Über die Eintritts- und Abnahmeintensitäten einer Bevölkerung und über das Verhalten der Bevölkerungsfunktion, insbesondere relativ stationärer Bevölkerungen

Autor(en): **Thullen, Peter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **60 (1960)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966784

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über die Eintritts- und Abnahmeintensitäten einer Bevölkerung und über das Verhalten der Bevölkerungsfunktion, insbesondere relativ stationärer Bevölkerungen

Von Peter Thullen, Genf

Zusammenfassung

Unter Zugrundelegung zweidimensionaler Ausscheideintensitäten $\mu(x,t)$ wird zwischen diesen und den Eintritts- und Abnahmeintensitäten $\nu(x,t)$ bzw. $\mu_L(x,t)$ einer gegebenen Bevölkerung $L(x,t)$ die einfache Beziehung $\nu(x,t) = \mu(x,t) - \mu_L(x,t)$ aufgestellt. Ferner wird die Existenz einer stabilen Infrastruktur zu gegebener relativ stationärer Bevölkerung nachgewiesen und ein bereits bekanntes Kriterium für stabile Bevölkerungen wesentlich verschärft.

Einleitung

Eine Bevölkerung, deren zeitliche Entwicklung – von einer eventuell vorhandenen Anfangsgesamtheit abgesehen – durch Austritte und Neueintritte bestimmt ist, möge in einem Altersintervall $[x_1,x_2]$ und einem Zeitintervall $[t_1,t_2]$ durch die Bevölkerungsfunktion $L(x,t)$ gegeben sein. Hierbei bedeutet $\int_{x'}^{x''} L(x,t)\,dx$ für jedes feste t aus $[t_1,t_2]$ die Anzahl der zur Zeit t der Bevölkerung angehörigen Personen vom Alter $x' \leqq x \leqq x''$ [1]. Ferner sei $N(x,t)$ die $L(x,t)$ zugehörige Eintrittsfunktion [1], und es werde $\nu(x,t) = \dfrac{N(x,t)}{L(x,t)}$ die *Eintrittsintensität* genannt.

Die Austritte aus der Bevölkerung seien durch geeignete Ausscheidewahrscheinlichkeiten bzw. Ausscheideintensitäten bestimmt. Gewöhnlich geht man von der einfachen Hypothese einer nur vom Alter, aber nicht von der Zeit t als solcher abhängigen Ausscheide-

---

[1]) Zu obigen Begriffen und Bezeichnungen siehe auch *P. Thullen:* Über den relativen Beharrungszustand einer Bevölkerung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 58, 1958, Heft 2, S. 177–196.

intensität μ_x aus. Es zeigt sich jedoch, dass die uns interessierenden Fragen sich nicht nur ganz allgemein unter Zugrundelegung einer sowohl vom Alter x als auch von der Kalenderzeit t abhängigen Ausscheideintensität $\mu(x,t)$ – wie sie bei neueren Untersuchungen herangezogen werden – lösen lassen, sondern auch, dass gerade die allgemeinen Lösungen einen überraschend einfachen und durchsichtigen Sinn erhalten. Wir legen daher zweidimensionale Ausscheideintensitäten $\mu(x,t)$ zugrunde und konstruieren mit ihrer Hilfe die zugehörige zweidimensionale Überlebensordnung oder Überlebensfläche $l(x,t)$, die ihrerseits die notwendigen Verbleibenswahrscheinlichkeiten liefert [1]).

Zu je einem festen Geburtszeitpunkt τ gehört eine «Generationslinie»: $\tau = t - x = \text{const.}$; die Generationslinien sind wesentlich zur Konstruktion und Anwendung der Überlebensfläche $l(x,t)$ und ebenso zur Untersuchung des Verhaltens der Bevölkerungsfunktion $L(x,t)$. Als Mass der Veränderung von $L(x,t)$ wählen wir die Intensität $\mu_L(x,t)$ des Abnehmens längs der Generationslinien, welche zu $L(x,t)$ in der gleichen Beziehung steht wie $\mu(x,t)$ zu $l(x,t)$.

Die Intensitäten $\nu(x,t)$, $\mu(x,t)$ und $\mu_L(x,t)$ hängen unmittelbar miteinander zusammen, und zwar gilt (Satz 1):

$$\mu_L(x,t) = \mu(x,t) - \nu(x,t).$$

Aus einer Erweiterung des Beweises dieses Hauptsatzes ergibt sich ferner *eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass bei vorgegebenen Ausscheideintensitäten $\mu(x,t)$ eine Funktion $L(x,t)$ eine Bevölkerung darstellt* (Satz 2).

---

[1]) Zum Gebrauch von Intensitäten vom Typus $\mu(x,t)$ siehe etwa *H. Cramer* and *H. Wold:* Mor'ality Variations in Sweden. Skandin. Aktuarietidskrift 1935, S. 161–241. Von neueren Arbeiten sei erwähnt: *E. Kaiser:* Statistische und dynamische Rechnungsgrundlagen für Pensionskassen. Internat. Zeitschr. f. Versicherungsmath. und statistische Probleme der Sozialen Sicherheit; Genf 1958, Nr. 2. Siehe ausserdem die dort zitierten Arbeiten von *F. Rueff:* Ableitung von Sterbetafeln für die Rentenversicherung und sonstige Versicherungen mit Erlebensfallcharakter (Sonderveröffentlichung d. deutsch. Gesellsch. f. versicherungsmathematik, Nr. 2, Würzburg 1955) und *G. Wünsche:* Invaliditätsversicherung und säkulare Sterblichkeitsänderung; XVth Intern. Congress of Actuaries, New York 1957.

Auch wenn wir in vorliegender Arbeit uns nicht auf Sterblichkeitsintensitäten beschränken, werden wir im übertragenen Sinne den Ausdruck «überleben» und ähnliche gebrauchen, worunter die Zugehörigkeit oder das Verbleiben zur bzw. in der Bevölkerung zu verstehen ist.

Der zweite Teil der Arbeit (§§ 3 und 4) befasst sich mit der Struktur der stabilen und der relativ stationären Bevölkerungen [1]). Indem insbesondere die letzteren auf stabile Infrastrukturen bezogen werden können und damit eine explizite Darstellung der Bevölkerungsfunktionen und Eintrittsintensitäten relativ stationärer Bevölkerungen gewonnen wird, werden die in einer früheren Arbeit begonnenen Untersuchungen dieser Klasse von Bevölkerungen zu einem gewissen Abschluss gebracht. Ferner wird eine wesentliche Verschärfung eines dort aufgestellten Kriteriums für stabile Bevölkerungen bewiesen (Satz 3).

In der vorliegenden Arbeit wird durchweg die kontinuierliche Methode verwandt und daher vorausgesetzt, dass die vorkommenden Funktionen stetig und, soweit notwendig, auch differentiierbar seien.

INHALT

§ 1 Bezeichnungen 189
§ 2 Hauptsatz über Intensitäten und allgemeine Bedingung für die Bevölkerungsfunktion $L(x,t)$ 191
§ 3 Sonderfall von der Zeit t unabhängiger Intensitäten und ein Satz über stabile Bevölkerungen 194
§ 4 Die stabile Infrastruktur einer relativ stationären Bevölkerung 196

§ 1 Bezeichnungen

Die gegebene Bevölkerung und ihre Funktion $L(x,t)$ seien im Altersintervall $[x_1,x_2]$ und dem endlichen Zeitintervall $[t_1,t_2]$ definiert und dort beschränkt. t sei die Kalenderzeit und $\mu(x,t)$ die vom Alter x und der Zeit t abhängige Ausscheideintensität, wobei die Ausscheideursache wohl definiert, aber nicht notwendig auf den Tod beschränkt sei. $\mu(x,t)$ sei für das Altersintervall $x_0 \leqq x \leqq \omega$ und die Zeitspanne $t_0 \leqq t \leqq T$ definiert, und es sei stets $x_0 \leqq x_1 < x_2 \leqq \omega$ und $t_0 \leqq t_1 < t_2 \leqq T$.

[1]) Zu den Begriffen der relativ stationären und der stabilen Bevölkerung siehe *P. Thullen*, loc. cit. Eine relativ stationäre Bevölkerung ist eine solche mit zeitlich unveränderter Altersstruktur, deren Funktion $L(x,t)$ sich demnach in $L(x,t) = \varphi(t)\, L(x,t_1)$ aufspalten lässt. $\varrho(t) = \dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$ ist die Wachstumsintensität der Bevölkerung längs der Zeitachse (t). Ist $\varrho(t) = \varrho = \text{const.}$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, so liegt eine *stabile* Bevölkerung vor.

Für einen fest gewählten Geburtszeitpunkt τ ergibt sich eine *Generationslinie* $\tau = t - x = \text{const.}$ und auf dieser die Überlebensordnung der entsprechenden Generation:

$$^{\tau}l(x) = {}^{\tau}l(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \mu(\xi, \tau+\xi)\, d\xi}.$$

Wählt man etwa $^{\tau}l(x_0) = l_0$ für alle zulässigen τ (z.B. $l_0 = 100\,000$), erhält man die zweidimensionale Überlebensordnung:

$$l(x,t) = l_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} \mu(\xi, t-x+\xi)\, d\xi}, \quad x_0 \leqq x \leqq \omega, \; t_0 \leqq t \leqq T.$$

Falls die partiellen Ableitungen von $l(x,t)$ existieren, lässt sich die Intensität $\mu(x,t)$ durch Differentiieren längs der Generationslinien wie folgt ausdrücken:

$$\mu(x,t) = -\frac{d}{dx} \ln {}^{\tau}l(x) = -\frac{l'_x(x,t) + l'_t(x,t)}{l(x,t)}, \quad \tau = t - x.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine der gegebenen Bevölkerung im Zeitpunkt t zugehörige Person vom Alter x ebenfalls noch im Alter $x+m$, d.i. im Zeitpunkt $t+m$, in der Bevölkerung verbleibt, ist gleich dem Ausdruck:

$$\frac{^{\tau}l(x+m)}{^{\tau}l(x)} = \frac{l(x+m, t+m)}{l(x,t)}, \quad \tau = t - x = (t+m) - (x+m).$$

Wir betrachten nun die Entwicklung der gegebenen Bevölkerung $L(x,t)$ längs einer Generationslinie $\tau = t - x = \text{const.}$; dann ist

$$^{\tau}L(x) = L(x, \tau + x), \qquad x_1 \leqq x \leqq x_2$$

eine *Generation* oder *Gesamtheit gleichzeitig Geborener* (mit dem Geburtszeitpunkt τ). Wir definieren, falls $L(x,t) \neq 0$,

$$\mu_L(x,t) = -\frac{d}{dx} \ln {}^{\tau}L(x) = -\frac{L'_x(x,t) + L'_t(x,t)}{L(x,t)}, \quad \tau = t - x,$$

als die Intensität des Abnehmens von $L(x,t)$ längs der Generationslinie oder – wenn kein Grund zur Verwechslung vorliegt – als *Intensität des Abnehmens* schlechthin der Bevölkerungsfunktion $L(x,t)$. Im Falle $\mu_L > 0$ liegt ein echtes Abnehmen vor; $-\mu_L(x,t)$ kann man auch die *Wachstumsintensität* von $L(x,t)$ längs der Generationslinien nennen.

§ 2 Hauptsatz über Intensitäten und allgemeine Bedingung für die Bevölkerungsfunktion $L(x,t)$

Zwischen der Bevölkerungsfunktion $L(x,t)$ und ihrer Eintrittsfunktion $N(x,t) = N(x, \tau + x) = {}^{\tau}N(x)$ besteht für $h > 0$ längs einer Generationslinie die folgende Beziehung [1]):

$$ {}^{\tau}L(x+h) - {}^{\tau}L(x) \frac{{}^{\tau}l(x+h)}{{}^{\tau}l(x)} = \int_x^{x+h} {}^{\tau}N(\xi) \frac{{}^{\tau}l(x+h)}{{}^{\tau}l(\xi)} d\xi, \quad \tau = t - x. $$

Differentiiert man bei festem x und τ beide Seiten nach h, ergibt sich für $h \to 0$ die Gleichung:

$$ {}^{\tau}N(x) = {}^{\tau}L'(x) - {}^{\tau}L(x) \frac{{}^{\tau}l'(x)}{{}^{\tau}l(x)} = N(x,t) = L'_x(x,t) + L'_t(x,t) + L(x,t)\,\mu(x,t). $$

Damit ist für die Eintrittsfunktion ein expliziter Ausdruck gewonnen, der, falls $L(x,t) \neq 0$, übergeht in:

$$ N(x,t) = L(x,t)\,[\mu(x,t) - \mu_L(x,t)], $$

oder für die Eintrittsintensität in:

$$ \nu(x,t) = \mu(x,t) - \mu_L(x,t). $$

Es wurde demnach bewiesen:

Satz 1. Legt man zweidimensionale Ausscheideintensitäten $\mu(x,t)$ zugrunde, und bezeichnen $\nu(x,t)$ und $\mu_L(x,t)$ die zu einer gegebenen Bevölkerungsfunktion $L(x,t)$ gehörigen Eintrittsintensitäten bzw. Abnahmeintensitäten, so besteht, falls $L(x,t) \neq 0$, die Beziehung

$$ \nu(x,t) = \mu(x,t) - \mu_L(x,t). \tag{1} $$

Die Eintrittsfunktion selbst ist gegeben durch

$$ N(x,t) = L'_x(x,t) + L'_t(x,t) + L(x,t)\,\mu(x,t), $$

oder für $L(x,t) \neq 0$, durch

$$ N(x,t) = L(x,t)\,[\mu(x,t) - \mu_L(x,t)]. \tag{2} $$

---

[1]) Siehe *P. Thullen*, loc. cit.

Da $N(x,t) \geqq 0$, ist die Bedingung

$$L'_x(x,t) + L'_t(x,t) + L(x,t)\,\mu(x,t) \geqq 0\,, \tag{3}$$

oder, falls $L(x,t) \neq 0$, die Bedingung:

$$\mu_L(x,t) \leqq \mu(x,t) \tag{3a}$$

notwendig, damit (bei vorgegebenen Ausscheideintensitäten) $L(x,t)$ eine Bevölkerungsfunktion sei.

Es soll nun gezeigt werden, dass die Bedingung (3) auch hinreichend ist, d.h. dass eine beliebige, in $[x_1,x_2]$, $[t_1,t_2]$ differentiierbare und nicht negative Funktion $L(x,t)$, welche dort der Bedingung (3) genügt, in den gegebenen Intervallen eine geeignet konstruierte Bevölkerung darstellt.

Hierzu beachten wir, dass die Anfangspunkte der Generationslinien, soweit sie dem Alters-Zeit-Bereich $\{x_1 \leqq x \leqq x_2,\ t_1 \leqq t \leqq t_2\}$ angehören, auf den beiden Grenzlinien $\{x_1 \leqq x \leqq x_2,\ t = t_1\}$ und $\{x = x_1,\ t_1 \leqq t \leqq t_2\}$ liegen. Wählen wir dann als Eintrittsfunktion

$$N(x,t) = L'_x(x,t) + L'_t(x,t) + L(x,t)\,\mu(x,t) \geqq 0\,,$$

und gehen zugleich von den auf jenen Grenzlinien gegebenen Werten der Funktion $L(x,t)$ aus, so erhalten wir eine Bevölkerung $\tilde{L}(x,t)$, die durch folgende Gleichungen definiert ist [1]):

a) $\tau = t - x \leqq t_1 - x_1$ (die Bevölkerung $\tilde{L}(x,t)$ enthält Überlebende der Anfangsgesamtheit $L(x,t_1)$):

$$\tilde{L}(x,t) = L(x-t+t_1,t_1)\,\frac{l(x,t)}{l(x-t+t_1,t_1)} + \int\limits_{x-t+t_1}^{x} N(\xi,\xi+t-x)\,\frac{l(x,t)}{l(\xi,\xi+t-x)}\,d\xi\,,$$

---

[1]) Wenn man voraussetzt – wie Verf. das in der vorher zitierten Arbeit getan hat –, dass alle Eintritte in die Bevölkerung sich auf das Altersintervall $[x_1,x_2]$ beschränken und dass die Bevölkerung $L(x,t)$ sich nur aus Überlebenden dieser Eintritte und den einer eventuell vorhandenen Anfangsgesamtheit $L(x,t_1)$, $x_1 \leqq x \leqq x_2$, zusammensetzt, so muss unter der Voraussetzung der Stetigkeit von $N(x,t)$ und $L(x,t)$ die Bevölkerungsfunktion $L(x,t)$ auf der ganzen Grenzlinie $x = x_1$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, verschwinden. In vorliegender Arbeit gehen wir von einer allgemeineren Voraussetzung aus und lassen auf $x = x_1$ auch nicht verschwindende «Anfangskontingente» der dort beginnenden Generationen zu. Dies hat zur Folge, dass bei einer in $[x_1,x_2]$, $[t_1,t_2]$ vorgegebenen Bevölkerung auch jede über einem Teilintervall $[x',x'']$, $x_1 \leqq x' < x'' \leqq x_2$, gelegene Teilbevölkerung eine die allgemeinere Voraussetzung erfüllende Bevölkerung ist.

Sämtliche in jener früheren Arbeit bewiesenen Aussagen gelten, mutatis mutandi, auch für den allgemeineren Bevölkerungsbegriff.

oder ($\tau = t - x$):

$$\tilde{L}(x,t) = {}^{\tau}\tilde{L}(x) = {}^{\tau}L(t_1 - \tau)\,\frac{{}^{\tau}l(x)}{{}^{\tau}l(t_1 - \tau)} + \int_{t_1-\tau}^{x} {}^{\tau}N(\xi)\,\frac{{}^{\tau}l(x)}{{}^{\tau}l(\xi)}\,d\xi\,.$$

b) $\tau = t - x \geqq t_1 - x_1$:

$$\tilde{L}(x,t) = {}^{\tau}\tilde{L}(x) = {}^{\tau}L(x_1)\,\frac{{}^{\tau}l(x)}{{}^{\tau}l(x_1)} + \int_{x_1}^{x} {}^{\tau}N(\xi)\,\frac{{}^{\tau}l(x)}{{}^{\tau}l(\xi)}\,d\xi\,.$$

Wir wollen beweisen, dass $\tilde{L}(x,t) \equiv L(x,t)$.

Zunächst gilt überall in $[x_1,x_2]$, $[t_1,t_2]$, ($\tau = t - x$): [1])

$${}^{\tau}\tilde{L}'(x) - {}^{\tau}\tilde{L}(x)\,\frac{{}^{\tau}l'(x)}{{}^{\tau}l(x)} = {}^{\tau}N(x) = {}^{\tau}L'(x) - {}^{\tau}L(x)\,\frac{{}^{\tau}l'(x)}{{}^{\tau}l(x)}\,.$$

Bildet man daher die Differenz:

$$f(x,t) = \tilde{L}(x,t) - L(x,t) = {}^{\tau}f(x) = {}^{\tau}\tilde{L}(x) - {}^{\tau}L(x),\ \tau = t - x,$$

so genügt ${}^{\tau}f(x)$ längs jeder Generationslinie der Differentialgleichung:

$${}^{\tau}f'(x) - {}^{\tau}f(x)\,\frac{{}^{\tau}l'(x)}{{}^{\tau}l(x)} \equiv 0\,.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$${}^{\tau}f(x) = {}^{\tau}l(x)\,A(\tau)\,,$$

wobei $A(\tau) = A(t - x)$ eine nur von $\tau = t - x$ abhängige Grösse ist.

Es ist nun $\tilde{L}(x,t) = L(x,t)$ – und demnach ${}^{\tau}f(x) = 0$ – in allen auf den Grenzlinien $\{x_1 \leqq x < x_2,\ t = t_1\}$ und $\{x = x_1,\ t_1 \leqq t \leqq t_2\}$ liegenden Anfangspunkten der Generationslinien $\tau = t - x$. Da in diesen Punkten ${}^{\tau}l(x) \neq 0$, muss $A(\tau)$ in denselben und damit auf dem vollen Stück jeder Generationslinie, soweit es in $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$ verläuft, verschwinden und daher dort auch ${}^{\tau}f(x) = 0$ sein. Da dies für alle zulässigen τ gilt, ist $\tilde{L}(x,t) \equiv L(x,t)$ in ganz $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, w.z.b.w.

Zusammenfassend gilt

Satz 2. Bedeuten $L(x,t)$ die Funktion der Altersverteilung einer in $[x_1,x_2]$, $[t_1,t_2]$ definierten Bevölkerung und $\mu(x,t)$ die zugrunde liegende Ausscheideintensität, so ist überall:

$$L'_x(x,t) + L'_t(x,t) + L(x,t)\,\mu(x,t) \geqq 0\,, \tag{3}$$

oder, falls $L(x,t) \neq 0$:

$$\mu_L(x,t) \leqq \mu(x,t)\,. \tag{3a}$$

[1]) Hierzu siehe auch Seite 191.

Erfüllt umgekehrt eine beliebige, in $[x_1,x_2]$, $[t_1,t_2]$ *differentiierbare und nicht negative Funktion* $L(x,t)$ *die Ungleichung* (3) *(unter Zugrundelegung fest gegebener Ausscheideintensitäten* $\mu(x,t)$*), so stellt* $L(x,t)$ *dort eine geeignet konstruierte Bevölkerung dar.*

Es interessiert zu wissen, dass unter der Voraussetzung der Differentiierbarkeit die Bedingung (3) mit der elementaren, jedoch als Kriterium schwer zu verwendenden Bedingung

$$L(x+h,t+h)-L(x,t)\,\frac{l(x+h,t+h)}{l(x,t)} \geqq 0,$$

$$h>0,\ x_1 \leqq x < x+h \leqq x_2,\ t_1 \leqq t < t+h \leqq t_2$$

äquivalent ist, so dass also auch diese *Bedingung notwendig und hinreichend ist, damit* $L(x,t)$ *eine zulässige Bevölkerungsfunktion des Alters* x *und der Zeit* t *sei* (bei fest gegebenem $l(x,t)$).

§ 3 Sonderfall von der Zeit t unabhängiger Intensitäten und ein Satz über stabile Bevölkerungen

Wir wollen den Fall untersuchen, in welchem beide Intensitätsfunktionen $\nu(x,t)$ und $\mu(x,t)$ – und damit nach Satz 1 auch $\mu_L(x,t)$ – nur vom Alter x, nicht aber von der Zeit t abhängen; es sei also insbesondere eine einfache Überlebensordnung $l(x) = l_x$ zugrunde gelegt.

Die Voraussetzung, angewandt auf eine gegebene Bevölkerungsfunktion $L(x,t) = {}^{\tau}L(x)$, $(\tau = t-x)$, ergibt:

$$-\frac{d}{dx}\ln {}^{\tau}L(x) = \mu_L(x)$$

und damit, dass

$${}^{\tau}L(x) = L(x,t) = \Phi(\tau)\,h(x).$$

Dies besagt, dass je zwei Generationen ${}^{\tau_1}L(x)$ und ${}^{\tau_2}L(x)$ über einem gemeinsamen Altersintervall (x',x'') die gleiche relative Altersverteilung haben. Eine derartige Bevölkerung ist nicht mit einer relativ stationären zu verwechseln, in welcher die Gesamtheiten der *gleichzeitig Lebenden* dieselbe relative Altersverteilung besitzen. Allerdings besteht zwischen den beiden Klassen von Bevölkerungen ein gewisser Zusammenhang, den wir im folgenden aufweisen werden.

Die relative Gleichverteilung nach Alter auf den Generationslinien ist, soweit es sich um relativ stationäre Bevölkerungen handelt, charakteristisch für die stabilen Bevölkerungen. Eine solche lässt sich in einer «verallgemeinerten geometrischen» Normalform darstellen [1]:

$$\Lambda(x,t) = e^{\varrho(t-t_1)}\, l_x\, e^{-\varrho x}\, g(x) = e^{\varrho(\tau-t_1)}\, l_x\, g(x)\,, \qquad \tau = t - x\,,$$

wobei $g(x)$ eine nirgends abnehmende Funktion ist. Hieraus folgt unmittelbar, dass neben der Unveränderlichkeit der relativen Altersverteilung der gleichzeitig Lebenden auch die relative Altersverteilung der Gesamtheiten gleichzeitig Geborener – soweit sie im Gebiete $[x_1,x_2]$, $[t_1,t_2]$ verlaufen – konstant ist. Umgekehrt ist leicht zu sehen, dass eine Bevölkerung mit dieser zweifachen Eigenschaft, d.h. eine Bevölkerung $\Lambda(x,t)$, die in dem gegebenen Alters- bzw. Zeitintervall der Doppelgleichung ($\tau = t - x$):

$$\Lambda(x,t) = \Phi(\tau)\, h(x) = \varphi(t)\, L(x,t_1)$$

genügt, notwendig stabil ist. Hierzu genügt sogar die schwächere Voraussetzung, dass $\Lambda(x,t)$ in $[x_1,x_2]$, $[t_1,t_2]$ relativ stationär sei (also $\Lambda(x,t) = \varphi(t)\; L(x,t_1)$) und die Gleichung $\Lambda(x,t) = \Phi(\tau)\, h(x)$ in einem festen, aber beliebig kleinen Teilintervall $[x',x'']$, $x_1 \leqq x' < x'' \leqq x_2$ und für alle t, $t_1 \leqq t \leqq t_2$ erfülle. In der Tat besteht dann zwischen $\varphi(t)$ und $\Phi(\tau) = \Phi(t-x)$ eine Beziehung vom Typus:

$$\varphi(t)\, f(x) = \Phi(t-x)\,, \quad x' \leqq x \leqq x'', \quad t_1 \leqq t \leqq t_2\,.$$

Differentiiert man beide Seiten auf einer Generationslinie nach dem Parameter x ($x = x$, $t = \tau + x$, $\tau = \text{const.}$), so erhält man:

$$\varphi(t)\, f'(x) + \varphi'(t)\, f(x) = 0\,.$$

Falls weder $\varphi(t)$ noch $f(x)$ identisch verschwinden, ist dies nur möglich, wenn

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = -\frac{f'(x)}{f(x)} = \text{const.} = \varrho$$

also insbesondere, wenn

$$\varphi(t) = e^{\varrho(t-t_1)},$$

d.h. wenn $\Lambda(x,t)$ eine stabile Bevölkerung ist.

---

[1]) Siehe *P. Thullen*, loc. cit.

Es wurde demnach der folgende Satz bewiesen:

Satz 2. Ist die Bevölkerung $\Lambda(x,t)$ in $[x_1,x_2]$, $[t_1,t_2]$ relativ stationär [1]) *und ist ausserdem die Eintrittsintensität in einem festen, sonst aber beliebig kleinen Teilintervall $[x',x'']$ von $[x_1,x_2]$ für alle t, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, eine reine Funktion von x, so ist $\Lambda(x,t)$ stabil in ganz $[x_1,x_2]$, $[t_1,t_2]$.*

Dieses Ergebnis ist eine Erweiterung eines für den Sonderfall einer in $[x',x'']$ identisch verschwindenden Eintrittsintensität bereits bekannten Satzes [2]).

Es sei noch bemerkt, dass die einer stabilen Bevölkerung

$$\Lambda(x,t) = e^{\varrho(t-t_1)}\, l_x\, e^{-\varrho x}\, g(x)\,, \quad g'(x) \geqq 0\,,$$

zugeordneten Intensitäten durch folgende Ausdrücke gegeben sind:

a) Intensität des Abnehmens:

$$\mu_\Lambda(x,t) = \mu_\Lambda(x) = -\frac{\Lambda'_x + \Lambda'_t}{\Lambda} = -\frac{l'_x}{l_x} - \frac{g'(x)}{g(x)}\,.$$

Im übrigen erinnern wir, dass die Wachstumsintensität von $\Lambda(x,t)$ in Richtung der Zeitachse durch ϱ gegeben ist.

b) Eintrittsintensität: Da $\mu_x = -\dfrac{l'_x}{l_x}$, ergibt sich nach Satz 1:

$$\nu(x,t) = \nu(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \geqq 0\,.$$

§ 4 Die stabile Infrastruktur einer relativ stationären Bevölkerung

Im vorliegenden Abschnitt legen wir wieder eine einfache Überlebensordnung l_x zugrunde, da nur so der relative Beharrungszustand oder die «Stabilität» einer Bevölkerung einen unmittelbaren Sinn haben. Die Eintrittsintensitäten der vorkommenden Bevölkerungen – soweit diese nicht stabil sind – mögen jedoch im Prinzip von x und t abhängen. Wenn mehrere Bevölkerungen miteinander in Verbindung gesetzt werden, so soll die zugrunde liegende Überlebensordnung für alle dieselbe sein.

---

[1]) Für eine relativ stationäre Bevölkerung setzen wir stets $\mu(x,t) \equiv \mu_x$ voraus.
[2]) Siehe *P. Thullen*, loc. cit.

Vorgegeben sei eine in $[x_1,x_2]$, $[t_1,t_2]$ relativ stationäre Bevölkerung $L(x,t)$. Nach Definition ist:

$$L(x,t) = \varphi(t)\, L(x,t_1)\,.$$

Es ist $L(x,t) \neq 0$ in ganz (x_1,x_2), es sei denn, $L(x,t)$ verschwände identisch über einem Teilintervall $[x_1,\bar{x}_1]$, wobei dann das Intervall $[\bar{x}_1,x_2]$ zu Grunde gelegt werde. Wir nehmen ferner an, dass die Wachstumsintensität in Richtung der t-Achse, $\varrho(t) = \dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$, in $[x_1,x_2]$ beschränkt sei.

Es geht uns zunächst darum, eine explizite Darstellung von $L(x,t_1)$ zu erhalten. Hierzu machen wir den Ansatz:

$$L(x,t_1) = l_x\, e^{-\varrho x}\, g(x)\,, \qquad g(x) \geqq 0\,,$$

wobei – wie bei einer stabilen Bevölkerung – die Funktion $g(x)$ so bestimmt werden soll, dass sie in $[x_1,x_2]$ nirgends abnehme. Um zu zeigen, dass dies möglich ist, differentiieren wir den Logarithmus beider Seiten nach x und erhalten:

$$\frac{L'_x(x,t_1)}{L(x,t_1)} - \frac{l'_x}{l_x} + \varrho = \frac{g'(x)}{g(x)}\,.$$

Die Ableitung $g'(x)$ ist überall in $[x_1,x_2]$ grösser oder gleich Null (und damit $g(x)$ nirgends abnehmend), falls ϱ so gewählt wird, dass

$$\frac{L'_x(x,t_1)}{L(x,t_1)} - \frac{l'_x}{l_x} + \varrho \geqq 0\,, \qquad x_1 \leqq x \leqq x_2\,.$$

Dies ist stets möglich, wenn $\dfrac{L'_x(x,t_1)}{L(x,t_1)} - \dfrac{l'_x}{l_x}$ in $[x_1,x_2]$ nach unten beschränkt ist. Da nun nach Satz 1

$$-\mu_L(x,t) = \frac{L'_x + L'_t}{L} = \frac{L'_x}{L} + \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \geqq -\mu_x = \frac{l'_x}{l_x}$$

sein muss, ist

$$\frac{L'_x}{L} - \frac{l'_x}{l_x} \geqq -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = -\varrho(t)\,,$$

d.h. gemäss der über $\varrho(t)$ gemachten Voraussetzung ist die linke Seite nach unten beschränkt, und zwar im abgeschlossenen $[x_1,x_2]$. Obige Bedingung ist daher erfüllt und somit stets ein konstantes ϱ mit der gewünschten Eigenschaft bestimmbar.

Für eine gegebene relativ stationäre Bevölkerung kann ϱ innerhalb gewisser Grenzen beliebig gewählt werden. Unter den zulässigen Werten von ϱ gibt es ein *kleinstes* $\bar{\varrho}$, und zwar ist $\bar{\varrho}$ gleich der oberen Grenze von $-\left[\frac{L'_x}{L} - \frac{l'_x}{l_x}\right]$ in $[x_1,x_2]$. Da andererseits

$$-\left[\frac{L'_x}{L} - \frac{l'_x}{l_x}\right] \leqq \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \varrho(t)\,,$$

gilt zugleich:

$$\varrho(t) \geqq \bar{\varrho}\,, \qquad t_1 \leqq t \leqq t_2\,.$$

$\bar{\varrho}$ hängt nur von der Altersstruktur der Bevölkerung ab und ist dasselbe für sämtliche relativ stationären Bevölkerungen, die innerhalb $[x_1,x_2]$, $[t_1,t_2]$ die gleiche Altersstruktur besitzen. In der Tat, ist $L(x,t)$ die Funktion einer zweiten in $[x_1,x_2]$, $[t_1,t_2]$ definierten relativ stationären Bevölkerung der gegebenen Altersstruktur, so ist $\tilde{L}(x,t) = \psi(t)\,L(x,t)$ und daher

$$-\left[\frac{\tilde{L}'_x(x,t)}{\tilde{L}(x,t)} - \frac{l'_x}{l_x}\right] = -\left[\frac{L'_x(x,t)}{L(x,t)} - \frac{l'_x}{l_x}\right],$$

so dass beide Seiten dieselbe obere Grenze $\bar{\varrho}$ besitzen. Bezeichnet schliesslich $\bar{\Lambda} = e^{\bar{\varrho}(t-t_1)}\,l_x\,e^{-\bar{\varrho}x}\,\bar{g}(x)$ eine zu $\bar{\varrho}$ gehörige stabile Bevölkerung mit der gegebenen Altersstruktur, so lässt sich leicht beweisen dass

$$\varrho(t) - \bar{\varrho} = -\mu_L(x,t) + \mu_{\bar{\Lambda}}(x,t)\,, \tag{4}$$

so dass also die Beziehung $\varrho(t) \geqq \bar{\varrho}$ auch $-\mu_L \geqq -\mu_{\bar{\Lambda}}$ zur Folge hat.

Zusammenfassend gilt:

Satz 4. Zur Klasse aller in $[x_1,x_2]$, $[t_1,t_2]$ relativ stationären Bevölkerungen gleicher Altersstruktur gibt es stets eine der Klasse angehörige stabile Bevölkerung:

$$\bar{\Lambda}(x,t) = e^{\bar{\varrho}(t-t_1)}\,l_x\,e^{-\bar{\varrho}x}\,\bar{g}(x)\,, \tag{5}$$

so dass die Wachstumsintensität irgendeiner Bevölkerung der Klasse in jedem Zeitpunkt t aus $[t_1,t_2]$ grösser oder gleich der Wachstumsintensität von $\bar{\Lambda}(x,t)$ ist; hierbei kann die Wachstumsintensität sowohl auf die Zeitachse wie auf die Generationslinien bezogen werden.

Wir nennen $\bar{\Lambda}(x,t)$ die *stabile Infrastruktur der Klasse;* sie ist bis auf einen konstanten multiplikativen Faktor eindeutig bestimmt.

Zugleich mit Satz 3 wurde folgendes bewiesen:

Folgerung 1. Die Funktion $L(x,t)$ der Altersverteilung einer relativ stationären Bevölkerung lässt sich stets in der Form:

$$L(x,t) = \varphi(t)\, l_x\, e^{-\varrho x}\, g(x)\,, \quad x_1 \leqq x \leqq x_2,\ t_1 \leqq t \leqq t_2,$$

schreiben, wobei $g(x)$ eine nicht negative, nirgends abnehmende Funktion ist. ϱ kann beliebig grösser oder gleich $\bar{\varrho}$ gewählt werden (mit dem entsprechenden $g(x)$).

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, dass die zur Infrastruktur $\bar{\Lambda}(x,t)$ gehörige Eintrittsintensität

$$\bar{\nu}(x) = \frac{\bar{g}'(x)}{\bar{g}(x)} = \frac{\bar{\Lambda}'_x(x,t)}{\bar{\Lambda}(x,t)} - \frac{l'_x}{l_x} + \bar{\varrho}$$

sich dadurch auszeichnet, dass ihre *untere Grenze gleich Null ist.* Ist umgekehrt bei einer stabilen Bevölkerung die untere Grenze der Eintrittsintensität gleich Null, so handelt es sich stets um die Infrastruktur der zugehörigen Klasse relativ stationärer Bevölkerungen.

Bezeichnet man mit $\nu(x,t)$ und $\bar{\nu}(x,t)$ die zu $L(x,t)$ bzw. $\bar{\Lambda}(x,t)$ gehörige Eintrittsintensität, so ist nach Satz 1

$$\nu(x,t) = \bar{\nu}(x,t) - \mu_L(x,t) + \mu_{\bar{\Lambda}}(x,t)$$

und es ergibt sich auf Grund von (4):

Folgerung 2. Die Eintrittsintensität einer relativ stationären Bevölkerung $L(x,t)$ ist gleich der Eintrittsintensität der zugehörigen stabilen Infrastruktur $\bar{\Lambda}(x,t)$ vermehrt um die Differenz der Wachstumsintensitäten in Richtung der Zeitachse:

$$\nu(x,t) = \bar{\nu}(x,t) + \varrho(t) - \bar{\varrho}\,.$$

Es sei noch auf eine letzte Tatsache hingewiesen: die in Satz 3 enthaltene Aussage besagt unter anderm, dass *der Auswahl der Zeitfunktion $\varphi(t)$, die zu einer relativ stationären Bevölkerung $L(x,t) = \varphi(t)\, L(x,t_1)$ von gegebener Altersstruktur gehört, bestimmte Grenzen gezogen sind.* Es muss $\varrho(t) = \dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \geqq \bar{\varrho}$ sein, wobei – wie schon gesagt – die Intensität $\bar{\varrho}$ der stabilen Infrastruktur unabhängig von t und eindeutig durch die

gegebene Altersstruktur bestimmt ist. Falls insbesondere $\bar{\varrho} \geqq 0$, muss $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \geqq 0$ und damit auch $\varphi'(t) \geqq 0$ sein, d. h. $\varphi(t)$ selbst ist dann eine nirgends abnehmende Funktion. Andererseits ist jene Bedingung: $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \geqq \bar{\varrho}$ die einzige, welcher die positive Funktion $\varphi(t)$ genügen muss.

Résumé

Se basant sur les taux instantanés de mortalité à deux dimensions $\mu(x,t)$, l'auteur construit entre ceux-ci et les taux instantanés d'entrée $\nu(x,t)$ et d'élimination $\mu_L(x,t)$ d'une population donnée $L(x,t)$ la relation simple $\nu(x,t) = \mu(x,t) - \mu_L(x,t)$. En outre il démontre l'existence d'une infrastructure stable pour une population donnée et relativement stationnaire et il renforce de façon importante un critère déjà connu pour une population stable.

Summary

Taking bidimensional forces of mortality $\mu(x,t)$ as a base one can establish between these and both forces of entrance and of elimination, i.e. $\nu(x,t)$, resp. $\mu_L(x,t)$ for a given population $L(x,t)$ the simple relation $\nu(x,t) = \mu(x,t) - \mu_L(x,t)$. Further the existence of a steady infrastructure for a given and relatively stationary population is proved and a known criterion for a steady population is substantially enhanced.

Riassunto

Basandosi sui tassi istantanei bidimensionali di mortalità $\mu(x,t)$, l'autore costruisce fra questi e i tassi istantanei d'entrata $\nu(x,t)$ e di eliminazione $\mu_L(x,t)$ di una data popolazione $L(x,t)$ la semplice relazione $\nu(x,t) = \mu(x,t) - \mu_L(x,t)$. Inoltre dimostra l'esistenza di una infrastruttura stabile per una data popolazione relativamente stazionaria e rinforza sostanzialmente un criterio noto per una popolazione stabile.