Einsatz elektronischer Rechenautomaten für die Ausgleichung mit orthogonalen Polynomen

Autor(en): **Hüsser, R. / Wegmüller, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **60 (1960)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966782

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Einsatz elektronischer Rechenautomaten für die Ausgleichung mit orthogonalen Polynomen

Von R. Hüsser und W. Wegmüller, Bern

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, wie im ein- und zweidimensionalen Fall die theoretischen Ansätze für die Ausgleichung mit orthogonalen Polynomen zweckmässig umzuformen sind, um bei Vorgabe äquidistant liegender Beobachtungswerte sich mit Vorteil elektronischer Rechenautomaten bedienen zu können.

Die massgebenden Programmierungsschritte für die rekursive Durchführung aller Berechnungen werden anhand allgemein gültiger Ablaufdiagramme eingehend erläutert. Für die konkrete Verwirklichung der dargelegten Ergebnisse wurde das dem Institut für angewandte Mathematik der Universität Bern zur Verfügung stehende Elektronenrechengerät Gamma 3B-AET eingesetzt.

1 Problemstellung

Die zentrale Frage bei Ausgleichsproblemen lautet: Wie können empirische Daten durch theoretische Werte, die irgendeine Gesetzmässigkeit befolgen, am besten approximiert werden? In dieser allgemeinen Formulierung sind noch zwei Belange völlig offen: Welcher Art ist die geforderte Gesetzmässigkeit, und was besagt «am besten approximiert»?

Unter den vielen, mehr oder weniger objektiven Vorschriften, denen die Näherungswerte genügen sollen und unter den verschiedenen Definitionsmöglichkeiten der «besten Approximation» wählen wir folgende Fassung:

Die gegebenen Beobachtungswerte sind durch ein Polynom l-ten Grades – welches seinerseits als Linearkombination orthogonaler Polynome vom Grade $\lambda = 0, 1, \ldots, l$ darzustellen ist – so zu approximieren, dass die Bedingung

$$\sum (\text{Beobachtungswerte} - \text{Näherungswerte})^2 = \text{Minimum}$$

erfüllt ist.

Die theoretischen Grundlagen sowie zahlreiche Vereinfachungsmöglichkeiten (Tabellen, Rechenschemas usw.) für die praktische Durchführung einer solchen Ausgleichung sind in [3] [1]) zusammengestellt. Trotzdem erfordert jede numerische Auswertung mit vielen Beobachtungen, speziell bei zwei- oder mehr unabhängigen Veränderlichen, einen erheblichen Rechen- und Zeitaufwand.

Es lohnt sich deshalb zu prüfen, ob der Einsatz elektronischer Rechengeräte für die Ausgleichung mit orthogonalen Polynomen Erleichterungen und Vorteile bieten kann, wie gegebenenfalls die Ansätze für eine rationelle Auswertung umzuformen sind und welches die massgebenden Programmierungsschritte einer solchen Ausgleichung sein werden. Erfahrungsgemäss ist mit Rechenautomaten eine Beschleunigung des Rechenprozesses dann zu gewärtigen, wenn es gelingt, die ganze Ausgleichstechnik möglichst auf Rekursionsbeziehungen und anderweitige Iterationen aufzubauen.

Damit ist bereits der Weg unserer Untersuchungen vorgezeichnet. Immerhin drängt sich noch eine Vereinfachung auf: Wir fordern die Vorgabe äquidistant liegender Beobachtungswerte [2]). Dies hat den Vorteil, dass die orthogonalen Polynome zum vornherein formelmässig explizit gegeben sind, dass die vielen speziell für numerische Auswertungen vorteilhaften Eigenschaften und Hilfsbeziehungen der orthogonalen Polynome voll ausgenützt werden können und dass schliesslich – wie unser Vorschlag zur Programmierung bekundet – nur die Beobachtungswerte, nicht aber die Argumente selbst gespeichert werden müssen.

Methodisch erläutern wir zuerst das Vorgehen im zweidimensionalen Fall. Die Probleme bei nur einer Variablen ergeben sich dann durch Spezialisierung. Bezüglich der Bezeichnungsweise halten wir uns weitgehend an die in [3] verwendete Symbolik.

---

[1]) Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf die Literaturangaben (Seite 168).

[2]) In einer von *A.S.Householder* [2] auf Seite 221 aufgestellten Rekursionsbeziehung glauben wir die Möglichkeit erkannt zu haben, die Ausgleichung mit orthogonalen Polynomen auch im Falle nicht äquidistanter Argumente programmieren zu können.

2 Zweidimensionale Ausgleichung

21 Methode

Es seien $M = \sum_{i=1}^{m} n_i$ mit gewissen Ungenauigkeiten behaftete Beobachtungs- oder Messwerte $w(x_i, y_j)$ zu den Argumenten (x_i, y_j) gegeben $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n_i)$.

Gesucht wird ein Polynom $z_{l,k}(x,y)$, welches die Beobachtungswerte $w(x,y)$ möglichst gut approximiert, d.h.

$$\sum_x \sum_y [z_{l,k}(x,y) - w(x,y)]^2 = \text{Minimum}. \tag{1}$$

Das Polynom $z_{l,k}(x,y)$ wird k-tes Ausgleichspolynom l-ten Grades in x und y genannt $(k = 0, 1, \ldots, l)$ und soll als Linearkombination der orthogonalen Polynome $P_{\lambda,\mu}(x,y)$ eines vollständigen Systems dargestellt werden

$$z_{l,k}(x,y) = \sum_{\lambda=0}^{l-1} \sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{\lambda,\mu} P_{\lambda,\mu}(x,y) + \sum_{\mu=0}^{k} a_{l,\mu} P_{l,\mu}(x,y). \tag{2}$$

Die Bestimmung der Koeffizienten $a_{\lambda,\mu}$ bzw. $a_{l,\mu}$ erfolgt durch Nullsetzen der entsprechenden partiellen Ableitungen von (2) und führt unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum_x \sum_y P_{\lambda,\mu}(x,y)\, P_{\nu,\varrho}(x,y) \begin{cases} = 0, & \text{für } \lambda \neq \nu \text{ oder } \mu \neq \varrho, \\ \neq 0, & \text{für } \lambda = \nu \text{ und } \mu = \varrho, \end{cases} \tag{3}$$

auf die Beziehung

$$a_{\lambda,\mu} = \frac{\sum_x \sum_y w(x,y)\, P_{\lambda,\mu}(x,y)}{\sum_x \sum_y [P_{\lambda,\mu}(x,y)]^2}. \tag{4}$$

Daraus geht deutlich hervor, dass die Koeffizienten $a_{\lambda,\mu}$ vom Grad l und vom Index k des Ausgleichspolynoms $z_{l,k}(x,y)$ unabhängig sind. Ferner ist zu ihrer Berechnung nur je eine Gleichung (4) aufzulösen und nicht etwa ein ganzes lineares, inhomogenes Gleichungssystem wie im allgemeinen Fall, wo die $P_{\lambda,\mu}(x,y)$ wohl ein vollständiges, nicht aber ein orthogonales Polynomsystem bilden. Gerade diese bemerkenswerte Eigenschaft zeichnet die orthogonalen Polynome für die Ausgleichsrechnung aus. Mit jeder Erweiterung des Grades l oder Indexes k treten in (2) zusätzliche Glieder und damit auch neue $a_{\lambda,\mu}$ auf, ohne aber die vorangehenden nach (4) bereits berechneten Koeffizienten wertmässig zu beeinflussen.

Für die weitere Bearbeitung treffen wir eine vereinfachende, in ihrer Auswirkung aber entscheidende Annahme. Die Punkte (x_i, y_j) sollen in der xy-Ebene ein vollständiges, regelmässiges Punktgitter bilden, dessen äusserste Punkte alle auf den Begrenzungslinien eines achsenparallelen Rechteckes liegen mit dem Zentrum (0,0). x_i variiert dann zwischen $-\frac{m-1}{2}$ (1) $\frac{m-1}{2}$ und y_j zwischen $-\frac{n-1}{2}$ (1) $\frac{n-1}{2}$, d.h. es gibt insgesamt $M = mn$ Beobachtungswerte [1]).

Unter diesen Voraussetzungen entarten nämlich – wie in [3] gezeigt wurde – die zweidimensionalen orthogonalen Polynome $P_{\lambda,\mu}(x,y)$ in das Produkt zweier eindimensionaler orthogonaler Polynome $P_{\lambda-\mu}(x)$ und $P_\mu(y)$; d.h.

$$P_{\lambda,\mu}(x,y) = P_{\lambda-\mu}(x)\, P_\mu(y). \tag{5}$$

Dank (5) führen die getroffenen Annahmen auf interessante Vereinfachungen. Sie gestatten insbesondere die erfolgreiche Anwendung der meisten, nur für orthogonale Polynome einer Veränderlichen gültigen Gesetzmässigkeiten auf unser zweidimensionales Problem.

Zunächst können vermöge der Rekursionsansätze

$$P_{\lambda+1}(x) = x\, P_\lambda(x) - \frac{\lambda^2(m^2-\lambda^2)}{4(4\lambda^2-1)}\, P_{\lambda-1}(x)$$

und

$$P_{\mu+1}(y) = y\, P_\mu(y) - \frac{\mu^2(n^2-\mu^2)}{4(4\mu^2-1)}\, P_{\mu-1}(y), \tag{6}$$

$$\text{mit} \quad P_0(x) \equiv P_0(y) \equiv 1; \quad P_1(x) = x, \quad P_1(y) = y, \tag{6'}$$

auch die orthogonalen Polynome zweier Veränderlichen $P_{\lambda,\mu}(x,y)$ mit Hilfe von (5) rekursiv bestimmt werden. Dies ist eine für die numerische Auswertung stark ins Gewicht fallende Beziehung.

---

[1]) Wären an Stelle der oben normierten Argumente die Grössen

$$(\xi_i, \eta_j) = (a + ih, b + jh^*)$$

gegeben, dann könnte durch die Transformationen

$$x_i = \frac{\xi_i - a}{h} - \frac{m-1}{2} \quad \text{und} \quad y_j = \frac{\eta_j - b}{h^*} - \frac{n-1}{2}$$

stets erreicht werden, dass gilt

$$(x_i, y_j) = \left(-\frac{m+1}{2} + i, -\frac{n+1}{2} + j\right), \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Sodann lassen sich für das Aufsuchen der Entwicklungskoeffizienten $a_{\lambda,\mu}$ weitere, für das Rechnen bedeutungsvolle Vereinfachungen folgern. Wenn wir (5) in (4) einführen, ergibt sich

$$a_{\lambda,\mu} = \frac{\sum\limits_x \sum\limits_y w(x,y)\, P_{\lambda-\mu}(x)\, P_\mu(y)}{\{\sum\limits_x [P_{\lambda-\mu}(x)]^2\}\{\sum\limits_y [P_\mu(y)]^2\}}. \tag{7}$$

Die beiden im Nenner von (7) auftretenden Summen

$$\sum_x [P_{\lambda-\mu}(x)]^2 \quad \text{und} \quad \sum_y [P_\mu(y)]^2$$

lassen sich ebenfalls rekursiv herleiten

$$\begin{aligned} \sum_x [P_\lambda(x)]^2 &= \frac{\lambda^2(m^2-\lambda^2)}{4(4\lambda^2-1)} \sum_x [P_{\lambda-1}(x)]^2, \\ \sum_y [P_\mu(y)]^2 &= \frac{\mu^2(n^2-\mu^2)}{4(4\mu^2-1)} \sum_y [P_{\mu-1}(y)]^2, \\ \text{mit } \sum_x [P_0(x)]^2 &= m \text{ und } \sum_y [P_0(y)]^2 = n. \end{aligned} \tag{8}$$

Die Doppelsumme im Zähler von (7) verursacht zur expliziten Ermittlung immer noch einen grossen Rechenaufwand. Zur weiteren Vereinfachung bedient man sich mit Vorteil der Symmetrie-Eigenschaften der eindimensionalen orthogonalen Polynome.

$$\begin{aligned} P_{\lambda-\mu}(-x) &= (-1)^{\lambda-\mu} P_{\lambda-\mu}(+x), \\ P_\mu(-y) &= (-1)^\mu P_\mu(+y) \end{aligned} \tag{9}$$

und erhält

$$\begin{aligned} S_{\lambda-\mu,\mu} = \sum_{x=\left\{\substack{0\\ \frac{1}{2}}\right.}^{\frac{m-1}{2}} \sum_{y=\left\{\substack{0\\ \frac{1}{2}}\right.}^{\frac{n-1}{2}} & P_{\lambda-\mu}(x)\, P_\mu(y) \{w(+x,+y) + (-1)^\mu w(+x,-y) + \\ & + (-1)^{\lambda-\mu} w(-x,+y) + (-1)^\lambda w(-x,-y)\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Die Summationen $\sum$ erstrecken sich über die Werte

$$x \text{ bzw. } y = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{m-1}{2} \text{ bzw. } \frac{n-1}{2}$$

oder über

$$x \text{ bzw. } y = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{m-1}{2} \text{ bzw. } \frac{n-1}{2},$$

je nachdem ob m bzw. n ungerade oder gerade ist. Einer besonderen Erwähnung bedürfen noch die Spezialfälle, wo x und y einzeln oder

zusammen den Wert null annehmen können. Jetzt reduziert sich der Ausdruck

$$\{w(+x,+y)+(-1)^{\mu}w(+x,-y)+(-1)^{\lambda-\mu}w(-x,+y)+(-1)^{\lambda}w(-x,-y)\}$$

in (10) zu

$$\begin{aligned} &w(0,+y)+(-1)^{\mu}w(0,-y), && \text{für } x=0,\\ &w(+x,0)+(-1)^{\lambda-\mu}w(-x,0), && \text{für } y=0,\\ &w(0,0), && \text{für } x=y=0. \end{aligned}$$

Nach (10) brauchen also die Werte der orthogonalen Polynome einer Veränderlichen lediglich für die positiven Argumente bekannt zu sein. Erneut bieten sich hieraus für die numerische Auswertung beachtliche Vorteile, indem sich jetzt die Zählersumme $S_{\lambda-\mu,\mu}$ aus additiven Multiplikationen einer geeigneten Kombination der vier Beobachtungen

$$w(+x,+y),\quad w(+x,-y),\quad w(-x,+y),\quad w(-x,-y) \tag{11}$$

mit den Polynomwerten $P_{\lambda-\mu}(x)\,P_{\mu}(y)$ für positive Argumente ergibt.

Es ist zweckmässig, die vier Beobachtungen (11) zu nachstehenden Hilfswerten zu vereinigen

$$\begin{aligned} SS &= w(+x,+y)+w(+x,-y)+w(-x,+y)+w(-x,-y),\\ SD &= w(+x,+y)-w(+x,-y)+w(-x,+y)-w(-x,-y),\\ DS &= w(+x,+y)+w(+x,-y)-w(-x,+y)-w(-x,-y),\\ DD &= w(+x,+y)-w(+x,-y)-w(-x,+y)+w(-x,-y). \end{aligned} \tag{12}$$

Diese vier Grössen sind in Gleichung (10), je nachdem ob λ und μ gerade oder ungerade sind, gemäss dem

Schema

	$\lambda =$ ungerade	$\lambda =$ gerade
$\mu =$ ungerade	SD	DD
$\mu =$ gerade	DS	SS

(12′)

einzusetzen.

Selbst die eigentliche Ermittlung der ausgeglichenen Werte lässt sich unter Berücksichtigung von (2), (5), (6) und (9) rekursiv vollziehen. Danach wird

$$\begin{aligned} z_{l,k}(x,y) &= z_{l,k-1}(x,y) + G_{l,k}(x,y) \\ \text{bzw.} \qquad z_{l+1,0}(x,y) &= z_{l,l}(x,y) + G_{l+1,0}(x,y)\,, \end{aligned} \tag{13}$$

mit

$$\begin{aligned} G_{l,k}(x,y) &= a_{l,k}\, P_{l-k}(x)\, P_k(y) \\ \text{bzw.} \qquad G_{l+1,0}(x,y) &= a_{l+1,0}\, P_{l+1}(x)\, P_0(y) \end{aligned} \tag{13'}$$

und

$$z_{0,0}(x,y) = a_{0,0}\, P_0(x)\, P_0(y) = a_{0,0}\,,$$

für alle $l = 0, 1, 2, \ldots$ und $k = 0, 1, \ldots, l$.

Insbesondere gilt nun

$$\begin{aligned} z_{l,k}(+x,+y) &= z_{l,k-1}(+x,+y) + G_{l,k}(+x,+y)\,, \\ z_{l,k}(+x,-y) &= z_{l,k-1}(+x,-y) + (-1)^k\, G_{l,k}(+x,+y)\,, \\ z_{l,k}(-x,+y) &= z_{l,k-1}(-x,+y) + (-1)^{l-k}\, G_{l,k}(+x,+y)\,, \\ z_{l,k}(-x,-y) &= z_{l,k-1}(-x,-y) + (-1)^l\, G_{l,k}(+x,+y)\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Wie früher bei der Berechnung der Summen $S_{\lambda-\mu,\mu}$ nach (10) reicht auch hier vermöge (13′) die blosse Kenntnis der eindimensionalen Polynomwerte für positive Argumente aus.

Bei Ausgleichsproblemen macht sich stets das Bedürfnis geltend, möglichst frühzeitig Anhaltspunkte über die Güte der Approximation zu besitzen. Hierzu eignet sich das verallgemeinerte Kriterum von *G. J. Lidstone*. Man berechnet die Summen der quadratischen Abweichungen

$$\sum_x \sum_y [u_{l,k}(x,y)]^2 = \sum_x \sum_y [w(x,y) - z_{l,k}(x,y)]^2,$$

die sich mit (13), (13′) und (7) durch nachstehende Rekursionsformeln bestimmen lassen.

$$\begin{aligned} \sum_x \sum_y [u_{l,k}(x,y)]^2 &= \sum_x \sum_y [u_{l,k-1}(x,y)]^2 - a_{l,k} \sum_x \sum_y w(x,y)\, P_{l-k}(x)\, P_k(y) \\ \sum_x \sum_y [u_{l+1,0}(x,y)]^2 &= \sum_x \sum_y [u_{l,l}(x,y)]^2 - a_{l+1,0} \sum_x \sum_y w(x,y)\, P_{l+1}(x)\, P_0(y)\,, \end{aligned} \tag{15}$$

mit

$$\sum_x \sum_y [u_{0,0}(x,y)]^2 = \sum_x \sum_y [w(x,y)]^2 - a_{0,0} \sum_x \sum_y w(x,y)\, P_0(x)\, P_0(y)$$

und

$$P_0(x) \equiv P_0(y) \equiv 1\,.$$

Als Präzisionsmass definiert man den Ausdruck

$$L_{l,k}^2 = \frac{1}{f} \sum_x \sum_y [u_{l,k}(x,y)]^2, \tag{16}$$

wo

$$f \begin{cases} = mn - \left\{ \dfrac{l(l+1)}{2} + (k+1) \right\} - \dfrac{n}{2}(2m-n-3), & \text{für } m > n \\ = mn - \left\{ \dfrac{l(l+1)}{2} + (k+1) \right\} - \dfrac{m}{2}(2n-m-1), & \text{für } m \leqq n \end{cases}$$

und stellt zur Beurteilung der Güte der Ausgleichung folgendes *Kriterium* auf:

Die Ausgleichung mit dem gemäss (13) um ein Glied erhöhten Ausgleichspolynom ist immer dann vorteilhaft, wenn

$$L_{l,k}^2 < L_{l,k-1}^2 \quad \text{bzw.} \quad L_{l+1,0}^2 < L_{l,l}^2 \tag{17}$$

ausfällt.

Ausser dem einfach zu berechnenden Nenner f setzt dieses Verfahren lediglich die Kenntnis von $\sum_x \sum_y [w(x,y)]^2$ sowie der Zähler und Nenner von $a_{\lambda,\mu}$ gemäss (7) voraus. Lange bevor die ausgeglichenen Werte vorliegen, kann man bereits einen ersten Überblick über den Stand der Ausgleichung gewinnen. Nicht unerwähnt bleibe, dass für eine endgültige Beurteilung der Güte der Ausgleichung noch weitere Kriterien herangezogen werden müssen [1, 5].

Fassen wir die bisher gewonnenen Ergebnisse zusammen. Für die Ausgleichung mit orthogonalen Polynomen verdienen folgende Eigenschaften und Besonderheiten speziell hervorgehoben zu werden:

1. Die Koeffizienten $a_{\lambda,\mu}$ der Ausgleichspolynome $z_{l,k}(x,y)$ sind vom Grad des gewählten Ausgleichsansatzes unabhängig und ergeben sich direkt aus Beziehung (4).
2. Unter der Voraussetzung eines achsenparallelen Rechteckbereiches lassen sich die zweidimensionalen orthogonalen Polynome $P_{\lambda,\mu}(x,y)$ nach (5) durch das Produkt der beiden eindimensionalen orthogonalen Polynome $P_{\lambda-\mu}(x)$ und $P_\mu(y)$ darstellen.
3. Unter der Annahme äquidistanter Beobachtungswerte wird die Berechnung der orthogonalen Polynome $P_{\lambda-\mu}(x)$ und $P_\mu(y)$, der

Summen $\sum_x [P_{\lambda-\mu}(x)]^2$ und $\sum_y [P_\mu(y)]^2$, der ausgeglichenen Werte $z_{l,k}(x,y)$ sowie der Summe der quadratischen Abweichungen $\sum_x \sum_y [u_{l,k}(x,y)]^2$ durch die Rekursionsbeziehungen (6), (8), (13), (14) und (15) wesentlich vereinfacht.

4. Zufolge der Symmetrie (9) der eindimensionalen orthogonalen Polynome für äquidistante Argumente ist sowohl zum Aufsuchen der Summen $S_{\lambda-\mu,\mu}$ nach (10) und damit der Koeffizienten $a_{\lambda,\mu}$ nach (7) als auch zur Bestimmung des Ausgleichspolynoms $z_{l,k}(x,y)$ nach (14) lediglich die Kenntnis der Werte der orthogonalen Polynome für positive Argumente erforderlich.

5. Mit den Formeln (2) und (13) gewinnt man nicht nur die ausgeglichenen Werte für einen speziellen Grad, sondern – wie aus dem schrittweisen Aufbau von $z_{l,k}(x,y)$ hervorgeht – gleichzeitig die ausgeglichenen Werte für sämtliche Polynome niedrigeren Grades. Dies gestattet, den Grad des Ausgleichspolynoms vorläufig etwas höher anzusetzen als unbedingt notwendig wäre und nach der Durchführung der Ausgleichung unter den Ansätzen niedrigeren Grades jenen auszuwählen, welcher den speziellen Bedingungen und Kriterien am besten genügt.

22 Programmierung

Das Erstellen eines Programms für einen Rechenautomaten erfolgt in zwei grossen Schritten. Vorerst ist die gestellte Aufgabe zu analysieren und formelmässig darzustellen. Als Resultat dieser Vorarbeiten, die wir Organisationsphase nennen wollen, entstehen eine umfassende Formelsammlung und ein detaillierter Arbeitsplan. Normalerweise ist der Aufwand dafür bedeutend grösser als für den zweiten Schritt, welcher dazu dient, die mathematische oder symbolische Ausdrucksweise gemäss dem aufgestellten Organisationsplan in die spezifische Maschinensprache zu übersetzen. Nur dieser zweite, als eigentliche Programmierungsphase zu bezeichnende Schritt ist vom verfügbaren System des Rechengerätes abhängig, im Gegensatz zur Organisationsphase, die stets auf die allgemeine Lösung des Problems ausgerichtet ist und demnach von der Art des Rechenautomaten nicht beeinflusst wird.

Mit den bisherigen Ausführungen sind wir bereits tief in die Organisationsphase eingedrungen. Die skizzierte Lösungsidee muss unter Berücksichtigung des Formelapparates sorgfältig ausgearbeitet und zu einem Rechenplan zusammengestellt werden, wie er etwa durch das Ablaufdiagramm nebenstehende (Figur 1) veranschaulicht wird.

In diesem Ablaufdiagramm lassen sich fünf Stufen unterscheiden.

Stufe I: Start, Eingabe der Beobachtungswerte $w(x,y)$ und der Konstanten, wie z. B. 1, m (= Anzahl Beobachtungswerte in der x-Richtung), n (= Anzahl Beobachtungswerte in der y-Richtung), l (= höchster Grad des Ausgleichspolynoms), k (= Index des l-ten Ausgleichspolynoms) usw. Vorbereitung der Verzweigungsbefehle, der Adressenrechnung sowie der weiteren Rechenwerte, Festlegung der Argumente x und y und Bereitstellung der ersten Polynom- und Beobachtungswerte nach (6′) und (11).

Stufe II: Berechnung der Kombinationen SS, SD, DS und DD der Beobachtungswerte $w(\pm x, \pm y)$ nach (12). Ermittlung und Speicherung der eindimensionalen orthogonalen Polynome $P_{\lambda-\mu}(+x)$ und $P_\mu(+y)$ nach den Rekursionsbeziehungen (6), der Hilfsgrössen $S_{\lambda-\mu,\mu}$ nach (10) für $\lambda = 0, 1, \ldots, l$; $\mu = 0, 1, \ldots, \lambda$ und der Summe $\sum_x \sum_y [w(x,y)]^2$.

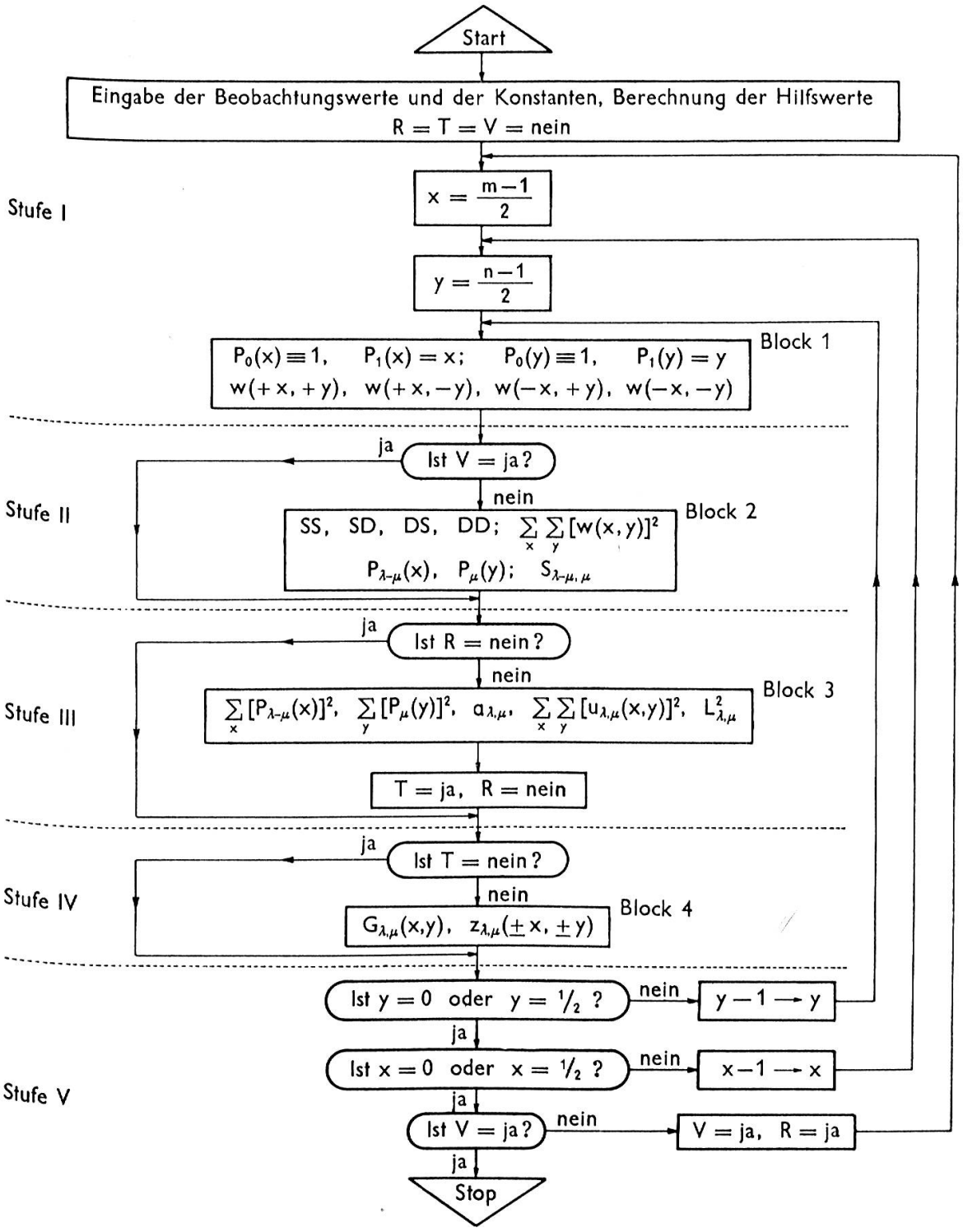
Stufe III: Rekursive Bestimmung der Summen $\sum_x [P_{\lambda-\mu}(x)]^2$ und $\sum_y [P_\mu(y)]^2$ nach (8) zur Berechnung der Koeffizienten $a_{\lambda,\mu}$ nach (7) für $\lambda = 0, 1, \ldots, l$; $\mu = 0, 1, \ldots, \lambda$. Speicherung aller $a_{\lambda,\mu}$-Werte und Ermittlung der Summe der quadratischen Abweichungen $\sum_x \sum_y [u_{\lambda,\mu}(x,y)]^2$ nach (15) zur Beurteilung der Güte der Ausgleichung mit Hilfe des Präzisionsmasses $L^2_{\lambda,\mu}$ (16) und des Kriteriums (17).

Stufe IV: Durch geeignete Kombination der gespeicherten Koeffizienten $a_{\lambda,\mu}$ und der orthogonalen Polynome $P_{\lambda-\mu}(x)$ und $P_\mu(y)$ ergibt sich $G_{\lambda,\mu}(x,y)$ nach (13′) und damit die ausgeglichenen Werte $z_{\lambda,\mu}(x,y)$ nach (14) für $\lambda = 0, 1, \ldots, l$; $\mu = 0, 1, \ldots, \lambda$.

Stufe V: Test- und Steuerbefehle, Reduktion der Argumente x und y und Stopbefehl.

Zweidimensionale Ausgleichung

Gesamtübersicht



Figur 1

Jede der vier ersten Stufen dieses Ablaufdiagramms besteht aus mehreren Abschnitten. Ohne auf die letzten Einzelheiten einzugehen, sei beispielsweise Programmblock 4 der Stufe IV aufgegriffen.

Aus dem Ablaufdiagramm (Figur 2) geht hervor, dass zuerst die Ausgleichspolynome nullten und ersten Grades direkt berechnet werden. Ist der vorgegebene höchste Grad l des Ausgleichspolynoms grösser als eins, wird $G_{\lambda,\mu}(+x,+y)$ gemäss (13′) ermittelt für $x,y \geqq 0$.

Das Aufsuchen der $z_{\lambda,\mu}(x,y)$ erfolgt alsdann nach (14) mit den dort ausgewiesenen Fallunterscheidungen. Vom Vorzeichen der Argumente x,y sowie von der Struktur der Indexe λ und μ (gerade oder ungerade) hängt es ab, ob $G_{\lambda,\mu}(+x,+y)$ mit $z_{\lambda,\mu-1}(x,y)$ additiv oder subtraktiv zu verbinden ist. Stets gilt

$$z_{\lambda,\mu}(+x,+y) = z_{\lambda,\mu-1}(+x,+y) + G_{\lambda,\mu}(+x,+y).$$

Für $z_{\lambda,\mu}(+x,-y)$ fallen die beiden Varianten

$$z_{\lambda,\mu}(+x,-y) = z_{\lambda,\mu-1}(+x,-y) + G_{\lambda,\mu}(+x,+y) \text{ für } \mu = \text{gerade}$$

und

$$z_{\lambda,\mu}(+x,-y) = z_{\lambda,\mu-1}(+x,-y) - G_{\lambda,\mu}(+x,+y) \text{ für } \mu = \text{ungerade}$$

in Betracht. Der Entscheid hierüber wird mittels des Testbefehles «Ist μ = gerade?» gefällt.

Analog verhält es sich für $z_{\lambda,\mu}(-x,+y)$. Um über die beiden möglichen Ansätze

$$z_{\lambda,\mu}(-x,+y) = z_{\lambda,\mu-1}(-x,+y) + G_{\lambda,\mu}(+x,+y) \text{ für } \lambda-\mu = \text{gerade}$$

und

$$z_{\lambda,\mu}(-x,+y) = z_{\lambda,\mu-1}(-x,+y) - G_{\lambda,\mu}(+x,+y) \text{ für } \lambda-\mu = \text{ungerade}$$

befinden zu können, prüft man «Ist $\lambda-\mu$ = gerade?».

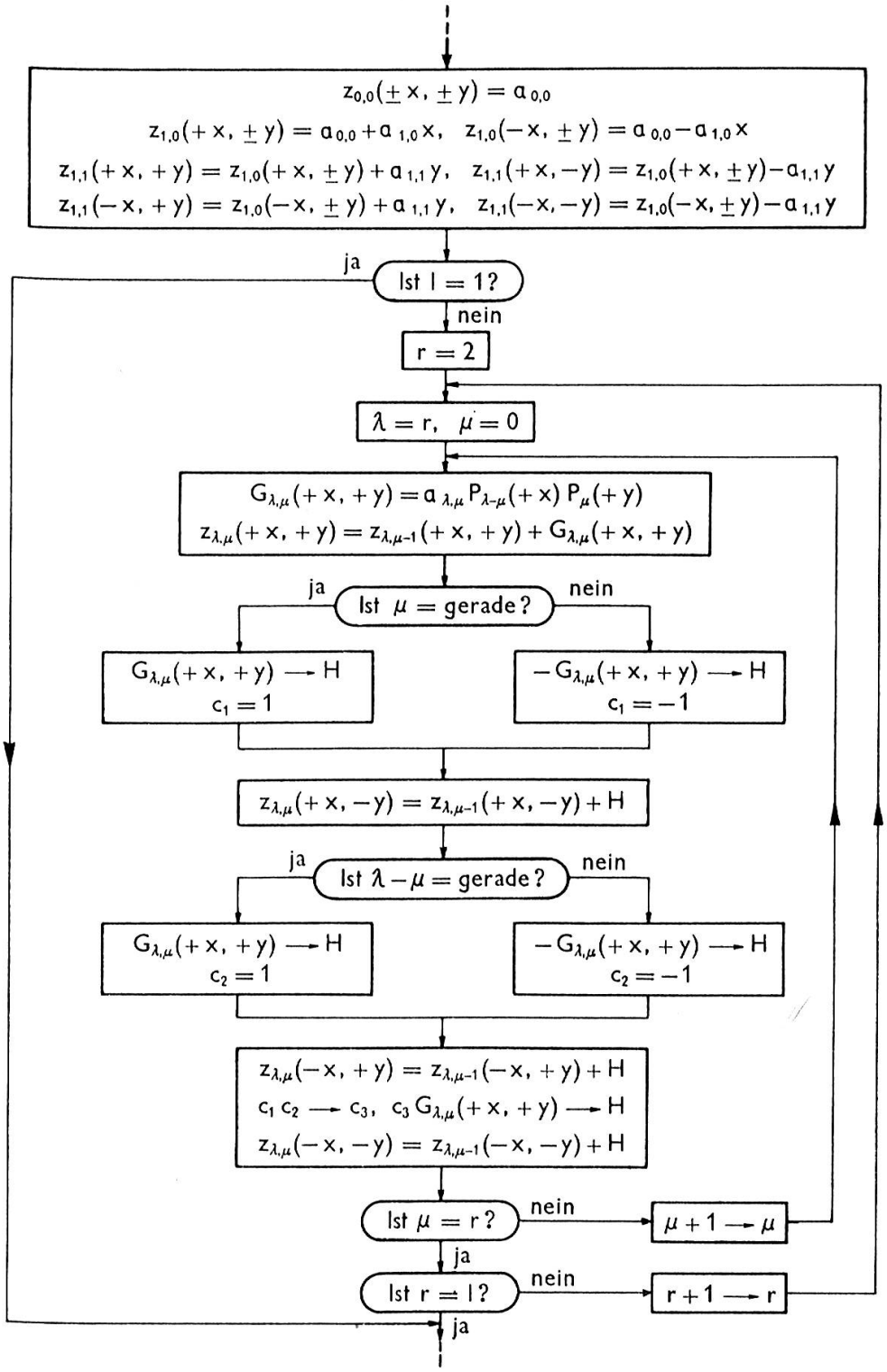
Zur Bestimmung von

$$z_{\lambda,\mu}(-x,-y) = z_{\lambda,\mu-1}(-x,-y) + (-1)^{\lambda} G_{\lambda,\mu}(+x,+y)$$

muss schliesslich die Struktur von λ bekannt sein. Für diesen 3. Test kann man sich behelfsmässig auf die beiden vorerwähnten Entscheide stützen. λ ist stets gerade, falls μ und $(\lambda-\mu)$ gleichzeitig gerade oder ungerade ausfallen; anders ausgedrückt $c_1 c_2 = c_3 = +1$. Verhalten sich dagegen μ und $(\lambda-\mu)$ hinsichtlich des Merkmals «gerade» oder «ungerade» unterschiedlich, dann ist λ ungerade $(c_1 c_2 = c_3 = -1)$.

Zweidimensionale Ausgleichung

Detailangaben zu Block 4



Figur 2

Für die rekursive Ermittlung von $z_{\lambda,\mu}(-x,-y)$ gilt demnach der Ansatz

$$z_{\lambda,\mu}(-x,-y) = z_{\lambda,\mu-1}(-x,-y) + c_3 G_{\lambda,\mu}(+x,+y),$$

mit der Testgrösse $c_3 = +1\,(-1)$ für $\lambda =$ gerade (ungerade).

Die Berechnung der ausgeglichenen Werte $z_{\lambda,\mu}(x,y)$ wird für alle $\mu = 0, 1, \ldots, \lambda$ durchgeführt, bis $\mu = \lambda = l$ ist ($\lambda = 2, 3, \ldots, l$).

Beim Druck der Ergebnisse ist darauf zu achten, dass alle erforderlichen Angaben geliefert werden, um die Ausgleichung jederzeit überblicken und je nach Wunsch schrittweise verfolgen zu können. Unser Programm soll mindestens folgende Werte drucken:

$$m,\ n,\ l,\ k;$$

$$\lambda,\ \mu,\ a_{\lambda,\mu},\ \sum_x \sum_y [u_{\lambda,\mu}(x,y)]^2,\ L^2_{\lambda,\mu},$$

für alle $\lambda = 0, 1, \ldots, l$ und $\mu = 0, 1, \ldots, \lambda$;

$$\lambda,\ \mu,\ w(+x,+y),\ z_{\lambda,\mu}(+x,+y),\ w(+x,-y),\ z_{\lambda,\mu}(+x,-y),$$
$$w(-x,+y),\ z_{\lambda,\mu}(-x,+y),\ w(-x,-y),\ z_{\lambda,\mu}(-x,-y),$$

für vorgegebene $\lambda = l$ und $\mu = k$.

Diese Feststellungen beschliessen die Organisationsphase und führen bereits in die Programmierungsphase über. Hier tritt nun das verfügbare Rechengerät und dessen Arbeitsweise in den Vordergrund.

Wir haben unsere Überlegungen am Rechenautomaten Gamma 3B-AET [1]) erprobt, wie er der Universität Bern und weitern Interessenten im Institut für angewandte Mathematik zur Verfügung steht.

Zwischen das Rechenwerk und den Hauptspeicher (Magnettrommel mit 8192 Speicherzellen) dieser elektronischen Rechenanlage sind 6 Normal- und 64 Schnellspeicher geschaltet. Jede Speicherzelle fasst 12 Tetraden, d.h. 12 Dezimalziffern oder 48 Dualstellen. Als Ein- und Ausgabe dient eine Tabelliermaschine, welche pro Minute bis zu 150 Lochkarten liest oder 150 Zeilen zu 92 Ziffern druckt; ein mit der Tabelliermaschine gekoppelter Blocksummenlocher stanzt die gewünschten Resultate in Lochkarten.

---

[1]) Hergestellt von der Compagnie des Machines BULL in Paris.

Die Firma Bull stellt ihren Kunden das sehr einfach zu handhabende, automatische Programmierungssystem AP 2 zur Verfügung. Es handelt sich um Dreiadressbefehle mit symbolischer oder pseudosymbolischer Adressierung und mnemotechnisch zweckmässig gewählten Abkürzungen für die auszuführenden Operationen [4]. Unser Programm besteht aus ca. 600 solchen Befehlen und gleicht bis zu $mn = 3600$ Beobachtungswerte mit einem Polynom bis zum höchsten Grad $l = 31$ aus. Die Resultate werden mit der Tabelliermaschine gemäss den auf der vorangehenden Seite vorgemerkten Angaben übersichtlich herausgedruckt.

Was den Druck der ausgeglichenen Werte anbetrifft, bestehen folgende vier, durch Steuerkarten wählbare Möglichkeiten:

a) Druck der $z_{\lambda,\mu}(x,y)$ für die vorgegebene Kombination $\lambda = l, \mu = k$;

b) Druck der $z_{\lambda,\mu}(x,y)$ für die zum kleinsten $L^2_{\lambda,\mu}$ führende Kombination λ,μ;

c) Druck der $z_{\lambda,\mu}(x,y)$ für die ausgewählten Kombinationen $\lambda = \mu = 1, 2, \ldots, l$;

d) Druck der $z_{\lambda,\mu}(x,y)$ für sämtliche Kombinationen $\lambda = 1, 2, \ldots, l-1$ und $\mu = 0, 1, \ldots, \lambda$ sowie $\lambda = l$ und $\mu = 0, 1, \ldots, k$.

3 Eindimensionale Ausgleichung (Spezialisierung)

Liegt nur eine Veränderliche vor, so sind merkliche Vereinfachungen im Ansatz sowie im Arbeitsablauf der Ausgleichung zu gewärtigen. Wir begnügen uns damit, die wesentlichsten Gesichtspunkte hinsichtlich Methode und Programmierung zu erörtern.

Gegeben sind m äquidistant gelegene Beobachtungswerte $w(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, zu den Argumenten $x_i = -\frac{m-1}{2}(1)\frac{m-1}{2}$.

Gesucht wird das Ausgleichspolynom l-ten Grades

$$z_l(x) = \sum_{\lambda=0}^{l} a_\lambda P_\lambda(x), \tag{18}$$

so dass

$$\sum_x [z_l(x) - w(x)]^2 = \text{Minimum}.$$

Die orthogonalen Polynome $P_\lambda(x)$ erfüllen die Rekursionsbeziehungen (6) und (8) und weisen die Symmetrie-Eigenschaft (9) auf.

Für die Bestimmung der Koeffizienten a_λ gilt der Ansatz

$$a_\lambda = \frac{S_\lambda}{N_\lambda} = \frac{\sum\limits_x w(x)\, P_\lambda(x)}{\sum\limits_x [P_\lambda(x)]^2}, \tag{19}$$

mit

$$S_\lambda = \sum_{x=\left\{\substack{0\\ \frac{1}{2}}\right.}^{\frac{m-1}{2}} P_\lambda(x) \begin{Bmatrix} S \\ D \end{Bmatrix}, \text{ je nachdem ob } \begin{cases} \lambda = \text{gerade, oder} \\ \lambda = \text{ungerade} \end{cases}$$

und

$$S = w(+x) + w(-x),$$
$$D = w(+x) - w(-x) \qquad \text{ist.}$$

Für $x = 0$ reduziert sich S und D auf

$$S = D = w(0).$$

Die approximative Beurteilung der Güte der Ausgleichung erfolgt analog zum Kriterium (17) mittels des Präzisionsmasses

$$L_l^2 = \frac{1}{m-l-1} \sum_x [u_l(x)]^2. \tag{20}$$

Dabei bedeutet

$$\sum_x [u_l(x)]^2 = \sum_x [w(x) - z_l(x)]^2$$
$$= \sum_x [u_{l-1}(x)]^2 - a_l \sum_x w(x)\, P_l(x), \tag{21}$$

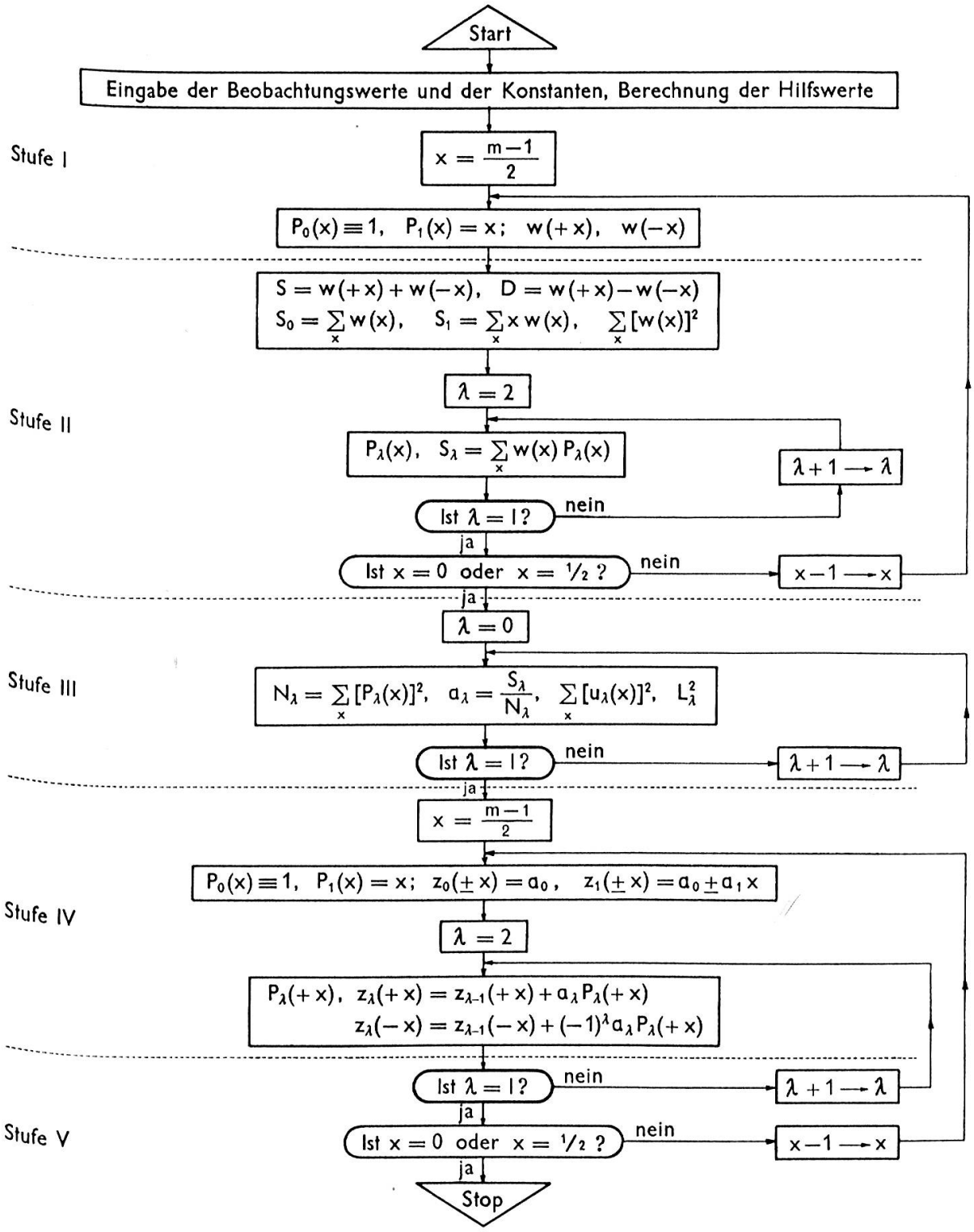
mit

$$\sum_x [u_0(x)]^2 = \sum_x [w(x)]^2 - a_0 \sum_x w(x).$$

Formal entsprechen diese Ansätze vollständig den für zwei Veränderlichen gültigen Beziehungen. Also dürfte sowohl zwischen den Ablaufdiagrammen als auch zwischen den eigentlichen Programmen selbst – abgesehen von gewissen Modifikationen – eine weitgehende Übereinstimmung bestehen. Dies trifft, wie das Ablaufdiagramm für den eindimensionalen Fall (Figur 3) zeigt, wohl für jede einzelne der fünf Stufen zu, nicht aber für den äusserlichen Gesamtaufbau. Das Aufsuchen der vier Beobachtungswerte (11) in den Eckpunkten ($\pm x$, $\pm y$) erfordert nämlich bei zwei Veränderlichen einen viel grösseren Aufwand (Adressenrechnung) als jener für die beiden Beobachtungswerte $w(\pm x)$ bei einer Variablen. Deshalb wurde dieser Programmausschnitt in Figur 1 zusammen mit weiteren Befehlen am Anfang und

Eindimensionale Ausgleichung

Gesamtübersicht



Figur 3

Ende des Programmes nur einmal niedergeschrieben und durch eine «zyklische» Organisation entsprechend oft angerufen. Beim ohnehin einfacheren eindimensionalen Ausgleichsverfahren haben wir dagegen die wenigen Befehle zweimal geschrieben (vgl. Figur 3, Beginn und Ende der Stufen I/II und IV/V). Die Stufen II, III und IV sind jetzt ganz unabhängig voneinander, und die Programmstruktur tritt klarer hervor.

Wenn auch unsere Untersuchungen in der eigentlichen Programmierungsphase Bezug nehmen auf das an der Universität Bern vorhandene elektronische Rechengerät, so sei doch abschliessend darauf hingewiesen, dass die vorgeschlagenen Lösungen für die ein- und zweidimensionale Ausgleichung mit orthogonalen Polynomen in ihrer Grundkonzeption auch für andere Systeme von Rechenautomaten Gültigkeit besitzen.

Literaturangaben

[1] Eidgenössisches Statistisches Amt: Schweizerische Volkssterbetafeln 1931/41 und 1939/44. Stand und Entwicklung der Sterblichkeit in der Schweiz. Bern. Reihe Bk 4, 1951. Heft 232.

[2] *Householder, Alston, S:* Principles of numerical Analysis. New York, McGraw-Hill Book Co. 1953.

[3] *Hüsser, Rudolf:* Orthogonale Polynome mehrerer Veränderlichen und ihre Anwendung in der ein- und zweidimensionalen Ausgleichsrechnung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 1957. Bd.57, Heft 1, S.55–128.

[4] *Nef, Walter:* Die Programmierung digitaler Rechenautomaten. Vorlesung gehalten im Wintersemester 1958/59 an der Universität Bern (vervielfältigt).

[5] *Saxer Walter:* Versicherungsmathematik. Zweiter Teil. Berlin, Springer Verlag 1958.

Résumé

Pour l'ajustement à l'aide de polynomes orthogonaux, les auteurs montrent comment on peut adapter de façon appropriée les données théoriques, dans le cas d'une et de deux variables, afin de pouvoir utiliser avec profit les machines électroniques si l'on connait des valeurs d'observation équidistantes.

Les instructions de programmation pour l'exécution de tous les calculs de récurrence sont expliqués à fond au moyen d'organigrammes de validité générale. La machine électronique Gamma 3B-AET de l'Institut des mathématiques appliquées de l'Université de Berne a été mise à contribution pour l'obtention de résultats concrets.

Riassunto

Gli autori dimostrano come si possono trasformare opportunamente i dati teorici, nel caso di una e due dimensioni, per l'aggiustamento con polinomi ortogonali, in modo che, conoscendo valori d'osservazione equidistanti, sia possibile utilizzare con vantaggio le calcolatrici elettroniche.

Le istruzioni di programmazione che servono all'esecuzione di tutti i calcoli con formule di ricorrenza, vengono spiegate a fondo per mezzo di diagrammi a blocchi, di validità generale. Per ottenere i risultati concreti venne usata la calcolatrice elettronica Gamma 3B-AET dell'Istituto di matematica applicata dell-Università di Berna.

Summary

The authors demonstrate how, in one and two dimensions, the theoretic model for the graduation with orthogonal polynomials can be adapted to the use of electronic computers, provided the observed data are given for equidistant values.

The decisive programming steps for the carrying out of the computations by recurrence are explained in detail, using flow charts of general validity. The numerical application of the results set forth was carried out with the electronic Computer Gamma 3B-AET at the disposal of the Institute of applied mathematics of Berne University.