Renditenbestimmung mittels hyperbolischer Interpolation

Autor(en): **Jecklin, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **60 (1960)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966787

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Renditenbestimmung mittels hyperbolischer Interpolation

Von H. Jecklin, Zürich

Zusammenfassung

Die hyperbolische Interpolation ermöglicht bei geeigneter Wahl der Interpolationsfixpunkte, die Rendite von Anleihen mit für die Praxis hinreichender Genauigkeit auf einfache Art zu berechnen. Das Verfahren ist für Zinsen-, Raten- und Annuitätenschulden gleichermassen anwendbar.

Für die näherungsweise Bestimmung der Rendite von Anleihen die auf einen bestimmten Zeitpunkt zu pari rückzahlbar sind (Kassa-Obligationen, Zinsen-Schuld) kann man bei jährlicher Verzinsung folgende Arbeitsformel benutzen:

$$i' \sim \frac{i_0}{c} + \frac{1-c}{n}. \tag{1}$$

Dabei bedeuten: i_0 = nomineller Zinsfuss,
i' = approx. Rendite,
n = Laufzeit,
c = Kurs, bezogen auf 1 als Parität.

Auf diese bekannte Arbeitsformel wird in Lehrbüchern meist nur kurz hingewiesen [1] [1]), ohne dass über die Güte der Näherung etwas ausgesagt wird. Eine Untersuchung in dieser Richtung hat letzthin J. Chuard unternommen [2], wobei sich gezeigt hat, dass der Fehler gegenüber dem genauen Renditenwert, namentlich bei niedrigem Kurs und längerer Dauer, doch grösser ist, als man vielleicht anzunehmen geneigt wäre.

---

[1]) Literaturangaben am Schlusse dieser Arbeit.

Abgesehen von der klassischen Methode der Iteration gibt es noch eine Anzahl anderer Verfahren, um die Rendite in guter Näherung zu erhalten [3]. Die obige Arbeitsformel hat gegenüber diesen, im allgemeinen bessere Resultate liefernden Methoden den Vorteil grosser Einfachheit und leichter Handhabung.

Es dürfte jedoch kaum bekannt sein, dass mittels hyperbolischer Interpolation in ganz einfacher Weise sehr gute Näherungswerte für die Rendite erhalten werden können. Dieses Prozedere hat zudem den Vorteil, dass es gleicherweise für Zinsen-, Raten- und Annuitäten-Schuld Anwendung finden kann.

Betrachten wir vorerst die Zinsenschuld. Hier lautet die Bestimmungsgleichung für die Rendite i bei ganzjähriger Verzinsung bekanntlich

$$i = i_0 + \frac{1-c}{a_{\overline{n}|(i)}}. \tag{2}$$

Wir setzen nun anstelle von i einen variablen Zinsfuss i' und betrachten die Funktion

$$y = i_0 - i' + \frac{1-c}{a_{\overline{n}|(i')}}. \tag{3}$$

Für $i' = i$ ist $y = 0$, und wenn wir zu drei Argumenten $i'_k \neq i$ die zugehörigen Funktionswerte $y_k \neq 0$ kennen, so können wir das zu $y = 0$ gehörige Argument i durch hyperbolische Interpolation bestimmen. Hiezu haben wir auszugehen vom Doppelverhältnis [4]

$$\frac{(i'_4 - i'_1)(i'_3 - i'_2)}{(i'_4 - i'_3)(i'_2 - i'_1)} = \frac{(y_4 - y_1)(y_3 - y_2)}{(y_4 - y_3)(y_2 - y_1)}. \tag{4}$$

Nun kann man leicht für i'_k, $k = 1, 2, 3$, eine praktische Wahl treffen, so dass sich die Festlegung der drei Werte y_k, $k = 1, 2, 3$, besonders einfach gestaltet. Wir halten sodann fest, dass der zum Argument $i'_4 = i$ zugehörige Funktionswert $y_4 = y$ null ist. Des weitern setzt man

$$\begin{aligned} i'_1 &= 0, \text{ dann ist } y_1 = i_0 + \frac{1-c}{n}, \\ i'_2 &= i_0, \text{ dann ist } y_2 = \frac{1-c}{a_{\overline{n}|(i_0)}}, \\ i'_3 &\sim \frac{i_0}{c}, \text{ dann ist } y_3 = i_0 - i'_3 + \frac{1-c}{a_{\overline{n}|(i'_3)}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Bezüglich des Arguments i_3' sucht man in einer Tabelle der Rentenbarwerte oder ihrer Reziproken das zum Wert $\frac{i_0}{c}$ nächstgelegene vorhandene Argument und benutzt dieses als i_3'. Setzen wir nun noch

$$i_3' - i_2' = i_3' - i_0 = d, \quad y_1 - y_2 = \Delta_1, \quad y_3 - y_2 = \Delta_2,$$

so hat man, da $i_1' = 0$ und $y_4 = 0$, für $i_4' = i$ durch Auflösen des Doppelverhältnisses nach diesem Argument die Interpolationsformel

$$i = \frac{i_0 i_3' y_1 \Delta_2}{i_0 y_1 \Delta_2 - d\, y_3 \Delta_1}. \tag{6}$$

Die Formel ist anwendbar, gleichgültig ob $c < 1$ oder $c > 1$.

Beispiel:

$$i_0 = 3\,\%, \qquad n = 20, \qquad c = 0{,}80.$$

$$\begin{array}{lll} i_1' = 0 & y_1 = 4\,\% & d = \frac{3}{4}\,\% \\ i_2' = 3\,\% & y_2 = 1{,}34\,431\,\% & \Delta_1 = 2{,}65\,569\,\% \\ i_3' = 3\frac{3}{4}\,\% & y_3 = 0{,}68\,924\,\% & \Delta_2 = 0{,}65\,507\,\%. \end{array}$$

Einsetzen dieser Werte in Formel (6) und Ausrechnung ergibt

$$i = \frac{29{,}47\,815}{6{,}48\,804}\,\% = 4{,}543\,\%.$$

Auf dem Wege der Iteration mit mehrfacher linearer Interpolation erhält man genau den gleichen Wert.

$$i_0 = 4\,\%, \qquad n = 20, \qquad c = 1{,}20.$$

$$\begin{array}{lll} i_1' = 0 & y_1 = 3\,\% & d = -\frac{2}{3}\,\% \\ i_2' = 4\,\% & y_2 = -1{,}471\,635\,\% & \Delta_1 = 4{,}471\,635\,\% \\ i_3' = 3\frac{1}{3}\,\% & y_3 = -0{,}719\,416\,\% & \Delta_2 = -0{,}752\,219\,\%, \end{array}$$

$$i = \frac{30{,}088\,757}{11{,}171\,273}\,\% = 2{,}693\,\%,$$

wiederum in Übereinstimmung mit dem durch Iteration gewonnenen Resultat.

Gehen wir nun zur Ratenschuld (Serienanleihe) über, so lautet die Bestimmungsgleichung für die Rendite bekanntlich

$$i = i_0 + (1-c)\frac{ni}{n - a_{\overline{n}|(i)}}, \tag{7}$$

und wir benutzen daher zur Interpolation die Funktion

$$y = i_0 - i' + (1-c)\frac{ni'}{n - a_{\overline{n}|(i')}}. \tag{8}$$

Wenn wir nun analog vorgehen wollen wie bei der Zinsenschuld, so ergibt sich zunächst eine scheinbare Schwierigkeit, denn wenn wir in Gleichung (8) für i' null setzen, so folgt

$$y_1 = i_0 + (1-c)\frac{0}{0},$$

also ein unbestimmter Ausdruck. Schreiben wir jedoch den zweiten Term der rechten Seite von (8) in der Gestalt

$$(1-c)\frac{ni'}{n - \sum\limits_1^n (1+i')^{-t}},$$

und differenzieren nach der Regel von de l'Hospital Zähler und Nenner je für sich, so ergibt dies

$$(1-c)\frac{n}{\sum\limits_1^n t(1+i)^{-t-1}},$$

und wenn wir nun hier $i' = 0$ setzen, so folgt

$$(1-c)\frac{n}{\sum t} = (1-c)\frac{2}{n+1}.$$

Dies ist insofern auch einleuchtend, als wir ja die Ratenschuld uns zusammengesetzt denken können aus n Zinsenschulden in Höhe von $\frac{1}{n}$ des Pariwertes und den Dauern $t = 1, 2, \ldots, n$. Gilt bei der Zinsenschuld gemäss (5) für $i' = 0$

$$y_1 = i_0 + \frac{1-c}{n},$$

so muss also bei der Ratenschuld gelten

$$y_1 = i_0 + \frac{1-c}{\frac{1}{n}\sum t} = i_0 + (1-c)\frac{2}{n+1}.$$

Wenn wir nach diesem Exkurs die Interpolationspunkte für die Renditenbestimmung der Ratenschuld analog ansetzen wie bei der Zinsenschuld, so haben wir

$$
\begin{aligned}
i_1' &= 0\,, \quad \text{mit} \quad y_1 = i_0 + (1-c)\,\frac{2}{n+1}\,,\\
i_2' &= i_0\,, \quad \text{mit} \quad y_2 = (1-c)\,\frac{n\,i_0}{n - a_{\overline{n}|(i_0)}}\,,\\
i_3' &\sim \frac{i_0}{c}\,, \quad \text{mit} \quad y_3 = i_0 - i_3' + (1-c)\,\frac{n\,i_3'}{n - a_{\overline{n}|(i_3')}}\,,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

und man kann mit diesen Werten wieder Formel (6) zur Anwendung bringen.

Beispiel: $i_0 = 3\,\%$, $n = 20$, $c = 0{,}80$.

$$
\begin{aligned}
i_1' &= 0 & y_1 &= 4{,}90\,476\,\% & d &= \tfrac{3}{4}\,\%\\
i_2' &= 3\,\% & y_2 &= 2{,}34\,259\,\% & \Delta_1 &= 2{,}56\,217\,\%\\
i_3' &= 3\tfrac{3}{4}\,\% & y_3 &= 1{,}70\,748\,\% & \Delta_2 &= 0{,}63\,511\,\%\,,
\end{aligned}
$$

$$
i = \frac{35{,}04\,445}{6{,}06\,405}\,\% = 5{,}779\,\%\,.
$$

Auch dieser Wert stimmt mit dem durch Iteration ermittelten überein.

Schliesslich betrachten wir noch die Annuitätenschuld (Tilgungs-Anleihe). Hier hat man die Rendite i zu bestimmen aus der Gleichung

$$
a_{\overline{n}|(i)} = c\,a_{\overline{n}|(i_0)}\,. \tag{10}
$$

Also hat man zum Zwecke der Interpolation die Funktion

$$
y = \frac{a_{\overline{n}|(i)}}{a_{\overline{n}|(i_0)}} - c\,. \tag{11}
$$

Treffen wir wieder für i_k', $k = 1, 2, 3$, die bisherige Argumentenwahl, so haben wir als Interpolationspositionen

$$
\begin{aligned}
i_1' &= 0\,, \quad \text{mit} \quad y_1 = \frac{n}{a_{\overline{n}|(i_0)}} - c\,,\\
i_2' &= i_0\,, \quad \text{mit} \quad y_2 = 1 - c\,,\\
i_3' &\sim \frac{i_0}{c}\,, \quad \text{mit} \quad y_3 = \frac{a_{\overline{n}|(i_3')}}{a_{\overline{n}|(i_0)}} - c\,.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Auch hier ist Interpolationsformel (6) direkt anwendbar.

Beispiel:

$$i_0 = 3\,\%, \qquad n = 20, \qquad c = 0{,}80.$$

$$\begin{array}{lll} i_1' = 0 & y_1 = 54{,}43\,142\,\% & d = \frac{3}{4}\,\% \\ i_2' = 3\,\% & y_2 = 20\,\% & \Delta_1 = 34{,}43\,142\,\% \\ i_3' = 3\frac{3}{4}\,\% & y_3 = 13{,}40\,432\,\% & \Delta_2 = 6{,}59\,568\,\%, \end{array}$$

$$i = \frac{4\,038{,}8\,876}{730{,}8\,894}\,\% = 5{,}526\,\%,$$

gegenüber einem durch Iteration ermittelten genaueren Wert von 5,549 %.

Es wurde vorstehend nur der Fall ganzjähriger Verzinsung betrachtet. Das Verfahren ist aber mit entsprechender Anpassung auch für unterjährige Verzinsung und Amortisation anwendbar. Sei m die Anzahl der jährlichen Zinsraten von $\frac{i}{m}$ nominell. Für die Zinsenschuld gilt dann bei echter unterjähriger Verzinsung für den Effektivzins i die Bestimmungsgleichung

$$\frac{i}{m} = \frac{i_0}{m} + \frac{1-c}{a_{\overline{nm}|(i/m)}}, \tag{13}$$

oder auch

$$i = i_0 + \frac{m(1-c)}{a_{\overline{nm}|(i/m)}},$$

und als Funktion für die Interpolation hat man dann

$$y = i_0 - i' + \frac{m(1-c)}{a_{\overline{nm}|(i'/m)}}. \tag{14}$$

Somit sind die Interpolationsfixpunkte

$$\begin{aligned} i_1' &= 0, \quad \text{mit} \quad y_1 = i_0 + \frac{1-c}{n}, \\ i_2' &= i_0, \quad \text{mit} \quad y_2 = \frac{m(1-c)}{a_{\overline{nm}|(i_0/m)}}, \\ i_3' &\sim \frac{i_0}{c}, \quad \text{mit} \quad y_3 = i_0 - i_3' + \frac{m(1-c)}{a_{\overline{nm}|(i_3'/m)}} \end{aligned} \tag{15}$$

Die Praxis rechnet jedoch im allgemeinen nicht mit echten unterjährigen Zinsen. Wird innerhalb des Jahres nur einfacher Zins verrechnet, so lautet die *genaue* Barwertformel der nachschüssigen Zeitrente mit unterjähriger Zahlung [5]

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}(1-v^n) = a_{\overline{n}|}\left(1 + i\,\frac{m-1}{2m}\right).$$

Für die Bestimmung der Rendite einer Zinsenschuld hat man dann die Gleichung

$$i = i_0 + \frac{1-c}{a_{\overline{n}|(i)}\left(1 + i\,\dfrac{m-1}{2m}\right)}, \tag{16}$$

und als Funktion zur hyperbolischen Interpolation

$$y = i_0 - i' + \frac{1-c}{a_{\overline{n}|(i')}\left(1 + i'\,\dfrac{m-1}{2m}\right)}. \tag{17}$$

Hieraus haben wir in analoger Weise wie vorhin als Fixpunkte der Interpolation nach Formel (6)

$$\begin{aligned} i_1' &= 0, \quad \text{mit} \quad y_1 = i + \frac{1-c}{n}, \\ i_2' &= i_0, \quad \text{mit} \quad y_2 = \frac{1-c}{a_{\overline{n}|(i_0)}\left(1 + i_0\,\dfrac{m-1}{2m}\right)}, \\ i_3' &\sim \frac{i_0}{c}, \quad \text{mit} \quad y_3 = i_0 - i_3' + \frac{1-c}{a_{\overline{n}|(i_3')}\left(1 + i_3'\,\dfrac{m-1}{2m}\right)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Beispiel: $i_0 = 3\,\%$, $n = 20$, $m = 2$, $c = 0{,}80$.

Echte unterjährige Verzinsung.

$i_1' = 0$	$y_1 = 4\,\%$	$d = \frac{3}{4}\,\%$
$i_2' = 3\,\%$	$y_2 = 1{,}337\,084\,\%$	$\Delta_1 = 2{,}662\,916\,\%$
$i_3' = 3\frac{3}{4}\,\%$	$y_3 = 0{,}680\,365\,\%$	$\Delta_2 = 0{,}656\,719\,\%$,

$$i = \frac{29{,}552\,355}{6{,}521\,812}\,\% = 4{,}531\,\%.$$

Unechte unterjährige Verzinsung.

$$i_1' = 0 \qquad y_1 = 4\,\% \qquad d = \tfrac{3}{4}\,\%$$

$$i_2' = 3\,\% \qquad y_2 = 1{,}334\,307\,\% \qquad \Delta_1 = 2{,}665\,693\,\%$$

$$i_3' = 3\tfrac{3}{4}\,\% \qquad y_3 = 0{,}678\,527\,\% \qquad \Delta_2 = 0{,}655\,780\,\%,$$

$$i = \frac{29{,}510\,100}{6{,}512\,802}\,\% = 4{,}531\,\%.$$

Bezüglich der Ratenschuld und der Annuitätenschuld mit unterjähriger Verzinsung und Tilgung können wir uns nun kurz fassen.

Bei der Ratenschuld dient zur Renditenberechnung bei echter unterjähriger Verzinsung die Gleichung

$$\frac{i}{m} = \frac{i_0}{m} + (1-c)\,\frac{nm\,\dfrac{i}{m}}{nm - a_{\overline{nm}|(i/m)}}, \tag{19}$$

oder

$$i = i_0 + (1-c)\,\frac{nmi}{nm - a_{\overline{nm}|(i/m)}},$$

und die Fixpunkte für Interpolation sind daher

$$\begin{aligned} i_1' &= 0, \quad \text{mit} \quad y_1 = i_0 + (1-c)\,\frac{2m}{nm+1}, \\ i_2' &= i_0, \quad \text{mit} \quad y_2 = (1-c)\,\frac{nm\,i_0}{nm - a_{\overline{nm}|(i_0/m)}}, \\ i_3' &\sim \frac{i_0}{c}, \quad \text{mit} \quad y_3 = i_0 - i_3' + (1-c)\,\frac{nm\,i_3'}{nm - a_{\overline{nm}|(i_3'/m)}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Hat dagegen die Ratenschuld unechte unterjährige Verzinsung, so ist

$$i = i_0 + (1-c)\,\frac{ni}{n - a_{\overline{n}|(i)}\left(1 + i\,\dfrac{m-1}{2m}\right)}, \tag{21}$$

und die Fixpunkte für Interpolation sind

$$i_1' = 0, \quad \text{mit} \quad y_1 = i_0 + (1-c)\frac{2m}{nm+1},$$

$$i_2' = i_0, \quad \text{mit} \quad y_2 = (1-c)\frac{n i_0}{n - a_{\overline{n}|(i_0)}\left(1 + i_0 \frac{m-1}{2m}\right)}, \tag{22}$$

$$i_3' \sim \frac{i_0}{c}, \quad \text{mit} \quad y_3 = i_0 - i_3' + (1-c)\frac{n i_3'}{n - a_{\overline{n}|(i_3')}\left(1 + i_3' \frac{m-1}{2m}\right)},$$

Bei der Annuitätenschuld ist die Bedingungsgleichung zur Renditenbestimmung bei echter unterjähriger Verzinsung

$$c\frac{1}{m} a_{\overline{nm}|(i_0/m)} = \frac{1}{m} a_{\overline{nm}|(i/m)}, \tag{23}$$

woraus als Fixpunkte für die Interpolation

$$\begin{aligned} i_1' &= 0, \quad \text{mit} \quad y_1 = \frac{nm}{a_{\overline{nm}|(i_0/m)}} - c, \\ i_2' &= i_0, \quad \text{mit} \quad y_2 = 1 - c, \\ i_3' &\sim \frac{i_0}{c}, \quad \text{mit} \quad y_3 = \frac{a_{\overline{nm}|(i_3'/m)}}{a_{\overline{nm}|(i_0/m)}} - c. \end{aligned} \tag{24}$$

Bei unechter unterjähriger Verzinsung dagegen gilt

$$c a_{\overline{n}|(i_0)}\left(1 + i_0 \frac{m-1}{2m}\right) = a_{\overline{n}|(i)}\left(1 + i \frac{m-1}{2m}\right), \tag{25}$$

woraus als Fixpunkte für die Interpolation

$$\begin{aligned} i_1' &= 0, \quad \text{mit} \quad y_1 = \frac{n}{a_{\overline{n}|(i_0)}\left(1 + i_0 \frac{m-1}{2m}\right)} - c, \\ i_2' &= i_0, \quad \text{mit} \quad y_2 = 1 - c, \\ i_3' &\sim \frac{i_0}{c}, \quad \text{mit} \quad y_3 = \frac{a_{\overline{n}|(i_3')}\left(1 + i_3' \frac{m-1}{2m}\right)}{a_{\overline{n}|(i_0)}\left(1 + i_0 \frac{m-1}{2m}\right)} - c. \end{aligned} \tag{26}$$

Es gibt Methoden, welche genauere Näherungswerte liefern, als das vorstehend beschriebene Verfahren, so insbesondere die erwähnte Methode von E. Zwinggi [3]. Die hyperbolische Interpolation hat jedoch den Vorteil, dass sie bei amortisierbaren Schulden ebenso einfach ist, wie bei der Zinsenschuld. In letzterem Falle gibt sie zudem ungleich bessere Resultate als Arbeitsformeln der eingangs genannten Art, bei nur wenig erhöhtem Rechenaufwand.

Literaturangaben

[1] Z. B. *E. Kosiol*, Finanzmathematik, Hamburg 1938, S. 115.
M. Nicolas, Finanzmathematik, Berlin 1959, S. 132.

[2] *J. Chuard*, Sur le rendement des Obligations remboursables au pair à échéance fixe. MVSVM Bd. 59, 2.

[3] Vgl. *E. Zwinggi*, Ein Verfahren zur Bestimmung der Rendite von festverzinslichen Anleihen. MVSVM Bd. 54, 1, mit umfangreichem Literaturverzeichnis zum Renditenproblem.

[4] *H. Jecklin* und *H. Zimmermann*, Eine praktische Interpolationsformel, MVSVM Bd. 48, 2.

[5] *W. Friedli*, Approximation und Präzision in der Versicherungslehre, MVSVM Bd. 18, S. 34.

Summary

The hyperbolic interpolation allows to compute the yield of loans as accurately as needed for all practical purposes provided that the fixed points are chosen conveniently. The method can be applied for debts repayable at the end of a fixed period, linearly decreasing debts as well as debts redeemable by annuities.

Résumé

L'interpolation hyperbolique permet, avec un choix judicieux des points fixes, de calculer le rendement des prêts de façon simple et avec une précision suffisante pour la pratique. La méthode est applicable sans autre aux prêts remboursables à terme fixe, aux prêts amortissables par amortissement constant et aux prêts amortissables par amortissement progressif.

Riassunto

L'interpolazione iperbolica permette di calcolare in modo semplice, scegliendo opportunamente i punti fissi, il rendimento dei prestiti con una precisione sufficiente per la pratica. Il metodo è parimenti applicabile ai prestiti rimborsabili a termine fisso, ai prestiti ammortizzabili con ammortamento costante e ai prestiti ammortizzabili con ammortamento progressivo.