}A_x$
20	57 531	1 631 131	34 321,4	28,352	92	16 444	709,34	0,2858
21	56 037	1 573 600	32 690,2	28,081	94	16 352	692,90	2918
22	54 576	1 517 563	31 116,6	27,806	95	16 258	676,54	2979
23	53 151	1 462 987	29 599,1	27,525	96	16 163	660,29	3041
24	51 758	1 409 836	28 136,1	27,239	95	16 067	644,12	3104
25	50 401	1 358 078	26 726,3	26,945	94	15 972	628,06	0,3169
26	49 077	1 307 677	25 368,2	26,645	93	15 878	612,08	3235
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
78	4 397,7	20 347	68,4	4,627	453	2 599	9,56	5910
79	3 837,2	15 949	48,1	4,156	432	2 146	6,96	5593
80	3 311,4	12 112	32,1	3,658	406	1 714	4,82	0,5176
81	2 824,6	8 801	20,0	3,116	376	1 308	3,10	4630
82	2 380,1	5 976	11,2	2,511	344	932	1,80	3916
83	1 977,7	3 596	5,2	1,818	311	588	0,86	2972
84	1 618,2	1 618	1,6	1	277	277	0,28	1709

2° Table de commutations et de valeurs finales

x	D_x	$_{\vert}N^*_x$	$_{\vert}S^*_x : 1000$	$\ddot{s}_{\alpha:\overline{x-\alpha}\vert}$	C_x	$_{\vert}M^*_x$	$_{\vert}R^*_x : 1000$	$_{\vert}A^*_x$
20	57 531	0	0	0	92	0	0	0
21	56 037	57 531	57,5	1,027	94	92	0,092	0,0016
22	54 576	113 568	171,1	2,081	95	186	278	34
23	53 151	168 144	339,2	3,164	96	281	559	53
24	51 758	221 295	560,5	4,276	95	377	936	73
25	50 401	273 053	833,6	5,418	94	472	1,408	0,0094
26	49 077	323 454	1 157,0	6,591	93	566	1,974	0,0115
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
78	4 397,7	1 610 784	61 973	366,28	453	13 845	267,81	3,148
79	3 837,2	1 615 182	63 579	420,93	432	14 298	282,11	3,726
80	3 311,4	1 619 019	65 198	488,9	406	14 730	296,84	4,448
81	2 824,6	1 622 330	66 820	574,4	376	15 136	311,98	5,359
82	2 380,1	1 625 155	68 445	682,8	344	15 512	327,49	6,517
83	1 977,7	1 627 535	70 073	822,9	311	15 856	343,34	8,017
84	1 618,2	1 629 513	71 702	1007,0	277	16 167	359,51	9,991

Cependant, comme M. Ch. Jéquier l'a si bien montré dans l'ouvrage cité plus haut, les méthodes rétrospectives sont parfois fort intéressantes. La méthode U pour le calcul par groupes des réserves mathématiques et celle d'Altenburger sont équivalentes du point de vue théorique et pour les calculs dès qu'on utilise des tables de commutation, de valeurs actuelles et de valeurs finales telles que celles de la page 140.

A première vue, il peut sembler que les nombres de commutation D_x font partie intégrante des déductions prospectives et qu'on ne les utilise dans les calculs rétrospectifs que par un retour à la forme prospective. D_x est en effet un nombre escompté de vivants. Cependant, s'il est commode d'escompter jusqu'à l'âge 0, on pourrait tout aussi bien établir les nombres de commutation en introduisant les valeurs actuelles des vivants à un autre moment, antérieur ou postérieur à l'âge x, par exemple à l'âge 85, en posant: $D_x^{(85)} = v^{x-85}\, l_x$. L'exposant $x-85$ peut être positif ou négatif; cela n'a aucune importance. On peut parler d'escompte si l'exposant est positif et de valeur finale s'il est négatif. D_x est une simple expression algébrique, indépendante de l'emploi des méthodes prospective et rétrospective.

La méthode de Whiting, avons-nous vu plus haut, n'est qu'une variante de la méthode d'Altenburger, celle dans laquelle la constante est exprimée en fonction de l'âge d'entrée.

Partant de la constante d'Altenburger pour l'assurance mixte:

$$K = P N_{x+m} + C D_{x+n} - C M_{x+n},$$

et de la formule de la prime:

$$P = \frac{C M_x - C M_{x+n} + C D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}},$$

on peut éliminer les âges $x+m$ et $x+n$ et introduire dans la constante l'âge d'entrée x. On a:

$$P N_{x+m} + C D_{x+n} - C M_{x+n} = P N_x - C M_x,$$

$$\text{d'où} \quad K = P N_x - C M_x,$$

qu'on écrit souvent:

$$K = N_x (P - P_x),$$

où P_x désigne la prime de l'assurance vie entière de capital C, et P la prime de l'assurance mixte.

Considérons d'autre part la méthode U. Pour l'assurance mixte, la constante K^* est:

$$K^* = P(N_\alpha - N_x) - C(M_\alpha - M_x).$$

Elle est exprimée en fonction de l'âge d'entrée x qui, dans la transformation $P \to R$, correspond à l'âge-terme s de la méthode d'Altenburger.

La formule de la prime permet d'éliminer l'âge x et de le remplacer par l'âge-terme $x+n$ et par $x+m$. On trouve:

$$K^* = P(N_\alpha - N_{x+m}) - C(M_x - M_{x+n} + D_{x+n}),$$

qu'on peut écrire:

$$K^* = (N_\alpha - N_{x+m})\,[P - P(A_{\alpha:\overline{x+n-\alpha}|})],$$

où $P(A_{\alpha:\overline{x+n-\alpha}|})$ désigne la prime d'une assurance mixte conclue à l'âge α, d'âge-terme $s = x+n$, dont la prime est payable jusqu'à l'âge $x+m$.

La méthode de Lidstone ou méthode Z, bien connue elle aussi, va nous permettre une nouvelle application de la transformation $P \to R$. Fondée sur le calcul prospectif de la réserve mathématique, elle groupe les polices d'après la durée d'assurance restant à courir depuis l'inventaire jusqu'à l'échéance, $n' = s - t$, c'est-à-dire par années d'échéance. En revanche, les âges atteints à l'inventaire et les âges à l'échéance des assurés de chaque groupe sont des plus divers.

Toutes les polices d'un même groupe, de durée restant à courir n', sont remplacées pour le calcul des réserves mathématiques par des polices de même capital assuré, de durée restant à courir n' et de même âge ξ' à l'inventaire et $\xi' + n'$ à l'échéance, ξ' étant une moyenne entre les âges à l'inventaire des polices en question. Comme on le sait, dans la méthode de Lidstone on considère pour les assurances mixtes deux âges moyens:

$$\xi' = \frac{\sum_i C_i c^{x'_i}}{\sum_i C_i},$$

ou

$$\zeta' = \frac{\sum_i P_i c^{x'_i}}{\sum_i P_i},$$

où c est la constante de Makeham si la table de mortalité est ajustée d'après la loi imaginée par cet actuaire. Ces deux âges diffèrent en général légèrement. Nous ne nous étendrons pas ici sur celui qu'il convient d'adopter pour les calculs.

Rappelons encore qu'il est commode, pour exposer la méthode, de supposer d'abord que la table de mortalité est ajustée d'après la loi de Makeham. Il est alors possible de développer la valeur actuelle de toute rente $\ddot{a}_{x_i':\overline{n'}|}$ en une série convergente de la forme:

$$\ddot{a}_{x_i':\overline{n'}|} = \lambda_0(n') + \lambda_1(n')\, c^{x_i'} + \lambda_2(n')\, c^{2x_i'} + \ldots,$$

où les coefficients λ_0, λ_1, λ_2, ... sont fonction de la durée n' restant à courir, mais indépendants de l'âge x_i', c étant la constante de Makeham. En ne conservant que les deux premiers termes de la série, on arrive pour la rente $\ddot{a}_{x_i':\overline{n'}|}$ au développement lidstonien:

$$\ddot{a}_{x_i':\overline{n'}|} = \lambda_0(n') + \lambda_1(n')\, c^{x_i'},$$

ce qui conduit aisément pour le groupe considéré à l'un ou l'autre des âges moyens de Lidstone. La méthode est du reste applicable indépendamment du fait que la table de mortalité est ajustée d'après la loi de Makeham ou non. Il suffit que la valeur actuelle de la rente puisse être mise sous la forme d'un développement lidstonien.

Bien que la méthode ne soit pas mathématiquement exacte, puisque nous avons négligé ci-dessus tous les termes de la série à partir du troisième, on sait que pour les portefeuilles qu'on rencontre d'habitude l'approximation obtenue est en général très bonne; la méthode peut être appliquée sans crainte dans la pratique. Cependant, l'approximation dépend de la composition du portefeuille. La seule comparaison des réserves mathématiques de portefeuilles donnés, calculées d'après la méthode de Lidstone, aux réserves exactes fait courir le risque de ne considérer que des portefeuilles bien équilibrés. Les exemples qu'on cite sont parfois repris d'un auteur à l'autre. Si l'on considère des portefeuilles spécialement choisis, on s'aperçoit que l'approximation n'est pas aussi universellement bonne qu'on l'a souvent admis. L'étude théorique de la convergence des séries introduites par Lidstone n'est pas très aisée. Citons cependant un mémoire fort intéressant de J. Podtiaguine: «Quelques remarques sur la méthode de Lidstone dans l'assurance sur la vie» (Aktuarshé Védy, Vol. VII, 1937/38).

Dans la transformation $P \to R$, le moment t se correspond à lui-même. A la période future $x+t \to x+n$, de durée n', correspond la période passée $x+t \to x$, de durée écoulée t. A l'échéance $s = x+n$ d'une police correspond l'entrée dans l'assurance à l'âge x. Au groupe des polices d'un portefeuille ayant la même durée future n', et donc la même échéance, nous faisons correspondre le groupe des polices de même durée écoulée t au moment de l'inventaire, soit celles qui ont la même époque de souscription; leurs âges à l'entrée et à l'inventaire cependant sont différents.

Au calcul prospectif de la réserve mathématique dans la méthode de Lidstone correspond dans la méthode dérivée le calcul rétrospectif:

$$C\,{}_tV_x^{\text{rétr.}} = P\,\ddot{s}_{x:\overline{t}|} - C\,{}_{|t}A_x^*.$$

Pour le groupe des polices de durée écoulée t, les réserves mathématiques s'écrivent:

$$\sum_i C_i\,{}_tV_{x_i}^{\text{rétr.}} = \sum_i P_i\,\ddot{s}_{x_i:\overline{t}|} - \sum_i C_i\,{}_{|t}A_{x_i}^*.$$

La méthode dérivée de celle de Lidstone n'est pas autre chose que *la méthode t* qui a été étudiée en particulier ces années passées dans le Bulletin de l'Association des Actuaires suisses par plusieurs actuaires de notre pays. Nous l'examinons ici, comme M. Ural dans la thèse précitée, à un point de vue différent, soit précisément comme méthode dérivée de celle de Lidstone.

Tout comme pour la méthode de Lidstone, il est commode de supposer d'abord que la table de mortalité est ajustée d'après la loi de Makeham.

La valeur finale de la rente $\ddot{s}_{x_i:\overline{t}|}$ peut alors s'écrire sous la forme d'une série convergente dont nous ne retenons que les deux premiers termes:

$$\ddot{s}_{x_i:\overline{t}|} = \lambda_0^*(t) + \lambda_1^*(t)\,c^{x_i'},$$

où les coefficients λ_0^* et λ_1^* sont fonction de la durée écoulée t, mais indépendants de l'âge x_i'.

La première somme du deuxième membre de la formule des réserves mathématiques peut alors s'exprimer en fonction d'un âge moyen à l'inventaire, ζ'^*, choisi de manière que:

$$\begin{aligned}\sum_i P_i\,\ddot{s}_{x_i:\overline{t}|} &= \lambda_0^*(t)\sum_i P_i + \lambda_1^*(t)\sum_i P_i\,c^{x_i'} \\ &= \lambda_0^*(t)\sum_i P_i + \lambda_1^*(t)\,c^{\zeta'^*}\sum_i P_i.\end{aligned}$$

Il suffit que ζ'^* soit déterminé d'après l'équation:

$$c^{\zeta'^*} = \frac{\sum_i P_i c^{x'_i}}{\sum_i P_i},$$

où, ce qui revient au même, en fonction des âges à l'entrée:

$$c^{\zeta'^*-t} = \frac{\sum_i P_i c^{x'_i-t}}{\sum_i P_i} = \frac{\sum_i P_i c^{x_i}}{\sum_i P_i}.$$

ζ'^*-t est l'âge moyen des polices du groupe à la conclusion. Si l'on affecte chaque police d'un coefficient:

$$\bar{Z}_i^* = P_i c^{x_i},$$

on voit que, parallèlement à la méthode de Lidstone, l'âge moyen se calcule à l'aide des coefficients $\bar{Z}^*$:

$$c^{\zeta'^*-t} = \frac{\sum_i \bar{Z}_i^*}{\sum_i P_i}.$$

De même, la valeur finale du risque, ${}_{|t}A_{x_i}^*$, peut s'exprimer sous la forme d'un développement lidstonien:

$${}_{|t}A_x^* = \mu_0^*(t) + \mu_1^*(t)\, c^{x'_i},$$

les coefficients μ_0^* et μ_1^* étant fonction de t, mais indépendants de l'âge x'_i.

Dès lors, on peut exprimer la seconde somme du deuxième membre de la formule des réserves mathématiques en fonction d'un âge moyen à l'inventaire, ξ'^*, choisi de manière que:

$$\begin{aligned}\sum_i C_i\, {}_{|t}A_{x_i}^* &= \mu_0^*(t) \sum_i C_i + \mu_1^*(t) \sum_i C_i\, c^{x'_i} \\ &= \mu_0^*(t) \sum_i C_i + \mu_1^*(t)\, c^{\xi'^*} \sum_i C_i,\end{aligned}$$

où ξ'^* doit satisfaire à l'équation:

$$c^{\xi'^*} \sum_i C_i = \sum_i C_i\, c^{x'_i},$$

ou bien, en fonction des âges à l'entrée:

$$c^{\xi'^*-t} = \frac{\sum_i C_i c^{x'_i-t}}{\sum_i C_i} = \frac{\sum_i C_i c^{x_i}}{\sum_i C_i}.$$

$\xi'^* - t$ est l'âge d'entrée moyen des polices du groupe, ce qui conduit à introduire pour chaque police une constante

$$Z_i^* = C_i c^{x_i}, \text{ en fonction du capital.}$$

Comme dans la méthode de Lidstone, les âges moyens ξ'^* et ζ'^* ne sont pas exactement les mêmes. Nous ne discuterons pas ici s'il est préférable d'adopter le premier de ces âges, le second ou peut-être une moyenne des deux, ni le degré d'approximation auquel conduit la méthode. Ces questions sont parallèles à celles qui se posent dans la méthode de Lidstone.

La transformation $P \to R$ a l'avantage de conduire tout naturellement à la méthode t. Du degré d'approximation de la méthode de Lidstone on doit pouvoir tirer des indications sur celui de la méthode t. L'étude précitée de Podtiaguine, transposée à la méthode t, serait très précieuse.

Réciproquement, en appliquant à la méthode t la transformation inverse $R \to P$, on obtiendrait la méthode de Lidstone. Partant des propriétés connues de la méthode t, on pourrait peut-être en trouver de nouvelles concernant celle de Lidstone.

Il est parfois admissible de remplacer la méthode de Lidstone par un procédé moins précis mais plus simple. Le groupement par durées restant à courir c'est-à-dire par années d'échéance subsiste. En revanche, on évite les nombres auxiliaires Z et l'on calcule l'âge moyen ξ' comme moyenne pondérée des âges x_i' par la formule:

$$\xi' = \frac{\sum_i C_i x_i'}{\sum_i C_i}.$$

Il paraît cependant indispensable pour obtenir une approximation suffisante de partager chaque groupe en trois tranches: l'une comprenant par exemple les polices avec échéance avant l'âge de 30 ans; la deuxième, celles dont l'échéance est comprise entre 30 et 55 ans; la troisième, les assurances à échéance plus tardive. L'approximation obtenue est moins bonne qu'avec la méthode de Lidstone et les réserves ainsi calculées sont dans la règle un peu trop faibles de sorte qu'il y a lieu de les augmenter d'environ 2 % de leur montant.

L'application à cette *méthode de Lidstone simplifiée* de la transformation $P \to R$ conduit à une *méthode t simplifiée*. Le groupement par durées écoulées, c'est-à-dire par années de conclusion, subsiste. On évite en revanche les nombres auxiliaires Z^* et l'on calcule l'âge moyen ξ'^* comme moyenne pondérée des âges x' par la formule:

$$\xi'^* = \frac{\sum_i C_i x'_i}{\sum_i C_i}.$$

Le degré d'approximation et la division de chaque groupe en tranches pose des questions analogues à celles de la méthode de Lidstone simplifiée.

Par rapport à la transformation $P \to R$ et à son inverse $R \to P$, *la méthode de Fouret* ou méthode de récurrence, occupe une place à part. Fondée sur la formule de récurrence des réserves mathématiques qui s'écrit par exemple pour les assurances mixtes et les temporaires en cas de décès:

$$(C\,{}_{t-1}V_x + P)\,(1+i) = C\,q_{x+t-1} + C\,p_{x+t-1}\,{}_tV_x,$$

elle groupe les polices d'un portefeuille d'après l'âge à l'inventaire. Les réserves mathématiques du groupe de polices d'âge x' à l'inventaire sont:

$$\sum_i C_i\,{}_{t_i}V_{x_i} = \frac{(\sum_i C_i\,{}_{t_i-1}V_{x_i} + \sum_i P_i)\,(1+i) - q_{x'-1}\sum_i C_i}{p_{x'-1}}.$$

La formule de récurrence ne s'applique qu'aux assurances qui font partie du portefeuille pendant toute l'année. Les entrées et sorties de l'exercice ne peuvent pas être englobées dans le groupe; elles sont traitées individuellement.

La méthode de Fouret est fondée sur le calcul rétrospectif. Si l'on applique la transformation $R \to P$ à la formule de récurrence des réserves mathématiques, on constate que cette formule se correspond à elle-même, ce qui ne surprend pas. La transformation conduit en effet à une relation entre les réserves mathématiques au début et à la fin de la $(t+1)^e$ année et les prestations et contre-prestations durant cette année-là; on retombe nécessairement sur la formule de récurrence appliquée à la nouvelle année. On le vérifie aussi directement en établissant la formule qui, dans la transformation $R \to P$, correspond à la

formule de récurrence; aux valeurs finales des réserves mathématiques et des prestations et contre-prestations de l'année $t \to t-1$, calculées au moment t, correspondent les valeurs actuelles à ce même moment des réserves mathématiques et des prestations et contre-prestations de l'année $t \to t+1$. On trouve:

$$v\, p_{x+t}\, C\, {}_{t+1}V_x + v\, C\, q_{x+t} = C\, {}_tV_x + P,$$

soit la formule primitive, dans laquelle t a été remplacé par $t+1$.

Exprimant ${}_tV_x$ en fonction de ${}_{t+1}V_x$ pour toutes les assurances du portefeuille considéré en vigueur pendant la $(t+1)^e$ année entière, dont les assurés sont d'âge x' à l'inventaire, on obtient la formule:

$$\sum_i C_i\, {}_{t_i}V_{x_i} = v\,[\sum_i C_i - p_{x'} \sum_i C_i(1 - {}_{t_i+1}V_{x_i})] - \sum_i P_i\,.$$

Elle n'est cependant d'aucune utilité dans la pratique puisque, au moment t, on ne connaît ni les réserves ${}_{t_i+1}V_{x_i}$, ni le déroulement du portefeuille au cours de la prochaine année.

Les quelques exemples qui précèdent montrent quel usage on peut faire de la correspondance $P \to R$ ou de son inverse $R \to P$. Elle établit un lien de symétrie entre une méthode de calcul par groupes des réserves mathématiques d'un portefeuille d'assurances et la méthode dérivée qui a été définie. En cherchant la méthode dérivée d'une méthode de groupement donnée, il est possible qu'on en découvre une nouvelle ou qu'on retombe sur une méthode déjà connue qu'on peut considérer alors sous un angle nouveau. La correspondance $P \to R$, ou son inverse $R \to P$, est un guide précieux pour l'étude des méthodes de groupement; les propriétés de la méthode primitive éveillent l'idée de propriétés symétriques de la méthode dérivée et dirigent les recherches. Le moment t de l'inventaire est utilisé comme un pivot. Le procédé, appliqué systématiquement, promet d'être assez fécond.

Zusammenfassung

Der bekannte Satz, wonach das prospektive und das retrospektive Deckungskapital übereinstimmen, wenn sie nach denselben technischen Grundlagen berechnet werden, gestattet die Herleitung einer Beziehung $P \rightarrow R$ zwischen den in der prospektiven und der retrospektiven Methode vorkommenden Grössen. Mit Hilfe der Transformation $P \rightarrow R$ bzw. ihrer Inversen $R \rightarrow P$ kann zu jeder vorgegebenen Gruppenmethode eine abgeleitete Methode angegeben werden. Den Eigenschaften der ursprünglichen Gruppenmethode entsprechen symmetrische Eigenschaften der transformierten Methode. Die Untersuchung befasst sich mit der Gruppenmethode U, die sich aus der Methode von Altenburger ergibt, der t-Methode, die als Transformierte der Methode von Lidstone erscheint und der Methode von Fouret, die im wesentlichen unverändert bleibt.

Riassunto

Il teorema conosciuto, secondo il quale le riserve matematiche prospettive e retrospettive sono eguali se esse sono calcolate secondo le stesse basi tecniche, permette di definire una relazione $P \rightarrow R$ tra gli elementi del periodo d'assicurazione che si estende al di là dell'inventario e quelli del periodo che precede. Applicata ai metodi di calcolo per gruppi delle riserve matematiche di un portafoglio d'assicurazioni, la trasformazione $P \rightarrow R$, od il suo inverso $R \rightarrow P$, fa così corrispondere ad ogni metodo dato di aggruppamento un metodo derivato, definito colla trasformazione della prima. Alle proprietà del metodo primitivo corrispondono proprietà simmetriche del metodo derivato. Lo studio si estende al metodo di aggruppamento U, derivato da quello dell'Altenburger, al metodo t, derivato da quello del Lidstone, nonchè al metodo del Fouret che corrisponde a se stesso.

Summary

The well-known theorem, according to which both the prospective and retrospective mathematical reserves are equal if they are calculated on the same technical bases, permits to define a correspondence $P \rightarrow R$ between the elements of the insurance term extending beyond the valuation and those of the preceding term. From any given grouping method can be derived a corresponding method by means of the transformation $P \rightarrow R$, or the inverse $R \rightarrow P$. To the properties of the original method correspond symmetrical properties of the derived method. The study relates to the grouping method U, derived from that of Altenburger, to the method t, derived from that of Lidstone, and to that of Fouret which remains practically unchanged by the transformation.