Approximation empirischer Verteilungen unter Einsatz elektronischer Rechengeräte

Autor(en): **Riedwil, Hans**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **64 (1964)**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966964

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Approximation empirischer Verteilungen unter Einsatz elektronischer Rechengeräte

Von Hans Riedwil, Bern

Inhaltsverzeichnis

		Seite
0	**Einleitung**	61
1	**Grundsätzliche Erwägungen**	66
11	*Theoretische Verteilung*	66
111	Allgemeine Verteilung	66
112	Standardisierte Verteilung	68
12	*Empirische Verteilung*	69
13	*Theorie der Schätzwerte*	72
131	Problemstellung, Kriterium	72
132	Schätzungsverfahren	73
132.1	Methode der Maximum Likelihood	73
132.11	Schätzen eines Parameters	73
132.12	Schätzen zweier Parameter	74
132.2	Methode der Momente	75
14	*Güte der Anpassung*	75
141	Chiquadrattest	76
142	Kolmogoroff-Test	79
143	Cramér-von Mises-Smirnow-Test	80
144	Anderson-Darling-Test	82
2	**Standardisierte Normalverteilung**	84
3	**Ausgewählte Verteilungen**	87
31	*Normalverteilung*	87
311	Definition, Eigenschaften	87
312	Schätzen der Parameter	89
312.1	Methode der Maximum Likelihood	89
312.2	Methode der Momente	90

Seite

313 Güte der Anpassung ... 91
313.1 Chiquadrattest ... 91
313.2 Kolmogoroff-Test ... 92
313.3 Cramér-von Mises-Smirnow-Test ... 92
313.4 Test der Schiefe und des Exzesses ... 93

32 *Gram-Charlier-Verteilung* ... 95

321 Definition, Eigenschaften ... 95
322 Schätzen der Parameter ... 98
323 Güte der Anpassung ... 98

33 *Edgeworth-Verteilung* ... 98

331 Definition, Eigenschaften ... 98
332 Schätzen der Parameter, Güte der Anpassung ... 100

34 *Lognormalverteilung* ... 101

341 Definition, Eigenschaften ... 101
342 Schätzen der Parameter ... 103
342.1 Methode der Maximum Likelihood ... 103
342.2 Methode der Momente ... 104
343 Güte der Anpassung ... 105
343.1 Chiquadrattest ... 105
343.2 Transformationstests ... 105

35 *Logarithmische Gram-Charlier-Verteilung* ... 106

351 Definition, Eigenschaften ... 106
352 Schätzen der Parameter ... 107
353 Güte der Anpassung ... 107

36 *Logarithmische Edgeworth-Verteilung* ... 108

361 Definition, Eigenschaften ... 108
362 Schätzen der Parameter, Güte der Anpassung ... 109

4 **Einsatz elektronischer Rechengeräte** ... 110

5 **Anhang** ... 111

6 **Literaturnachweis** ... 115

Zusammenfassung

Es werden bestimmte theoretische Verteilungen – die Normalverteilung, die Gram-Charlier-Verteilung, die Edgeworth-Verteilung, die Lognormalverteilung, die logarithmische Gram-Charlier-Verteilung und die logarithmische Edgeworth-Verteilung – untersucht, die unter sich und zur Standardform der Normalverteilung einfache Bindungen aufweisen und die sich für die Approximation empirischer Verteilungen unter Einsatz elektronischer Rechenanlagen eignen.

Für das Schätzen der Parameter werden die Methode der Maximum Likelihood und die Methode der Momente kurz dargelegt.

Zur Beurteilung der Güte der Approximation sind die heute wichtigsten Testverfahren, wie Chiquadrat-Test, Kolmogoroff-Test, Cramér-von Mises-Smirnow-Test und Anderson-Darling-Test, mit den daraus hergeleiteten numerischen Ansätzen zusammengestellt.

0 Einleitung

Ein zufälliges Phänomen lässt sich durch eine Zufallsvariable beschreiben, die ihrerseits durch die *Häufigkeitsfunktion*, die *Verteilungsfunktion*, die *charakteristische Funktion* oder durch die *Momente* gekennzeichnet werden kann. Bezüglich der letzteren begnügt man sich meist mit den ersten vier Momenten und leitet daraus die statistischen Masszahlen *Durchschnitt*, *Streuung*, *Schiefe* und *Exzess* ab.

Sind empirische Verteilungen durch theoretische Verteilungen zu approximieren, so eignet sich hierzu entweder ein System von Häufigkeitsfunktionen, deren allfällige Parameter zu den statistischen Masszahlen eng gebunden sind, oder ein Transformationssystem, das die Überführung einer beliebigen Häufigkeitsfunktion in eine bekannte Häufigkeitsfunktion (z. B. Normalverteilung) gestattet.

K. Pearson hat die Differentialgleichung

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{a + x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

betrachtet und gezeigt, dass deren Lösungen Häufigkeitsfunktionen sind. Die Koeffizienten (a, b_0, b_1, b_2) der Differentialgleichung sind zu den statistischen Masszahlen Durchschnitt, Streuung, Schiefe und Exzess der zugehörigen Häufigkeitsfunktion gebunden; bestimmend für die analytische Form der Kurven sind insbesondere die statistischen Masszahlen Schiefe und Exzess. In einer Ebene mit der Schiefe als Abszisse und dem Quadrat des Exzesses als Ordinate (Graphik 1, Seite 111) lässt sich der Geltungsbereich für die wichtigsten Typen auf einfache Weise darstellen.

Häufigkeitsfunktion der wichtigsten Typen:

$$\text{Typ } N\text{:}\quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2\sigma^2} \quad \text{(Normalverteilung)},$$

$$\text{Typ I:}\quad f(x) = \frac{1}{a_1 + a_2}\,\frac{m_1^{m_1}\, m_2^{m_2}}{(m_1+m_2)^{m_1+m_2}}\, B(m_1+1,\, m_2+1)\left[1+\frac{x}{a_1}\right]^{m_1}\left[1-\frac{x}{a_2}\right]^{m_2},$$

$$\text{Typ II:}\quad f(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(m+1{,}5)}{\Gamma(m+1)}\left[1-\frac{x^2}{a^2}\right]^{m},$$

$$\text{Typ III:}\quad f(x) = \frac{1}{a}\,\frac{p^{p+1}}{e^p\,\Gamma(p+1)}\left[1+\frac{x}{a}\right]^{\gamma a} e^{-\gamma x},$$

$$\text{Typ IV:}\quad f(x) = \frac{1}{a\,F(r,\nu)}\left[1+\frac{x^2}{a^2}\right]^{-m} e^{-\nu\, tg^{-1} x/a},$$

$$\text{Typ V:}\quad f(x) = \frac{\gamma^{p-1}}{\Gamma(p-1)}\, x^{-p}\, e^{-\gamma/x},$$

$$\text{Typ VI:}\quad f(x) = \frac{a^{q_1-q_2-1}\,\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1-q_2-1)\,\Gamma(q_2+1)}\,[x-a]^{q_2}\, x^{-q_1}.$$

Die auftretenden Parameter sind Funktionen der Koeffizienten (a, b_0, b_1, b_2) der oben erwähnten Differentialgleichung. Das System enthält unter anderen die Normalverteilung. Eine ausführliche Darstellung der Pearsonschen Verteilungen findet man in dem Standardwerk von W. P. Elderton [10] [1]).

N. L. Johnson [19] zeigt, wie eine beliebige empirische Verteilung in eine Normalverteilung transformiert werden kann. Nach der Beziehung

$$z = \gamma + \delta\, g\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)$$

mit den Transformationsparametern $(\gamma, \delta, \mu, \lambda)$ unterscheidet man drei Transformationssysteme

$$S_L\text{:}\quad g(y) = \ln y \quad \text{(Lognormalverteilung)},$$

$$S_B\text{:}\quad g(y) = \ln\,[y/(1-y)],$$

$$S_U\text{:}\quad g(y) = \ln\,[y + \sqrt{y^2+1}\,].$$

---

[1]) Zahlen in Klammern [ ] beziehen sich auf den Literaturnachweis.

Die Transformationsparameter sind wiederum eng gebunden zu den statistischen Masszahlen. Der Geltungsbereich des S_L-Systems fällt mit dem später zu erörternden Geltungsbereich der Lognormalverteilung LN (Graphik 2, Seite 112) zusammen und trennt zugleich das S_B-System (oberhalb der LN-Kurve, unschraffiert) vom S_U-System (unterhalb der LN-Kurve).

Für die Programmierung elektronischer Rechengeräte eignen sich weder die Pearsonschen Verteilungen noch die Transformationssysteme von Johnson. Erstere bedingen eine Reihe von Unterprogrammen für die verschiedenartigen analytischen Ausdrücke der Häufigkeitsfunktionen, während für die letzteren das Schätzen der massgebenden Parameter (γ, δ, μ, λ) beschwerlich ausfällt. Es soll daher im folgenden eine Auswahl von Verteilungen betrachtet werden, die unter sich und auch zur Standardform der Normalverteilung einfache Bindungen aufweisen (Kapitel 3) und sich für den Einsatz elektronischer Rechengeräte auszeichnen.

Die *Normalverteilung* (NV) ist durch die beiden Parameter Durchschnitt und Streuung eindeutig charakterisiert. Die fundamentale Bedeutung lässt sich daraus erklären, dass die Normalverteilung

- häufig angenähert in der Natur beobachtet werden kann;
- als Folgerung des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung theoretisch erklärt werden kann und
- als Voraussetzung zur Testtheorie eine einfache und geschlossene Abhandlung derselben gestattet.

Die *Gram-Charlier-Verteilung* (GV) und die *Edgeworth-Verteilung* (EV), deren vier Parameter mit den statistischen Masszahlen Durchschnitt, Streuung, Schiefe und Exzess übereinstimmen, gestattet insbesondere den Einfluss der Nichtnormalität auf die theoretischen Prüfverfahren zu untersuchen (vergleiche T. Schläpfer [31]) und wird auch häufig für die Approximation fast normaler Verteilungen verwendet.

Die *Lognormalverteilung* (LNV) mit zwei Parametern leitet man aus der Transformation $Y = e^X$ der normalverteilten ursprünglichen Zufallsvariablen X ab. J. Aitchison und J. A. C. Brown [1] haben eine umfassende Darstellung dieser Verteilung gegeben.

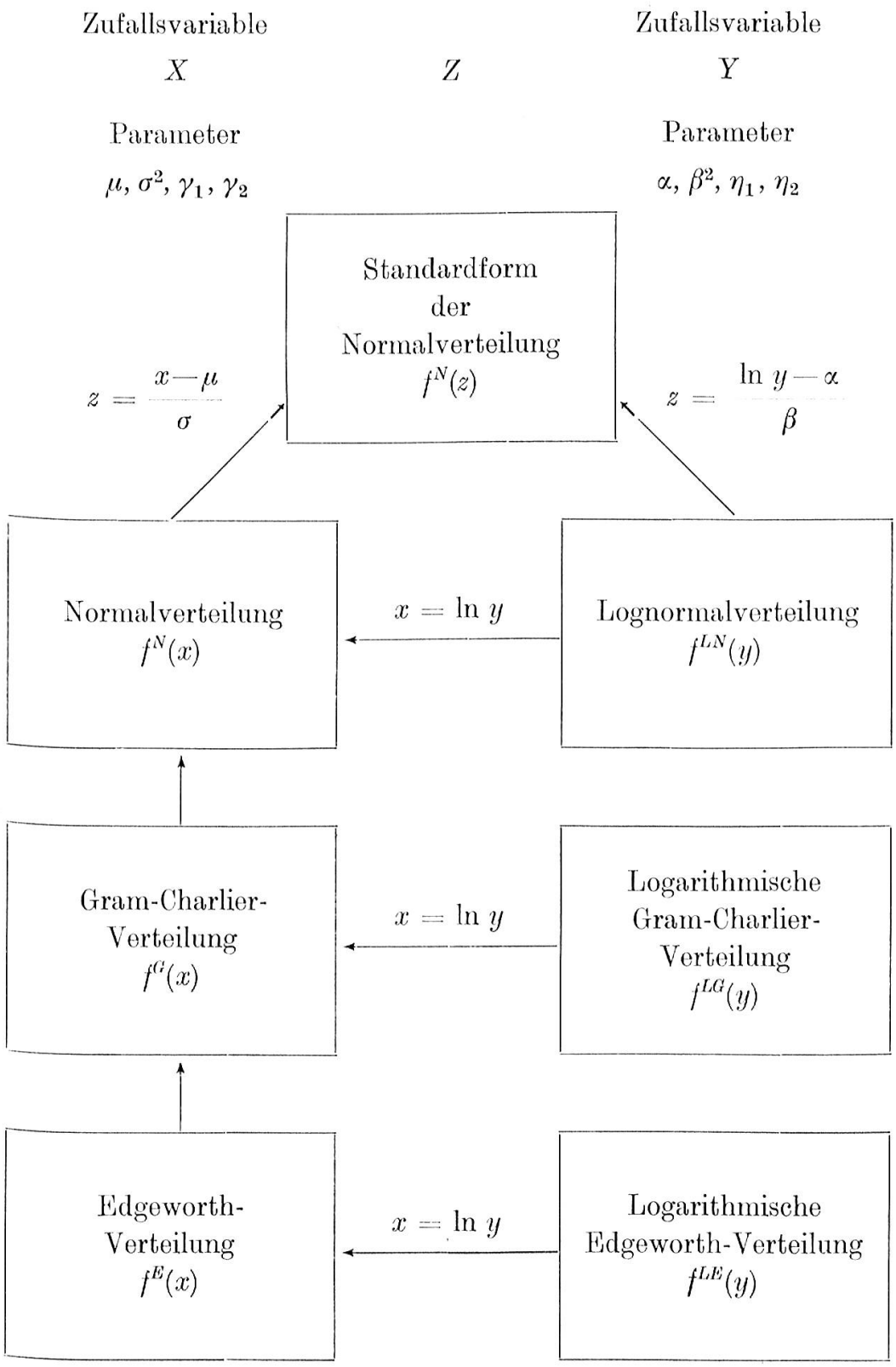
Die *logarithmische Gram-Charlier-Verteilung* (*LGV*) und die *logarithmische Edgeworth-Verteilung* (*LEV*) mit vier Parametern sind zur gewöhnlichen Gram-Charlier-Verteilung resp. Edgeworth-Verteilung in gleicher Weise gebunden wie die Lognormalverteilung zur Normalverteilung.

Die Systematik auf Seite 65 lässt die Bindungen der sechs ausgewählten Verteilungen unter sich und zur Standardform der Normalverteilung erkennen.

Zur Approximation empirischer Verteilungen hat man eine geeignete theoretische Verteilung auszuwählen und deren vorkommende Parameter aus den statistischen Masszahlen der empirischen Verteilung zu schätzen. In diesem Zusammenhang drängen sich Kriterien auf, um über die Zuverlässigkeit von Schätzwerten (Abschnitt 13) befinden zu können. Einfache Schätzverfahren wie die Methode der Maximum Likelihood oder die Methode der Momente gestatten das Aufsuchen von geeigneten Schätzwerten, die die an sie gestellten Anforderungen ganz oder teilweise erfüllen.

Um über die Güte der Anpassung der gewählten theoretischen Verteilung an die empirische Verteilung befinden zu können, bedient man sich spezieller Prüfverfahren (Abschnitt 14). Grundlage hierzu bilden die theoretischen Verteilungen und die daraus abgeleiteten Sicherheitsgrenzen. Mit dem Risiko eines Fehlers erster Art wird man bei Vorgabe der Sicherheitsschwelle die Hypothese, die empirische Verteilung entstamme zufällig der theoretischen Verteilung, dann ablehnen, wenn die errechnete Testgrösse die entsprechende Sicherheitsgrenze überschreitet.

Ausgewählte Verteilungen



1 Grundsätzliche Erwägungen

11 Theoretische Verteilung

111 Allgemeine Verteilung

Wir betrachten eine eindimensionale stetige Zufallsvariable X mit der im Intervall $(-\infty, \infty)$ integrierbaren *Häufigkeitsfunktion* $f(x)$, die zur *Verteilungsfunktion* $F(x)$ und zur *charakteristischen Funktion* $\varphi(t)$ wie folgt gebunden ist:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du; \tag{1.1}$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx. \tag{1.2}$$

Als *Erwartungswert* einer stetigen Funktion $g(x)$ definieren wir das Integral

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx. \tag{1.3}$$

Die Häufigkeitsfunktion $f(x)$ ist normiert, d.h. es existiert die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1. \tag{1.4}$$

Für die theoretische Verteilung der Zufallsvariablen X wollen wir folgende charakteristischen Grössen definieren:

Nullmoment r-ter Ordnung:

$$\mu_r' = E[x^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\, dx; \quad r = 1, 2, \ldots. \tag{1.5}$$

Hauptmoment r-ter Ordnung:

$$\mu_r = E[(x-\mu_1')^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_1')^r f(x)\, dx; \quad r = 2, 3, \ldots. \tag{1.6}$$

Die Hauptmomente zweiter bis vierter Ordnung, ausgedrückt durch die Nullmomente erster bis vierter Ordnung, lauten

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu_2' - \mu_1'^2 \\ \mu_3 &= \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1'^3 \\ \mu_4 &= \mu_4' - 4\mu_1'\mu_3' + 6\mu_1'^2\mu_2' - 3\mu_1'^4. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Kumulante r-ter Ordnung:

$$e^{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(it)^r}{r!} \varkappa_r} = \varphi(t); \quad r = 1, 2, \ldots. \tag{1.8}$$

Die vier ersten Kumulanten – ausgedrückt im Nullmoment erster Ordnung und den Hauptmomenten zweiter bis vierter Ordnung – sind

$$\varkappa_1 = \mu_1', \quad \varkappa_2 = \mu_2, \quad \varkappa_3 = \mu_3, \quad \varkappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2. \tag{1.9}$$

Standardisierte Kumulante r-ter Ordnung:

$$\lambda_r = \frac{\varkappa_r}{\varkappa_2^{r/2}}, \quad r = 1, 2, \ldots. \tag{1.10}$$

Die ersten vier standardisierten Kumulanten sind

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2^{1/2}}, & \lambda_3 &= \frac{\varkappa_3}{\varkappa_2^{3/2}}, \\ \lambda_2 &= \frac{\varkappa_2}{\varkappa_2} = 1, & \lambda_4 &= \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Ausgezeichnete statistische Masszahlen

Durchschnitt: $\mu \equiv \mu_1' = \varkappa_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx.$ (1.12)

Zentralwert (Median):

$$x_z : F(x_z) = \int_{-\infty}^{x_z} f(u)\, du = \tfrac{1}{2}. \tag{1.13}$$

Häufigster Wert: $x_h : f(x_h) = \mathrm{Max}\,[f(x)].$ (1.14)

Streuung: $\sigma^2 \equiv \mu_2 = \varkappa_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx.$ (1.15)

Mittlere quadratische Abweichung:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}. \tag{1.16}$$

Variationskoeffizient: $V = \frac{\sigma}{\mu}.$ (1.17)

Schiefe: $\gamma_1 \equiv \lambda_3 = \frac{\varkappa_3}{\sigma^3}.$ (1.18)

Exzess: $\gamma_2 \equiv \lambda_4 = \frac{\varkappa_4}{\sigma^4}.$ (1.19)

An Stelle der beiden letzten Masszahlen findet man in der Literatur auch öfters die von K. Pearson eingeführten Masse

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \gamma_1^2, \\ \beta_2 &= \gamma_2 + 3. \end{aligned} \tag{1.20}$$

112 Standardisierte Verteilung

Die Zufallsvariable
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
heisst *standardisierte Zufallsvariable*. Ihre Häufigkeitsfunktion bezeichnen wir mit $f(z)$. Die Verteilungsfunktion und die charakteristische Funktion lauten

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(u)\, du; \tag{1.21}$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} f(z)\, dz. \tag{1.22}$$

Nullmoment r-ter Ordnung:

$$\begin{aligned} \mu_1' &= 0, \\ \mu_r' &= \int_{-\infty}^{\infty} z^r f(z)\, dz; \quad r = 2, 3, \ldots. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Hauptmoment r-ter Ordnung:

$$\mu_2 = 1, \quad \mu_r = \mu_r'; \quad r = 3, 4, \ldots. \tag{1.24}$$

Kumulante erster bis vierter Ordnung:

$$\varkappa_1 = 0, \quad \varkappa_2 = 1, \quad \varkappa_3 = \mu_3, \quad \varkappa_4 = \mu_4 - 3. \tag{1.25}$$

Standardisierte Kumulante erster bis vierter Ordnung:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \varkappa_3, \quad \lambda_4 = \varkappa_4. \tag{1.26}$$

Ausgezeichnete statistische Masszahlen

Durchschnitt: $\mu \equiv \mu_1' = 0.$ (1.27)

Streuung: $\sigma^2 \equiv \mu_2 = 1.$ (1.28)

Schiefe: $\gamma_1 \equiv \lambda_3 = \varkappa_3.$ (1.29)

Exzess: $\gamma_2 \equiv \lambda_4 = \varkappa_4.$ (1.30)

Wichtig ist die Tatsache, dass für die standardisierte Zufallsvariable Z der Durchschnitt 0 und die Streuung 1 ausfallen. Schiefe und Exzess sowohl der ursprünglichen Zufallsvariablen X wie der transformierten standardisierten Zufallsvariablen Z sind gleich. Einen ausführlichen Nachweis dieser Invarianz bezüglich linearer Transformationen ist in der Dissertation von T. Schläpfer [31] zu finden.

12 Empirische Verteilung

Einer umfassenden Grundgesamtheit, charakterisiert durch die Häufigkeitsfunktion $f(x)$ der Zufallsvariablen X, werde nach dem Zufallsprinzip eine Stichprobe vom Umfange n entnommen mit den beobachteten Stichprobenelementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Die *Stichprobe* vom Umfange n der Zufallsvariablen X kann daher aufgefasst werden als n voneinander unabhängige Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, deren Verteilungen einzeln alle gleich der theoretischen Verteilung sind.

Werden die Stichprobenelemente ihrer Grösse nach geordnet

$$x_{(1)} \leqq x_{(2)} \leqq \ldots \leqq x_{(n)},$$

so kann die *empirische Verteilungsfunktion* $S_n(x)$ wie folgt definiert werden:

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqq x_{(1)}) \\ \dfrac{k}{n} & (x_{(k)} < x \leqq x_{(k+1)}), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ 1 & (x > x_{(n)}); \end{cases} \tag{1.31}$$

kurz $S_n(x) = \dfrac{k}{n}$, falls k Stichprobenelemente kleiner oder gleich x sind.

Für die empirische Verteilung der Stichprobe wollen wir folgende charakteristische Grössen definieren:

Empirisches Nullmoment r-ter Ordnung:

$$m'_r = \frac{1}{n} \mathop{S}_{i=1}^{n} x_i^r, \qquad r = 1, 2, \ldots. \tag{1.32}$$

Empirisches Hauptmoment r-ter Ordnung:

$$m_r = \frac{1}{n} \mathop{S}_{i=1}^{n} (x_i - m'_1)^2, \quad r = 2, 3, \ldots. \tag{1.33}$$

Zur Schätzung statistischer Masszahlen der Grundgesamtheit genügen die empirischen Momente nicht. Insbesondere sollten die Schätzungen zuverlässig[1]) sein. Um diesem Kriterium Rechnung zu tragen, werden folgende Erwartungswerte benötigt:

$$
\begin{aligned}
E[m_1'] &= \mu_1' \\
E[m_2] &= \frac{n-1}{n}\mu_2 \\
E[m_3] &= \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\mu_3 \\
E[m_4] &= \frac{(n-1)(n^2-3n+3)}{n^3}\mu_4 + \frac{3(n-1)(2n-3)}{n^3}\mu_2^2 \\
E[m_2^2] &= \frac{(n-1)^2}{n^3}\mu_4 + \frac{(n-1)(n^2-2n+3)}{n^3}\mu_2^2 .
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

Die zuverlässigen Schätzwerte des ersten Nullmomentes und der zweiten, dritten und vierten Hauptmomente ergeben sich gemäss nachstehenden Ansätzen:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu}_1' &= m_1' \\
\hat{\mu}_2 &= \frac{n}{n-1} m_2 \\
\hat{\mu}_3 &= \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} m_3 \\
\hat{\mu}_4 &= \frac{n(n^2-2n+3)}{(n-1)(n-2)(n-3)} m_4 - \frac{3n(2n-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)} m_2^2 .
\end{aligned}
\tag{1.35}
$$

Die Erwartungswerte der entsprechenden Schätzwerte stimmen mit den zu schätzenden Masszahlen der theoretischen Verteilung überein.

Nach den Beziehungen (1.35) gewinnt man leicht zuverlässige Schätzwerte für die *Kumulanten erster bis vierter Ordnung.*

$$
\begin{aligned}
\hat{\varkappa}_1 &= m_1' \\
\hat{\varkappa}_2 &= \frac{n}{n-1} m_2 \\
\hat{\varkappa}_3 &= \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} m_3 \\
\hat{\varkappa}_4 &= \frac{n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)} \left[(n+1)\, m_4 - 3(n-1)\, m_2^2\right] .
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

---

[1]) Siehe Ausführungen in Abschnitt 131.

Ausgezeichnete statistische Masszahlen

Durchschnitt: $$\bar{x} = \hat{\mu}_1' = \frac{1}{n} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} x_i . \tag{1.37}$$

Streuung: $$s^2 = \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n-1} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} (x_i - \bar{x})^2 . \tag{1.38}$$

Mittlere quadratische Abweichung:

$$s \approx \sqrt{s^2} . \tag{1.39}$$

Variationskoeffizient: $$V = \frac{s}{\bar{x}} . \tag{1.40}$$

Schiefe: $$g_1 = \hat{\gamma}_1 \approx \frac{\hat{\varkappa}_3}{s^3} . \tag{1.41}$$

Exzess: $$g_2 = \hat{\gamma}_2 \approx \frac{\hat{\varkappa}_4}{s^4} . \tag{1.42}$$

Schiefe und Exzess nach K. Pearson ergeben sich zu

$$\begin{aligned} b_1 &= \hat{\beta}_1 \approx g_1^2 , \\ b_2 &= \hat{\beta}_2 \approx g_2 + 3 . \end{aligned} \tag{1.43}$$

Die gewonnenen Ansätze lassen sich leicht übertragen auf empirische Verteilungen, deren Stichprobenelemente in m gleiche Klassen aufgeteilt wurden. Die konstante Klassenbreite sei k, die Klassenmitten bezeichnen wir mit x_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ und die absolute Häufigkeit der j-ten Klasse mit n_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Rohes empirisches Nullmoment r-ter Ordnung:

$$\bar{m}_r' = \frac{1}{n} \overset{m}{\underset{j=1}{S}} n_j x_j^r , \quad r = 1, 2, \ldots . \tag{1.44}$$

Rohes empirisches Hauptmoment r-ter Ordnung:

$$\bar{m}_r = \frac{1}{n} \overset{m}{\underset{j=1}{S}} n_j (x_j - m_1')^r , \quad r = 2, 3, \ldots . \tag{1.45}$$

W. F. Sheppard [32] führte eine Korrektur der empirischen Momente ein, die den systematischen Fehler, der von der Klassenbildung herrührt,

aufhebt. Eine einfache Herleitung der Korrektur hat P. Lorenz [22] gegeben. Die korrigierten empirischen Momente lauten:

$$
\begin{aligned}
m_1' &= \overline{m}_1' \\
m_2 &= \overline{m}_2 - \frac{k^2}{12} \\
m_3 &= \overline{m}_3 \\
m_4 &= \overline{m}_4 - \frac{k^2}{2}\,\overline{m}_2 + \frac{7\,k^4}{240}\,.
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

Mit Hilfe der Beziehung (1.46) lassen sich die Kumulanten und die statistischen Masszahlen (Durchschnitt, Streuung, mittlere quadratische Abweichung, Schiefe und Exzess) analog den Ansätzen (1.36) bis (1.43) ausdrücken.

13 Theorie der Schätzwerte

131 Problemstellung, Kriterium

Die *theoretische Verteilung* sei durch die Häufigkeitsfunktion $f(x;\,\theta_1,\,\theta_2,\,\ldots,\,\theta_s)$ definiert, die zusätzlich von den s Parametern $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ abhängig ist. Letztere sind meist unbekannt, so dass sich das Problem aufdrängt, diese aus einer Stichprobe vom Umfange n; $x_1, x_2, \ldots, x_n$, zu bestimmen oder zu schätzen.

Als *Schätzwert* bezeichnen wir eine Zufallsvariable $\hat{\theta}_\nu = \hat{\theta}_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, für $\nu = 1, 2, \ldots, s$, die den zu schätzenden Parameter θ_ν der theoretischen Verteilung gut wiedergibt. Da für den Parameter θ_ν meistens mehrere Schätzwerte existieren, drängen sich Kriterien auf, die unter der Menge aller möglichen Schätzwerte diejenigen auszeichnen, die dem wahren Wert θ_ν am nächsten kommen und deren Streuung minimal ausfällt.

1. Kriterium

Ein Schätzwert $\hat{\theta}$ heisst *zuverlässig* (unbiased), wenn dessen Erwartungswert existiert und mit dem Parameter der theoretischen Verteilung übereinstimmt.

$$E[\hat{\theta}] = \theta\,. \tag{1.47}$$

2. Kriterium

Es sei $\hat{\theta}_n$ der Schätzwert einer Stichprobe vom Umfange n. Ein Schätzwert $\hat{\theta}$ heisst *passend* (consistent), wenn für jedes positive ε gilt

$$\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1. \tag{1.48}$$

3. Kriterium

Ein Schätzwert $\hat{\theta}$ heisst *wirksamer* als ein Schätzwert $\hat{\theta}'$, wenn die Streuung des ersten kleiner ist als die Streuung des zweiten.

$$\sigma^2(\hat{\theta}) < \sigma^2(\hat{\theta}'). \tag{1.49}$$

$\hat{\theta}$ ist ein Schätzwert minimaler Streuung (minimum variance), wenn für jeden andern Schätzwert die Streuung grösser oder gleich der Streuung $\sigma^2(\hat{\theta})$ ist. Stellt insbesondere $\hat{\theta}$ für grosse n einen solchen Schätzwert minimaler Streuung dar, so wird er als wirksam (efficient) bezeichnet.

4. Kriterium

Ein Schätzwert $\hat{\theta}$ heisst *erschöpfend* (sufficient), falls in ihm sämtliche Informationen über θ der theoretischen Verteilung enthalten sind.

Die grundlegenden Gedanken der Theorie der Schätzwerte stammen von R. A. Fisher [11]; insbesondere werden die Kriterien 2, 3 und 4 nach ihm als die Fisherschen Kriterien bezeichnet.

132 Schätzungsverfahren

132.1 *Methode der Maximum Likelihood*

Ein sehr allgemeines Verfahren der Schätzung von Parametern ist die von R. A. Fisher [13] entwickelte Methode der Maximum Likelihood, die wir im folgenden für das Schätzen von einem oder zwei Parametern darlegen.

132.11 Schätzen eines Parameters

Die gemeinsame Verteilung der einzelnen Stichprobengrössen betrachtet als Funktion eines einzigen Parameters θ wird die *Likelihoodfunktion*

$$L(\theta) = L(\theta;\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \quad \text{genannt.} \tag{1.50}$$

Da die Stichprobenelemente $X_1, X_2, \ldots, X_n$ voneinander unabhängig sind, lässt sich $L(\theta)$ wie folgt berechnen

$$L(\theta) = f(\theta; x_1)\, f(\theta; x_2) \ldots f(\theta; x_n). \tag{1.51}$$

Die Methode der Maximum Likelihood liefert als Schätzwert für den Parameter $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ diejenigen Werte $\hat{\theta}$, die die Likelihoodfunktion absolut maximieren.

$$L(\hat{\theta}) \geqq L(\theta), \quad \text{für alle } \alpha \leqq \theta \leqq \beta^{1)}. \tag{1.52}$$

Existiert im Intervall $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ nur ein Wert $\hat{\theta}$, für den

$$L'(\theta) = \frac{\delta L(\theta)}{\delta \theta} = 0$$

und (1.53)

$$L''(\hat{\theta}) < 0,$$

so ist $\hat{\theta}$ der einzige Maximum Likelihood Schätzwert des Parameters θ.

Da die Funktionen $L(\theta)$ und $\ln L(\theta)$ das Maximum an derselben Stelle haben, wird es oft wesentlich einfacher sein, die letztere zu maximieren. Existiert im Intervall $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ nur ein Wert $\hat{\theta}$, für den

$$[\ln L(\theta)]' = \frac{\delta \ln L(\theta)}{\delta \theta} = 0$$

und (1.54)

$$[\ln L(\hat{\theta})]'' < 0,$$

so ist $\hat{\theta}$ der einzige Maximum Likelihood Schätzwert des Parameters θ.

132.12 Schätzen zweier Parameter

Hängt die theoretische Häufigkeitsfunktion $f(x; \theta_1, \theta_2)$ mit $\alpha_1 \leqq \theta_1 \leqq \beta_1$ und $\alpha_2 \leqq \theta_2 \leqq \beta_2$ von zwei Parametern ab, so bemisst sich die Likelihoodfunktion zu

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2) &= L(\theta_1, \theta_2; x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= f(\theta_1, \theta_2; x_1)\, f(\theta_1, \theta_2; x_2) \ldots f(\theta_1, \theta_2; x_n). \end{aligned} \tag{1.55}$$

---

[1]) Nicht unerwähnt bleibe, dass die Likelihoodfunktion ihr absolutes Maximum an den Randstellen $\theta = \alpha$ bzw. $\theta = \beta$ annehmen kann.

Das Verfahren liefert als Schätzwert für die beiden Parameter diejenigen Wertepaare $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$, an deren Stelle die Likelihoodfunktion ein absolutes Maximum besitzt. Notwendig und hinreichend sind die Bedingungen

$$\frac{\partial L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} = 0, \qquad \frac{\partial L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0 \tag{1.56}$$

und

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2^2} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right)^2 > 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1^2} < 0 \text{ für } \theta_1 = \hat{\theta}_1,\ \theta_2 = \hat{\theta}_2. \tag{1.57}$$

Wiederum wird es meistens einfacher sein, die logarithmische Likelihoodfunktion zu maximieren.

132.2 *Methode der Momente*

Aufgegriffen sei der Fall des Schätzens zweier Parameter. Die ersten beiden Nullmomente seien Funktionen der zu schätzenden Parameter θ_1 und θ_2.

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \mu_1'(\theta_1, \theta_2), \\ \mu_2' &= \mu_2'(\theta_1, \theta_2). \end{aligned} \tag{1.58}$$

Ersetzt man die linken Seiten durch die empirischen Nullmomente erster resp. zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} m_1' &\approx \mu_1'(\theta_1, \theta_2), \\ m_2' &\approx \mu_2'(\theta_1, \theta_2), \end{aligned} \tag{1.59}$$

so ergeben sich die gesuchten Schätzwerte $\hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ durch Auflösen der Gleichungen (1.59)

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= \hat{\theta}_1(m_1', m_2'), \\ \hat{\theta}_2 &= \hat{\theta}_2(m_1', m_2'). \end{aligned} \tag{1.60}$$

14 Güte der Anpassung

In der statistischen Praxis wird es selten der Fall sein, dass die theoretische Verteilung der Zufallsvariablen, charakterisiert durch ihre Verteilungsfunktion $F(x)$, genau bekannt ist. Vielmehr wird nur eine Stichprobe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Zufallsvariablen vorliegen, aus der man eine möglichst gute Approximation $F_0(x)$ der theoretischen Verteilungsfunktion $F(x)$ zu suchen, resp. bei gegebener Form die diese bestimmenden Parameter zu schätzen hat.

Die Hypothese $$H_0 : F(x) = F_0(x) \tag{1.61}$$

prüfen, bezeichnen wir als Test der Güte der Anpassung.

Ist $F_0(x)$ von vornherein vollständig bestimmt, sowohl bezüglich ihrer analytischen Form als auch bezüglich der vorhandenen Parameter, so bezeichnet man die Hypothese H_0 als *einfach*. Beispielsweise kann $F_0(x)$ aus theoretischen Gründen eine bestimmte Form (Gleichverteilung, Normalverteilung mit bekannten Parametern μ und σ^2 usw.) aufweisen, oder $F_0(x)$ kann früheren Untersuchungen zufolge als bekannt angesehen werden. Weist dagegen $F_0(x)$ irgendeine Bindung zur Stichprobe auf, so handelt es sich um eine *zusammengesetzte* Hypothese. Dies ist dann der Fall, wenn die Parameter der Verteilungsfunktion $F_0(x)$ aus der Stichprobe selbst geschätzt wurden oder wenn $F_0(x)$ aus der Stichprobe graphisch ermittelt wurde.

141 Chiquadrattest

Das klassische Chiquadratverfahren zur Prüfung der einfachen Hypothese H_0 ist von K. Pearson [29] um die Jahrhundertwende entwickelt worden.

Der Definitionsbereich der Zufallsvariablen werde in m sich ausschliessende Klassen aufgeteilt. Die j-te Klasse besitze die Klassengrenzen x_j und x_{j+1}. Die Wahrscheinlichkeit p_j, dass ein Einzelwert in die j-te Klasse fällt bei Vorgabe der Verteilungsfunktion $F(x)$, ist gleich

$$p_j = F(x_{j+1}) - F(x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.62}$$

wobei $$\sum_{j=1}^{m} p_j = F(x_{m+1}) - F(x_1) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 \text{ ist.} \tag{1.63}$$

Die beobachtete Anzahl der in die j-te Klasse fallenden Stichprobenelemente sei b_j. Für eine Stichprobe vom Umfange n gilt

$$\sum_{j=1}^{m} b_j = n. \tag{1.64}$$

Die erwartete Anzahl der in die j-te Klasse fallenden Stichprobenelemente bezeichnen wir mit e_j. Diese errechnet sich zu

$$e_j = np_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{1.65}$$

und es ist

$$\sum_{j=1}^{m} e_j = n. \tag{1.66}$$

Die von K. Pearson eingeführte Testgrösse

$$X^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j} \quad \text{(theoretischer Ansatz)} \qquad (1.67)$$

befolgt für grosse n und konstante p_j unter Annahme der einfachen Nullhypothese (1.61) die Chiquadratverteilung mit $n^* = (m-1)$ Freiheitsgraden.

$$g(\chi^2; m-1) = \frac{1}{2^{(m-1)/2}\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{m-1}{2}-1}; \quad 0 \leqq \chi^2 \leqq \infty. \qquad (1.68)$$

Die Anwendbarkeit der Grenzverteilung auf kleine Stichprobenumfänge wurde in verschiedenen Arbeiten untersucht; insbesondere sei auf die neuern Publikationen von W. G. Cochran [5, 6] hingewiesen.

W. Wegmüller [35] untersuchte das Grenzverhalten der Chiquadratverteilung für $n^* \to \infty$ und gibt die für die numerische Anwendung geeigneten Transformationsansätze von R. A. Fisher [14] und E. B. Wilson und M. M. Hilferty [37] an.

Ansatz von Fisher:

$$z = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n^* - 1}, \quad \text{asympt. n. v. } [0,1] \qquad (1.69)$$

Ansatz von Wilson-Hilferty:

$$z = \left[\sqrt[3]{\frac{\chi^2}{n^*}} - \left(1 - \frac{2}{9n^*}\right)\right] \Big/ \sqrt{\frac{2}{9n^*}}, \quad \text{asympt. n. v. } [0,1] \qquad (1.70)$$

Für die gebräuchlichen Sicherheitsschwellen von 5%, 1% und 1‰ sind in den meisten Lehrbüchern der Statistik einschlägige Tabellen angegeben, insbesondere für eine kleine Zahl von Freiheitsgraden (Tab.2). Ist die Zahl der Freiheitsgrade n^* nicht tabelliert, so kann der Sicherheitspunkt nach Fisher für grosse n^* oder nach Wilson-Hilferty auch für kleine n^* nach folgenden Ansätzen errechnet werden.

Nach Fisher:

$$\chi^2_{P,n^*} \approx \tfrac{1}{2}\left[z_{2P} + \sqrt{2n^* - 1}\right]^2, \qquad (1.71)$$

Nach Wilson-Hilferty:

$$\chi^2_{P,n^*} \approx n^* \left[z_{2P} \sqrt{\frac{2}{9n^*}} + \left(1 - \frac{2}{9n^*}\right)\right]^3, \qquad (1.72)$$

wobei z_{2P} der entsprechende einseitige Sicherheitspunkt der standardisierten Normalverteilung ist.

Sicherheitspunkte der standardisierten Normalverteilung

z_P bzw. z_{2P}

1* Wahrscheinlichkeit P	Sicherheitspunkte	
	einseitig z_{2P}	zweiseitig z_P
0,05	1,645	1,960
0,01	2,326	2,576
0,001	3,090	3,291

Für die numerische Auswertung lohnt es sich, den theoretischen Ansatz (1.67) weiter umzuformen.

$$X^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j}$$

$$= \sum_j \frac{1}{e_j} (b_j^2 - 2 b_j e_j + e_j^2)$$

$$X^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{b_j^2}{e_j} - n, \quad \text{mit } e_j = n[F_0(x_{j+1}) - F_0(x_j)] \qquad (1.73)$$

(numerischer Ansatz).

Eine praktische Regel besagt, dass alle e_j grösser oder gleich 5 sein sollten; man erzwingt dies leicht durch Zusammenfassung benachbarter Klassen.

Neuere Erkenntnisse führen dazu, die Klasseneinteilung so vorzunehmen, dass die $p_j = 1/m =$ konstant zu wählen sind mit der Konsequenz, dass die erwarteten Häufigkeiten $e_j = n/m$ ausfallen. Jetzt vereinfacht sich

$$X^2 = \frac{m}{n} \sum_{j=1}^{m} b_j^2 - n \text{ [1]} \quad \text{(numerischer Ansatz)}. \qquad (1.74)$$

---

[1]) M.E. Wise [38] modifiziert den theoretischen Ansatz (1.67) wie folgt $X'^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j + \frac{1}{2}}$, der eine bessere Approximation für kleine Stichprobenumfänge n und konstante $p_j = \frac{1}{m}$ darstellt. Analog den obigen Betrachtungen lässt sich X'^2 in die für die numerische Auswertung geeignetere Beziehung

$$X'^2 = \frac{2m}{2n+m} \sum_{j=1}^{m} b_j^2 - n \quad \text{überführen.}$$

H. B. Mann und A. Wald [24] haben für grosse Stichprobenumfänge die optimale Zahl der Klassen m nach dem Ansatz

$$m = 4 \sqrt[5]{\frac{2(n-1)^2}{z_{2P}^2}} \tag{1.75}$$

errechnet, der zeigt, dass m nicht nur von der Zahl der Stichprobenelemente, sondern auch von der Sicherheitsschwelle P abhängt; z_{2P} ist der einseitige Sicherheitspunkt der standardisierten Normalverteilung (Tab. 1*). C. A. Williams [36] tabelliert m für die Sicherheitsschwellen von 5 % und 1 % und die Stichprobenumfänge 200(50) 1000(100) 1500, 2000.

142 Kolmogoroff-Test

Die von A. N. Kolmogoroff [21] eingeführte verteilungsfreie Testgrösse

$$K_n = \sqrt{n} \sup_{-\infty < x < \infty} |S_n(x) - F(x)| \tag{1.76}$$

(theoretischer Ansatz),

hat den wesentlichen Vorteil, auch für kleine Stichproben verwendet zu werden. Zudem erübrigt sich die Klassenbildung, die beim Chiquadrattest zu einem Informationsverlust führt. Der Kolmogoroff-Test wird seiner einfachen Anwendung wegen auch etwa als Kurztest bezeichnet.

Die theoretische Verteilungsfunktion der Testgrösse K_n unter Annahme der einfachen Nullhypothese ist für grosse Stichproben durch ihre Grenzverteilungsfunktion

$$\Phi(t) = \sqrt{2\pi}\,\frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k-1)^2 \pi^2 / 8t^2} \tag{1.77}$$

gegeben und wurde von N. Smirnow [34] für die Argumente $t = 0{,}28\,(0{,}01)\,2{,}50\,(0{,}05)\,3$ tabelliert. Das Verhalten der Testgrösse K_n für kleine Stichproben analysiert F. J. Massey [26]; er zeigt, wie die Verteilungsfunktion $\Phi_n(t)$ bestimmt werden kann. Die Sicherheitspunkte der für die praktische Anwendung geeigneteren numerischen Testgrösse

$$D_n = \frac{K_n}{\sqrt{n}} = \max \left| \frac{i}{n} - F_0(x_i) \right|, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.78}$$

(numerischer Ansatz)

hat H. L. Miller [27] angegeben (Tab. 2).

Liegt eine graphische Skizze oder eine Tabelle der empirischen und theoretischen Verteilungsfunktion vor, so kann das Maximum meist visuell lokalisiert werden, was das Testverfahren wesentlich erleichtert.

143 Cramér-von Mises-Smirnow-Test

Unabhängig voneinander schlugen H. Cramér [7] und R. von Mises [28] als Mass der Abweichung

$$\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)]^2 \, dx \tag{1.79}$$

vor; ω^2 ist dabei noch abhängig von der theoretischen Verteilungsfunktion. N. Smirnow [33] dagegen definierte als verteilungsfreie Testgrösse

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)]^2 \, dF(x) \tag{1.80}$$

(theoretischer Ansatz).

Die Verteilungsfunktion $\Phi_n(t)$ der Testgrösse W_n^2 ist für $n = 1, 2, 3$ von A. W. Marshall [25] und deren Grenzverteilung $\Phi(t)$ von T. W. Anderson und D. A. Darling [2] mittels Besselscher Funktionen angegeben worden.

Für die praktische Anwendung des Gütetests genügt die Kenntnis der Sicherheitspunkte $W_{P;n}^2$ (Tab. 2*) der Grenzverteilung $\Phi(t)$ auch für kleine Stichproben.

Sicherheitspunkte[1]) von $W_n^2 : W_{P,\infty}^2$

2* Wahrscheinlichkeit P	Sicherheitspunkt $W_{P,\infty}$
0,05	0,461
0,01	0,743
0,001	1,168

[1]) Anderson, T. W., and Darling, D. A., Asymptotic theory of certain "goodness of fit" criteria based on stochastic processes. Ann. Math. Statist. 23 (1952), S. 203.

Für die numerische Auswertung ist Ansatz (1.80) wenig geeignet. Wir suchen daher eine passende Umformung und zerlegen das Stieltjes-Integral in eine Summe von Integralen entsprechend den geordneten Stichprobenelementen $x_{(1)} \leqq x_{(2)} \leqq \ldots \leqq x_{(n)}$

$$W_n^2 = n\left\{\int_{-\infty}^{x_{(1)}} [S_n(x)-F(x)]^2 dF(x) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \int_{x_{(\nu)}}^{x_{(\nu+1)}} [S_n(x)-F(x)]^2 dF(x) + \int_{x_{(n)}}^{\infty} [S_n(x)-F(x)]^2 dF(x)\right\}.$$

$S_n(x)$ wird durch die Definitionsbeziehung (1.31) substituiert. Die Wahrscheinlichkeitsintegraltransformation $u = F(x)$ ergibt alsdann

$$W_n^2 = n\left\{\int_0^{u_{(1)}} u^2\, du + \sum_{\nu=1}^{n-1} \int_{u_{(\nu)}}^{u_{(\nu+1)}} \left(\frac{\nu}{n}-u\right)^2 du + \int_{u_{(n)}}^{1} (1-u)^2\, du\right\},$$

wobei $u_{(\nu)}$ die geordneten transformierten Stichprobenelemente einer Gleichverteilung darstellen. Die bestimmten Riemannschen Integrale der rechten Seite sind alle von der Gestalt

$$\int_a^b \left(\frac{k}{n}-u\right)^2 du = \left(\frac{k}{n}\right)^2 (b-a) - \frac{k}{n}(b^2-a^2) + \frac{1}{3}(b^3-a^3).$$

So erhalten wir

$$\begin{aligned}
W_n^2 = {} & \frac{1}{n}[u_{(2)}-u_{(1)}] && -[u_{(2)}^2-u_{(1)}^2] && +\frac{n}{3}[u_{(2)}^3-u_{(1)}^3] \\
& +\frac{1}{n}[4u_{(3)}-4u_{(2)}] && -[2u_{(3)}^2-2u_{(2)}^2] && +\frac{n}{3}[u_{(3)}^3-u_{(2)}^3] \\
& \vdots && \vdots && \vdots \\
& +\frac{1}{n}[(n-1)^2u_{(n)}-(n-1)^2u_{(n-1)}] && -[(n-1)u_{(n)}^2-(n-1)u_{(n-1)}^2] && +\frac{n}{3}[u_{(n)}^3-u_{(n-1)}^3] \\
& +\frac{1}{n}[n-n^2u_{(n)}] && -[n-nu_{(n)}^2] && +\frac{n}{3}[u_{(1)}^3-u_{(n)}^3+1]
\end{aligned}$$

Diese Summe lässt sich wie folgt zusammenfassen

$$W_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[-(2i-1)u_{(i)} + nu_{(i)}^2] + \frac{n}{3},$$

oder nach quadratischer Ergänzung

$$W_n^2 = \frac{n}{3} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[u_{(i)} - \frac{2i-1}{2n}\right]^2 - \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2.$$

Die Summe der ersten n quadrierten ungeraden Zahlen ist

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Damit vereinfacht sich W_n^2 zu

$$W_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left[F_0(x_{(i)}) - \frac{2i-1}{2n}\right]^2 \tag{1.81}$$

(numerischer Ansatz),

worin $u_{(i)}$ durch die ursprüngliche Variable $F(x_{(i)})$ ersetzt wurde.

Bedient man sich für die numerische Auswertung eines elektronischen Rechengerätes, so empfiehlt es sich, Ansatz (1.81) in der Gestalt

$$W_n^2 = \sum_{i=1}^{n}[F_0(x_{(i)})]^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\,F_0(x_{(i)}) + \frac{n}{3} \tag{1.82}$$

vorzumerken, eine Beziehung, die sich für die Programmierung besser eignet.

144 Anderson-Darling-Test

Spricht der Cramér-von Mises-Smirnow-Test vorwiegend auf Abweichung in der Nähe des Zentralwertes an, so haben T. W. Anderson und D. A. Darling [2] die gewichtete Testgrösse

$$\overline{W}_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[S_n(x)-F(x)]^2}{F(x)\{1-F(x)\}}\,dF(x) \tag{1.83}$$

(theoretischer Ansatz)

untersucht und deren Grenzverteilung $\Phi(t)$ angegeben.

Approximationen der Sicherheitspunkte $\overline{W}_{P,n}^2$ sind für kleine Stichproben bekannt (Tab. 2).

Wiederum drängt sich für praktische Belange eine Umformung des theoretischen Ansatzes auf. Das Stieltjes-Integral (1.83) zerlegt man in eine Summe von Integralen entsprechend den n geordneten Stichprobenelementen

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{x_{(1)}} \frac{F(x)}{1-F(x)}\, dF(x) + \int_{x_{(1)}}^{x_{(2)}} \frac{[S_n(x)-F(x)]^2}{F(x)\,[1-(Fx)]}\, dF(x) + \ldots$$

$$+ \int_{x_{(n)}}^{\infty} \frac{1-F(x)}{F(x)}\, dF(x),$$

oder mittels $S_n(x) = \frac{k}{n}$ in $(x_{(k)}, x_{(k+1)}]$ und der Wahrscheinlichkeitsintegraltransformation $u = F(x)$

$$W_n^2 = n \int_0^{u_{(1)}} \frac{u}{1-u}\, du + \int_{u_{(1)}}^{u_{(2)}} \frac{((1/n)-u)^2}{u(1-u)}\, du + \ldots + \int_{u_{(n)}}^{1} \frac{1-u}{u}\, du.$$

Unter Berücksichtigung von

$$\int_0^{u_{(1)}} \frac{u}{1-u}\, du = -u_{(1)} - \ln(1-u_{(1)})$$

$$\int_a^b \frac{((k/n)-u)^2}{n(1-u)}\, du = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \ln\frac{b}{a} + \left(\frac{n-k}{n}\right)^2 \ln\frac{(1-a)}{(1-b)} + a - b$$

$$\int_{u_{(n)}}^{1} \frac{1-u}{u}\, du = u_{(n)} - \ln u_{(n)} - 1$$

folgt nach passender Umformung

$$W_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (2i-1)\left[\ln F_0(x_{(i)}) + \ln\left(1-F_0(x_{(n-i+1)})\right)\right] \qquad (1.84)$$

(numerischer Ansatz).

Für den Einsatz eines elektronischen Rechengerätes ist die gefundene Relation wenig geeignet, da die Argumente der logarithmischen Funktion gegenläufig sind; es drängt sich eine Umgruppierung auf, die zu folgendem Ansatz führt

$$W_n^2 = -n - \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(2i-1)\ln F_0(x_{(i)}) + [2(n-i)+1]\ln\left(1-F_0(x_{(i)})\right)\right]\right\}. \tag{1.85}$$

2 Standardisierte Normalverteilung

Da alle im folgenden Kapitel ausgewählten Verteilungen direkt oder indirekt mit der standardisierten Normalverteilung in Beziehung gebracht werden können, seien deren wichtigste Eigenschaften kurz zusammengestellt.

Häufigkeitsfunktion:

$$f^N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad -\infty < z < \infty. \tag{2.1}$$

Verteilungsfunktion:

$$F^N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad -\infty < z < \infty. \tag{2.2}$$

Charakteristische Funktion:

$$\varphi^N(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{2.3}$$

Dass die in Beziehung (2.1) definierte Häufigkeitsfunktion standardisiert ist, belegen nachstehende statistische Masszahlen

Durchschnitt:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0.$$

Streuung:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1.$$

Die charakteristischen Grössen der standardisierten Normalverteilung sind entsprechend den Definitionsrelationen (1.21) bis (1.30) herzuleiten.

Null- und Hauptmoment r-ter Ordnung:

$$\begin{aligned} r = 1: &\quad \mu_1' = \mu_1 = 0 \\ r = 2\nu: &\quad \mu_{2\nu}' = \mu_{2\nu} = \frac{(2\nu)!}{\nu!\,2^\nu}; \qquad \nu = 1, 2, \ldots \\ r = 2\nu+1: &\quad \mu_{2\nu+1}' = \mu_{2\nu+1} = 0; \qquad \nu = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Kumulante erster bis vierter Ordnung:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= 0, \qquad \varkappa_3 = \mu_3 = 0, \\ \varkappa_2 &= 1, \qquad \varkappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Standardisierte Kumulante erster bis vierter Ordnung:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0. \tag{2.6}$$

Ausgezeichnete statistische Masszahlen

Durchschnitt: $\mu = 0.$ (2.7)

Streuung: $\sigma^2 = 1.$ (2.8)

Schiefe: $\gamma_1 = 0.$ (2.9)

Exzess: $\gamma_2 = 0.$ (2.10)

Ableitungen der standardisierten Normalverteilung

$$\frac{d^\nu}{dz^\nu} f^N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^\nu}{dz^\nu} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-1)^\nu e^{-\frac{z^2}{2}} H_\nu(z), \tag{2.11}$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei $H_\nu(z)$ die Hermiteschen Polynome ν-ter Ordnung sind.

$$H_\nu(z) = z^\nu - \frac{\nu(\nu-1)}{2 \cdot 1!} z^{\nu-2} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2^2 \cdot 2!} z^{\nu-4} \mp \ldots . \tag{2.12}$$

Speziell gilt

$$\begin{aligned} H_0(z) &= 1 \\ H_1(z) &= z \\ H_2(z) &= z^2 - 1 \\ H_3(z) &= z^3 - 3z \\ H_4(z) &= z^4 - 6z^2 + 3 \\ H_5(z) &= z^5 - 10z^3 + 15z \\ H_6(z) &= z^6 - 15z^4 + 45z^2 - 15 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Bezüglich der Hermiteschen Polynome seien noch folgende, für uns bedeutungsvolle Eigenschaften zitiert:

Orthogonalität

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_\mu(z)\, H_\nu(z)\, f(z)\, dz = \begin{cases} \nu! & (\mu = \nu), \\ 0 & (\mu \neq \nu). \end{cases} \tag{2.14}$$

Rekursion

$$H_{\nu+2}(z) - z H_{\nu+1}(z) + (\nu+1) H_\nu(z) = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots. \tag{2.15}$$

Symmetrie

$$H_\nu(-z) = (-1)^\nu H_\nu(z), \qquad \nu = 0, 1, \ldots. \tag{2.16}$$

Ableitung

$$\frac{d}{dz} H_\nu(z) = \nu H_{\nu-1}(z), \qquad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{2.17}$$

In der statistischen Praxis stellt sich immer wieder die Aufgabe, zu gegebenem Argument z die zugehörige Häufigkeits- oder Verteilungsfunktion numerisch zu bestimmen. Wohl liegen in vielen Lehrbüchern oder Tabellenwerken (Tab.1) tabellierte Werte der standardisierten Normalverteilung vor. Bedient man sich jedoch für die Auswertung eines elektronischen Rechengerätes, so ist es vorteilhaft, im Sinne von Unterprogrammen über geeignete Approximationen zu verfügen. Insbesondere möchten wir auf zwei geeignete Ansätze verweisen, die von C. Jr. Hastings [18] nach dem Verfahren der Tschebycheffschen Ausgleichung gewonnen wurden.

Für die *Häufigkeitsfunktion*

$$f^N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u}, \qquad \text{mit } u = \frac{z^2}{2}$$

genügt die Approximation

$$e^{-u} \approx \left[1 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4 + a_5 u^5 + a_6 u^6\right]^{-4} \tag{2.18}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,2499\,9868\,42 & a_4 &= 0,0001\,7156\,20 \\ a_2 &= 0,0312\,5758\,32 & a_5 &= 0,0000\,0543\,02 \\ a_3 &= 0,0025\,9137\,12 & a_6 &= 0,0000\,0069\,06. \end{aligned}$$

Diese Approximation ist mit einem Fehler behaftet, der dem Betrage nach kleiner ist als 0,0000 0025.

Für die Berechnung der Verteilungsfunktion $F(z)$ sei zunächst an die beiden Bedingungen

$$F^N(-z) = 1 - F^N(z) \tag{2.19}$$

und

$$F^N(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi, \qquad z \geqq 0$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z/\sqrt{2}} e^{-\eta^2} d\eta\right] \tag{2.20}$$

$$F^N(z) = \frac{1}{2}[1 + \Phi(v)], \qquad \text{mit } v = \frac{z}{\sqrt{2}}$$

erinnert. Es genügt somit

$$\Phi(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^v e^{-\eta^2} d\eta \tag{2.21}$$

durch den Ansatz

$$\Phi(v) \approx 1 - [1 + b_1 v + b_2 v^2 + b_3 v^3 + b_4 v^4 + b_5 v^5 + b_6 v^6]^{-16} \tag{2.22}$$

mit den Koeffizienten

$$b_1 = 0,0705\,2307\,84 \qquad b_4 = 0,0001\,5201\,43$$
$$b_2 = 0,0422\,8201\,23 \qquad b_5 = 0,0002\,7656\,72$$
$$b_3 = 0,0092\,7052\,72 \qquad b_6 = 0,0000\,4306\,38$$

zu approximieren. Der absolute Fehler ist kleiner als 0,0000 003.

3 Ausgewählte Verteilungen

31 Normalverteilung

311 Definition, Eigenschaften

Eine Zufallsvariable X heisst normalverteilt mit dem Durchschnitt $\mu[-\infty < \mu < \infty]$ und der Streuung $\sigma^2[\sigma^2 > 0]$ falls sie durch die Häufigkeitsfunktion

$$f^N(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{3.1}$$

die Verteilungsfunktion

$$F^N(x;\mu,\sigma^2) = \int_{-\infty}^{x} f^N(u;\mu,\sigma^2)\,du, \tag{3.2}$$

oder die charakteristische Funktion

$$\varphi^N(t;\mu,\sigma^2) = e^{it\mu-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \tag{3.3}$$

gekennzeichnet ist.

Vermittels der Transformation

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

geht die allgemeine Häufigkeitsfunktion $f^N(x;\mu,\sigma^2)$ in jene $f^N(z)$ der standardisierten Normalverteilung über

$$f^N(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma} f^N(z), \quad \text{mit } z = \frac{x-\mu}{\sigma}, \tag{3.4}$$

und

$$F^N(x;\mu,\sigma^2) = F^N(z), \quad \text{mit } z = \frac{x-\mu}{\sigma}. \tag{3.5}$$

Folgende charakteristische Grössen seien für die Normalverteilung festgehalten (bezüglich der Herleitungen sei auf K.G.Lüönd [23] verwiesen).

Nullmoment r-ter Ordnung:

$$\mu'_r = \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} \frac{r!}{2^\lambda \lambda!\,(r-2\lambda)!}\,\sigma^{2\lambda}\mu^{r-2\lambda}, \qquad r = 1, 2, \ldots. \tag{3.6}$$

Hauptmoment r-ter Ordnung:

$$\begin{aligned} r = 2\nu: &\qquad \mu_{2\nu} = \frac{(2\nu)!}{\nu!\,2^\nu}\,\sigma^{2\nu}, \qquad r = 1, 2, \ldots, \\ r = 2\nu+1: &\quad \mu_{2\nu+1} = 0, \qquad\qquad r = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Kumulante r-ter Ordnung:

$$\varkappa_1 = \mu, \quad \varkappa_2 = \sigma^2, \quad \varkappa_r = 0, \quad r = 3, 4, \ldots. \tag{3.8}$$

Standardisierte Kumulante erster bis vierter Ordnung:

$$\lambda_1 = \frac{\mu}{\sigma}, \; \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0. \tag{3.9}$$

Ausgezeichnete statistische Masszahlen

Durchschnitt:

$$\mu \equiv \mu_1' = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f^N(x; \mu, \sigma^2)\, dx = \mu. \tag{3.10}$$

Zentralwert:

$$x_z = \mu : F^N(\mu; \mu, \sigma^2) = \tfrac{1}{2}. \tag{3.11}$$

Häufigster Wert:

$$x_h = \mu : f^N(\mu; \mu, \sigma^2) = \operatorname{Max}\left[f^N(x; \mu, \sigma^2)\right]. \tag{3.12}$$

Streuung:

$$\sigma^2 \equiv \mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f^N(x; \mu, \sigma^2)\, dx = \sigma^2. \tag{3.13}$$

Schiefe:

$$\gamma_1 = \lambda_3 = 0. \tag{3.14}$$

Exzess:

$$\gamma_2 = \lambda_4 = 0. \tag{3.15}$$

Mit den Beziehungen (3.10) und (3.13) ist nachträglich der Nachweis erbracht, dass die beiden auftretenden Parameter (μ, σ^2) tatsächlich mit dem Durchschnitt und der Streuung der Normalverteilung übereinstimmen.

Das Verschwinden von Schiefe (3.14) und Exzess (3.15) stellt ein weiteres Charakteristikum der Normalverteilung dar. Übertragen auf die (γ_1^2, γ_2)-Ebene von Graphik 2 (Seite 112) schränkt sich demnach der *Geltungsbereich* der Normalverteilung auf den Punkt

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_1^2 &= 0, \\ \gamma_2 &= 0 \qquad \text{ein.} \end{aligned} \tag{3.16}$$

312 Schätzen der Parameter

312.1 *Methode der Maximum Likelihood*

Will man die beiden Parameter μ und σ^2 aus einer Stichprobe schätzen, so muss vorerst die Likelihoodfunktion nach (1.55) bestimmt werden

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(\mu, \sigma^2; x_i),$$

$$L(\mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \mathop{S}\limits_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2}. \tag{3.17}$$

Die Struktur der Likelihoodfunktion lässt bereits erkennen, dass die logarithmische Likelihoodfunktion

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln (2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} (x_i - \mu)^2$$

leichter zu maximieren ist. Aus (1.56)

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} (x_i - \mu) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} (x_i - \mu)^2 = 0,$$

ergeben sich die Maximum Likelihood Schätzwerte zu

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{n} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} x_i = \bar{x}, \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} (x_i - \bar{x})^2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Diese Schätzwerte erfüllen zunächst die Fisherschen Kriterien. Sollen erstere gleichzeitig noch zuverlässig sein – die Erwartungswerte der geschätzten Grössen haben in diesem Fall mit den zu schätzenden Parametern übereinzustimmen –, so bedingt dies lediglich eine Modifikation der zweiten Bestimmungsgleichung.

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{n} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} x_i = \bar{x}, \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-1} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} (x_i - \bar{x})^2 = s^2. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Durchschnitt und Streuung der empirischen Verteilung verbürgen zuverlässige Schätzwerte der beiden zu schätzenden Parameter (μ, σ^2) der Normalverteilung.

312.2 *Methode der Momente*

Als Ausgangsbeziehung bedienen wir uns der Nullmomente erster und zweiter Ordnung

$$\mu_1' = \mu,$$

$$\mu_2' = \mu^2 + \sigma^2,$$

und ersetzen die linken Seiten durch die entsprechenden empirischen Momente

$$m_1' \approx \mu,$$
$$m_2' \approx \mu^2 + \sigma^2.$$

Durch Auflösen der beiden Gleichungen findet man

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= m_1' = \bar{x}, \\ \hat{\sigma}^2 &= m_2' - m_1'^2 = m_2, \end{aligned} \tag{3.20}$$

im vorliegenden Fall stimmen die gefundenen Schätzwerte mit den Maximum-Likelihood-Schätzwerten überein. Wiederum können zuverlässige Schätzwerte gemäss Beziehung (3.19) aufgefunden und mit dem Durchschnitt sowie der Streuung der empirischen Verteilung identifiziert werden.

313 Güte der Anpassung

Soll lediglich abgeklärt werden, ob die Approximation einer empirischen Verteilung mittels einer Normalverteilungskurve mit den Parametern (μ, σ^2) zulässig ist, so kann dies ohne weiteres mit den im Abschnitt 14 dargelegten Tests für die einfache Hypothese (1.61) bewerkstelligt werden. Möchte man indessen darüber befinden, ob die Stichprobe überhaupt der Klasse der Normalverteilungen entstamme, so hat man die zusammengesetzte Hypothese

$$H_0 : F^N(x; \mu, \sigma^2) = F_0^N(x; \bar{x}, s^2) \tag{3.21}$$

zu prüfen, wo an Stelle der theoretischen Parameter (μ, σ^2) deren Schätzwerte $(\bar{x}, s^2)$ eingehen. Zur Beurteilung dieses Normalitätstestes greifen wir im folgenden die gebräuchlichsten Verfahren auf.

Die nunmehrige Bindung der postulierten Verteilungsfunktion F_0^N zu den Stichprobendaten bedingt zwangsläufig eine Modifikation der Verteilung der Testgrössen. Wohl bleiben gegenüber dem Prüfen der einfachen Hypothese die Verfahren dieselben; unterschiedlich dagegen fallen die massgebenden Sicherheitspunkte aus.

313.1 *Chiquadrattest*

Sind die Parameter der Normalverteilung μ und σ^2 mittels der Methode der Maximum Likelihood geschätzt worden, so befolgt nach

R. A. Fisher [12] die Grösse

$$X^2(N) = \sum_{j=1}^{m} \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j} \qquad (3.22) = (1.67)$$

(theoretischer Ansatz)

die Chiquadratverteilung mit $n^* = (m-1) - 2 = m - 3$ Freiheitsgraden. Gegenüber dem Ansatz (1.68) liegt die Modifikation darin begründet, dass jetzt die Zahl der Freiheitsgrade um die Anzahl s der zu schätzenden Parameter – im vorliegenden Fall $s = 2$ – reduziert wird.

Für die numerische Durchführung des Testes gelten die in Abschnitt 141 dargelegten Vereinfachungen (1.73) oder (1.74) sinngemäss.

313.2 *Kolmogoroff-Test*

Wie M. Kac, J. Kiefer und J. Wolfowitz [20] zeigen, ist bei Annahme einer Normalverteilung die Kolmogoroffsche Testgrösse

$$K_n(N) = \sqrt{n} \sup_{-\infty < x < \infty} |S_n(x) - F^N(x; \mu, \sigma^2)| \qquad (3.23)$$

(theoretischer Ansatz)

von den Parametern μ und σ^2 unabhängig. Zudem gelang es den Verfassern vermöge einer Monte-Carlo-Simulation, die Sicherheitspunkte für $n = 25$ und $n = 100$ (Tab.2) zu approximieren. Im Vergleich zur einfachen Hypothese sind die entsprechenden Sicherheitspunkte für die zusammengesetzte Hypothese kleiner, was auf die Tatsache zurückzuführen ist, dass die postulierte Verteilungsfunktion F_0^N zur Stichprobe gebunden ist.

Für praktische Belange eignet sich der Ansatz

$$K_n(N) = \sqrt{n} \max \left| \frac{i}{n} - F_0^N(x_i; \bar{x}, s^2) \right|, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.24)$$

(numerischer Ansatz).

313.3 *Cramér-von Mises-Smirnow-Test*

Für den in Abschnitt 143 dargelegten Test haben M. Kac, J. Kiefer und J. Wolfowitz [20] die spezifische parameterfreie Testgrösse

$$W_n^2(N) = n \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F^N(x; \mu, \sigma^2)]^2 \, dF^N(x; \mu, \sigma^2) \qquad (3.25)$$

(theoretischer Ansatz)

untersucht und mittels der Monte-Carlo-Methode einige für die praktische Anwendung wertvolle Sicherheitspunkte tabelliert (Tab. 2).

Für die numerische Auswertung sind die Ansätze (1.81) und (1.82) nach wie vor gültig, sofern darin die Werte der allgemeinen Verteilungsfunktion $F_0(x_{(i)})$ durch jene der speziellen $F_0^N(x_{(i)}; \bar{x}, s^2)$ ersetzt werden. Auch hier fallen die Sicherheitspunkte wesentlich kleiner aus als bei der früher dargelegten einfachen Hypothese (vergleiche Tab. 2*).

313.4 *Test der Schiefe und des Exzesses*

Sowohl Schiefe γ_1 als auch Exzess γ_2 der Normalverteilung sind Null. Um demnach die Abweichung einer empirischen Verteilung von einer Normalverteilung zu prüfen, können wir nach R. A. Fisher [15] Schiefe g_1 und Exzess g_2 rechnen und mittels deren Streuungen $\mathrm{var}(g_1)$ und $\mathrm{var}(g_2)$ testen, ob diese bloss zufällig von Null verschieden sind oder nicht. Ist entweder Schiefe oder Exzess oder sind beide wesentlich von Null verschieden, so schliessen wir auf eine signifikante Abweichung der empirischen Verteilung von der Normalverteilung.

Die Testgrössen

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{g_1 - E(g_1)}{\sqrt{\mathrm{var}(g_1)}}, \quad \text{asympt. n.v. } [0,1], \\ z_2 &= \frac{g_2 - E(g_2)}{\sqrt{\mathrm{var}(g_2)}}, \quad \text{asympt. n.v. } [0,1] \end{aligned} \tag{3.26}$$

(theoretische Ansätze)

sind für *grosse Stichproben* asymptotisch normalverteilt mit dem Durchschnitt 0 und der Streuung 1.

Für die numerische Auswertung lassen sich die Ansätze (3.26) weiter vereinfachen. Nach H. Cramér [8] gelten für normalverteilte Grundgesamtheiten nachstehende Beziehungen:

$$\begin{aligned} E(g_1) &= \lambda_3 = 0 \\ E(g_2) &= \lambda_3 = 0 \\ \mathrm{var}(g_1) &= \frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)} \approx \frac{6}{n} \\ \mathrm{var}(g_2) &= \frac{24n(n-1)^2}{(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)} \approx \frac{24}{n}, \end{aligned}$$

so dass sich unsere Testansätze wie folgt vereinfachen:

$$z_1 = g_1 \sqrt{\frac{n}{6}}, \quad \text{asympt. n.v. } [0,1],$$
$$z_2 = g_2 \sqrt{\frac{n}{24}}, \quad \text{asympt. n.v. } [0,1] \tag{3.27}$$
$$\text{(numerische Ansätze).}$$

Darin berechnen sich die beiden ausschlaggebenden Masszahlen g_1 und g_2 nach den Ansätzen (1.41) und (1.42)

$$g_1 = \frac{\hat{\varkappa}_3}{\hat{\varkappa}_2^{3/2}},$$

$$g_2 = \frac{\hat{\varkappa}_4}{\hat{\varkappa}_2^2},$$

unter Berücksichtigung der Bindungen der Kumulanten (1.36) zu den Hauptmomenten.

Für die Handhabung des z-Tests selbst sind die zweiseitigen Sicherheitspunkte z_P (Tab. 1*) verbindlich. Dabei darf nicht ausser acht gelassen werden, dass die Gültigkeit des Verfahrens an grosse Stichproben gebunden ist.

Für *kleine Stichprobenumfänge* haben E. S. Pearson und H. O. Hartley [30] für Schiefe g_1 und Exzess g_2 genaue Sicherheitspunkte $G1_{P,n}$ und $G2_{P,n}$ berechnet und tabelliert (Tab. 2).

Eine empirische Verteilung ist signifikant schief, falls g_1 dem Betrage nach grösser ist als der entsprechende Sicherheitspunkt $G1_{P,n}$.

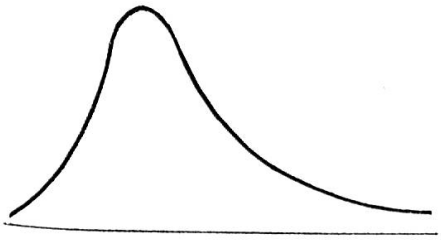
Der Exzess der empirischen Verteilung ist signifikant von Null verschieden, falls der errechnete Wert von g_2 kleiner als die untere resp. grösser als die obere Sicherheitsgrenze $G2_{P,n}$ ist. Da die Sicherheitspunkte des Exzesses für Stichproben vom Umfange kleiner als 200 nicht angegeben werden konnten, führte R. C. Geary [16] eine neue Masszahl des Exzesses ein

$$a = \frac{\overset{n}{\underset{i=1}{S}} |x_i - \bar{x}|}{\left[n \overset{n}{\underset{i=1}{S}} (x_i - \bar{x})^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{(numerischer Ansatz)}, \tag{3.28}$$

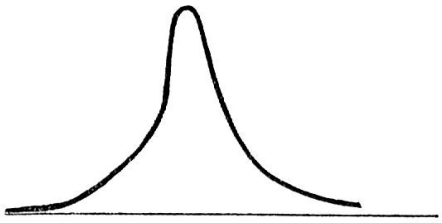
definiert als Quotient der durchschnittlichen Abweichung zur mittleren quadratischen Abweichung. Der Erwartungswert und die Sicher-

heitspunkte $A_{P,n}$ der Testgrösse a konnten auch für kleine Stichproben angegeben werden. Dabei ist der ermittelte Wert a signifikant von seinem Erwartungswert verschieden, falls dieser kleiner als die untere resp. grösser als die obere Sicherheitsgrenze $A_{P,n}$ (Tab. 2) ist, und die Hypothese – die Stichprobe entstamme einer Normalverteilung – ist abzulehnen.

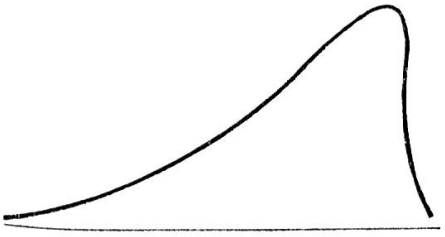
Für die Interpretation der Signifikanz von Schiefe und/oder Exzess beachte man die folgenden grundsätzlichen Abweichungen von der Normalverteilung:



$g_1 > 0$: linkssteil



$g_2 > 0$: leptokurtisch, überhöht, straff



$g_1 < 0$: rechtssteil

$g_2 < 0$: platykurtisch, flach

32 Gram-Charlier-Verteilung

321 Definition, Eigenschaften

Weicht eine Verteilung $f(x)$ nicht zu stark von der Normalverteilung ab, so lässt sich diese durch eine Reihe darstellen, deren Glieder eine enge Bindung zur Normalverteilung aufweisen. Nach J. P. Gram [17] und C. V. L. Charlier [4] betrachten wir die formale Entwicklung der Häufigkeitsfunktion $f(z)$ einer standardisierten Zufallsvariablen $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} \frac{d^\nu}{dz^\nu} f^N(z) \tag{3.29}$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$c_\nu = (-1)^\nu \int_{-\infty}^{\infty} H_\nu(z)\, f^N(z)\, dz. \tag{3.30}$$

Die ersten fünf Koeffizienten lauten

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -\gamma_1, \quad c_4 = \gamma_2.$$

Vernachlässigt man in der Gram-Charlier-Reihe die Ableitungen höherer als 4-ter Ordnung, so wird die abgebrochene Reihenentwicklung als *Gram-Charlier-Verteilung* bezeichnet, deren wichtigste Eigenschaften im folgenden erwähnt seien.

Eine Zufallsvariable X sei Gram-Charlier-verteilt mit dem Durchschnitt $\mu[-\infty < \mu < \infty]$, der Streuung $\sigma^2[\sigma^2 > 0]$, der Schiefe γ_1 und dem Exzess γ_2, falls sie charakterisiert ist durch die Häufigkeitsfunktion

$$f^G(x;\mu,\sigma^2,\gamma_1,\gamma_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \left[1 + \frac{\gamma_1}{3!} H_3\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \frac{\gamma_2}{4!} H_4\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right],$$
$$-\infty < x < \infty \tag{3.31}$$

die Verteilungsfunktion

$$F^G(x;\mu,\sigma^2,\gamma_1,\gamma_2) = \int_{-\infty}^{x} f^G(u;\mu,\sigma^2,\gamma_1,\gamma_2)\, du \tag{3.32}$$

oder die charakteristische Funktion

$$\varphi^G(t;\mu,\sigma^2,\gamma_1,\gamma_2) = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}} \left[1 - \frac{\gamma_1}{3!}(-i\sigma t)^3 + \frac{\gamma^2}{4!}(-i\sigma t)^4\right]. \tag{3.33}$$

Zwischen der Gram-Charlier-Verteilung und der Standardform der Normalverteilung bestehen die Beziehungen

$$f^G(x;\mu,\sigma^2,\gamma_1,\gamma_2) = \frac{1}{\sigma} f^N(z) \left[1 + \frac{\gamma_1}{3!} H_3(z) + \frac{\gamma_4}{4!} H_4(z)\right], \tag{3.34}$$

$$\text{mit } z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

und

$$F^G(x;\mu,\sigma^2,\gamma_1,\gamma_2) = F^N(z) - f^N(z) \left[\frac{\gamma_1}{3!} H_2(z) + \frac{\gamma_2}{4!} H_3(z)\right], \tag{3.35}$$

$$\text{mit } z = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

Nullmoment erster Ordnung:

$$\mu_1' = \int_{-\infty}^{\infty} x f^G(x)\, dx = \mu. \tag{3.36}$$

Hauptmoment r-ter Ordnung:

$$\begin{aligned} r = 2\nu: \quad \mu_{2\nu} &= \frac{(2\nu)!\,\sigma^{2\nu}}{\nu!\,2^\nu}\left[1 + \nu(\nu-1)\frac{\gamma_2}{3!}\right], \quad \nu = 1, 2, \ldots, \\ r = 2\nu+1: \mu_{2\nu+1} &= \frac{(2\nu+1)!\,\sigma^{2\nu+1}}{(\nu-1)!\,2^{\nu-1}}\,\frac{\gamma_1}{3!}, \quad \nu = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Insbesondere sind

$$\mu_2 = \sigma^2, \quad \mu_3 = \gamma_1 \sigma^3, \quad \mu_4 = (\gamma_2 + 3)\,\sigma^4.$$

Kumulante erster bis vierter Ordnung

$$\varkappa_1 = \mu, \quad \varkappa_2 = \sigma^2, \quad \varkappa_3 = \gamma_1 \sigma^3, \quad \varkappa_4 = \gamma_2 \sigma^4. \tag{3.38}$$

Standardisierte Kumulante erster bis vierter Ordnung:

$$\lambda_1 = \frac{\mu}{\sigma}, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \gamma_1, \quad \lambda_4 = \gamma_2, \tag{3.39}$$

Ausgezeichnete statistische Masszahlen

Durchschnitt: $\mu \equiv \mu_1' = \mu.$ (3.40)

Streuung: $\sigma^2 \equiv \mu_2 = \sigma^2.$ (3.41)

Schiefe: $\gamma_1 \equiv \lambda_3 = \gamma_1.$ (3.42)

Exzess: $\gamma_2 \equiv \lambda_4 = \gamma_2.$ (3.43)

Die in Ansatz (3.31) der Gram-Charlier-Verteilung auftretenden Parameter $(\mu, \sigma^2, \gamma_1, \gamma_2)$ stimmen mit den ausgezeichneten statistischen Masszahlen Durchschnitt, Streuung, Schiefe und Exzess überein.

Aus der Forderung, die Häufigkeitsfunktion $f^G(x)$ der Gram-Charlier-Verteilung sei positiv definit und falle eingipflig aus, lässt sich die für Schiefe und Exzess bestehende wechselseitige Bindung aufsuchen. D. E. Barton und K. E. Dennis [3] haben den massgebenden *Geltungsbereich* ermittelt, den wir in der Graphik 2 (Seite 112) wiedergeben.

322 Schätzen der Parameter

Für die Methode der Maximum Likelihood kann die Likelihoodfunktion wohl formal angegeben werden, doch lässt sie sich nicht auf eine einfache Weise weiterverarbeiten.

Die Methode der Momente liefert als Schätzwerte für die Parameter μ, σ^2, γ_1 und γ_2 die empirischen nicht zuverlässigen statistischen Masszahlen Durchschnitt, Streuung, Schiefe und Exzess. Bessere Schätzwerte erhält man dann, wenn die empirischen Hauptmomente durch die zuverlässigen Schätzwerte (1.35) derselben ersetzt werden und diese in die entsprechenden Bindungen (1.38), (1.41) und (1.42) einsetzt.

$$\hat{\mu} = \bar{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = s^2, \quad \hat{\gamma}_1 = g_1, \quad \hat{\gamma}_2 = g_2. \tag{3.44}$$

323 Güte der Anpassung

Da die theoretische Verteilung der Testgrössen für die zusammengesetzte Hypothese

$$H_0: F^G(x; \mu, \sigma^2, \gamma_1, \gamma_2) = F_0^G(x; \bar{x}, s^2, g_1, g_2) \tag{3.45}$$

nicht bekannt ist – insbesondere ist der Chiquadrattest nur dann anwendbar, falls die vorkommenden Parameter nach der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden können, was im vorliegenden Fall nicht möglich ist –, drängt sich zwangsläufig das Testen der einfachen Hypothese

$$H_0: F(x) = F_0^G(x; \mu = \bar{x}, \sigma^2 = s^2, \gamma_1 = g_1, \gamma_2 = g_2) \tag{3.46}$$

auf. Mittels dieser Problemlage wird nunmehr geprüft, ob sich die empirische Verteilung durch eine spezifische Gram-Charlier-Verteilung approximieren lässt; hierzu sind die in den Abschnitten 141 bis 144 behandelten Testverfahren verbindlich.

33 Edgeworth-Verteilung

331 Definition, Eigenschaften

Eine leichte modifizierte Reihenentwicklung der Häufigkeitsfunktion $f(z)$ schlug F.Y.Edgeworth [9] vor.

$$f(x) = f^N(z) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\gamma_1}{3!} H_3(z) + \frac{1}{n} \left(\frac{\gamma_2}{4!} H_4(z) + \frac{\gamma_1^2}{72} H_6(z) \right) + \ldots \right]. \tag{3.47}$$

Eine explizite Herleitung dieser Edgeworth-Reihe findet sich bei T. Schläpfer [31] oder H. Cramér [8]. Bricht man die Reihe mit den Gliedern von der Ordnung n^{-1} ab, so entsteht eine Edgeworth-Verteilung.

Eine Zufallsvariable X heisst Edgeworth-verteilt mit dem Durchschnitt $\mu[-\infty < \mu < \infty]$, der Streuung $\sigma^2[\sigma^2 > 0]$, der Schiefe γ_1 und dem Exzess γ_2, wenn diese gekennzeichnet ist durch die Häufigkeitsfunktion

$$f^E(x;\mu,\sigma^2,\gamma_1,\gamma_2) =$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\left[1+\frac{\gamma_1}{3!}H_3\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)+\frac{\gamma_2}{4!}H_4\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)+\frac{\gamma_1^2}{72}H_6\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right],$$

$$-\infty < x < \infty, \qquad (3.48)$$

die Verteilungsfunktion

$$F^E(x;\mu,\sigma^2,\gamma_1,\gamma_2) = \int_{-\infty}^{x} f^E(u;\mu,\sigma^2,\gamma_1,\gamma_2)\,du \qquad (3.49)$$

oder die charakteristische Funktion

$$\varphi^E(t;\mu,\sigma^2,\gamma_1,\gamma_2) = e^{it\mu-\frac{t^2\sigma^2}{2}}\left[1-\frac{\gamma_1}{3!}(-i\sigma t)^3+\frac{\gamma_2}{4!}(-i\sigma t)^4+\frac{\gamma_1^2}{72}(-i\sigma t)^6\right]. \qquad (3.50)$$

Auch die Edgeworth-Verteilung kann in Beziehung gebracht werden mit der Standardform der Normalverteilung.

$$f^E(x;\mu,\sigma^2,\gamma_1,\gamma_2) = \frac{1}{\sigma}f^N(z)\left[1+\frac{\gamma_1}{3!}H_3(z)+\frac{\gamma_2}{4!}H_4(z)+\frac{\gamma_1^2}{72}H_6(z)\right],$$

$$\text{mit } z = \frac{x-\mu}{\sigma}. \qquad (3.51)$$

$$F^E(x;\mu,\sigma^2,\gamma_1,\gamma_2) = F^N(z) - f^N(z)\left[\frac{\gamma_1}{3!}H_2(z)+\frac{\gamma_2}{4!}H_3(z)+\frac{\gamma_1^2}{72}H_5(z)\right],$$

$$\text{mit } z = \frac{x-\mu}{\sigma}. \qquad (3.52)$$

Nullmoment erster Ordnung:

$$\mu_1' = \int_{-\infty}^{\infty} x f^E(x)\,dx = \mu. \qquad (3.53)$$

Hauptmoment r-ter Ordnung:

$$r = 2\nu: \qquad \mu_{2\nu} = \frac{(2\nu)!\,\sigma^{2\nu}}{\nu!\,2^{\nu}}\left\{1 + \frac{\nu/(\nu-1)}{3}\left[\frac{\gamma_2}{2} + \frac{(\nu-2)\,\gamma_1^2}{3}\right]\right\},$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, \qquad (3.54)$$

$$r = 2\nu+1: \mu_{2\nu+1} = \frac{(2\nu+1)!\,\sigma^{2\nu+1}}{(\nu-1)!\,2^{\nu-1}}\,\frac{\gamma_1}{3!}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Die ersten 3 Hauptmomente sind

$$\mu_2 = \sigma^2, \quad \mu_3 = \gamma_1\sigma^3, \quad \mu_4 = (\gamma_2 + 3)\,\sigma^4.$$

Da das Nullmoment erster Ordnung und die Hauptmomente zweiter, dritter und vierter Ordnung der Edgeworth-Verteilung mit jenen der Gram-Charlier-Verteilung (3.36) und (3.37) übereinstimmen, trifft dies auch für die Kumulanten und standardisierten Kumulanten erster bis vierter Ordnung zu.

Ausgezeichnete statistische Masszahlen

Durchschnitt: $\mu \equiv \mu_1' = \mu.$ (3.55)

Streuung: $\sigma^2 \equiv \mu_2 = \sigma^2.$ (3.56)

Schiefe: $\gamma_1 \equiv \lambda_3 = \gamma_1.$ (3.57)

Exzess: $\gamma_2 \equiv \lambda_4 = \gamma_2.$ (3.58)

Erneut stimmen bei der Edgeworth-Verteilung die Parameter $(\mu, \sigma^2, \gamma_1, \gamma_2)$ mit den statistischen Masszahlen Durchschnitt, Streuung, Schiefe und Exzess überein. Analog zur Gram-Charlier-Verteilung sind auch Schiefe γ_1 und Exzess γ_2 wechselseitig gebunden; wobei allerdings der *Geltungsbereich* unterschiedlich ausfällt. Diesbezüglich sei auf das von D.E.Barton und K.E.Dennis [3] ermittelte und in Graphik 2 (Seite 112) dargestellte Gebiet der (γ_1^2, γ_2)-Ebene verwiesen.

332 Schätzen der Parameter, Güte der Anpassung

Für die Edgeworth-Verteilung gelten die früher für die Gram-Charlier-Verteilung in den Abschnitten 322 und 323 gemachten Überlegungen sinngemäss.

34 Lognormalverteilung

341 Definition, Eigenschaften

Eine Zufallsvariable Y heisst lognormalverteilt mit den Parametern $\alpha\,[-\infty < \alpha < \infty]$ und $\beta^2\,[\beta^2 > 0]$, wenn sie charakterisiert ist durch die Häufigkeitsfunktion

$$f^{LN}(y;\alpha,\beta^2) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{y}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y-\alpha}{\beta}\right)^2}, \quad y > 0 \qquad (3.59)$$

oder durch die Verteilungsfunktion

$$F^{LN}(y;\alpha,\beta^2) = \int_{-\infty}^{y} f^{LN}(u;\alpha,\beta^2)\,du. \qquad (3.60)$$

Da die charakteristische Funktion der Lognormalverteilung elementar nicht darstellbar ist, wird davon abgesehen, $\varphi^{LN}(y;\alpha,\beta^2)$ in die Definitionsbeziehung einzuschliessen.

Ist X eine normalverteilte Zufallsvariable, so ist $Y = e^X$ eine lognormalverteilte Zufallsvariable. Die Transformation $x = \ln y$ führt die Lognormalverteilung in eine Normalverteilung über

$$f^{LN}(y;\alpha,\beta^2) = e^{-x} f^N(x;\alpha,\beta^2), \quad \text{mit } x = \ln y, \qquad (3.61)$$

mit dem Durchschnitt $\mu = \alpha$ und der Streuung $\sigma^2 = \beta^2$.

Die Transformation $z = \dfrac{\ln y - \alpha}{\beta}$ gestattet, die Lognormalverteilung direkt mit der Standardform der Normalverteilung in Beziehung zu setzen.

$$f^{LN}(y;\alpha,\beta^2) = \frac{1}{\beta}\,e^{-\alpha-\beta z} f^N(z), \quad \text{mit } z = \frac{\ln y-\alpha}{\beta} \qquad (3.62)$$

und

$$F^{LN}(y;\alpha,\beta^2) = F^N(z), \qquad \text{mit } z = \frac{\ln y-\alpha}{\beta}. \qquad (3.63)$$

Sind die Nullmomente funktional bestimmt, so lassen sich alle übrigen charakteristischen Grössen gemäss (1.7) bis (1.19) leicht herleiten.

Nullmoment r-ter Ordnung:

Nach (1.5) ist

$$\mu_r' = \int_0^\infty y^r f^{LN}(y;\alpha,\beta^2)\,dy;$$

vermöge der Transformation $y = e^x$ wird

$$\begin{aligned} \mu_r' &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} f^N(x; \alpha, \beta^2)\, dx, \\ \mu_r' &= e^{r\alpha + \frac{1}{2} r^2 \beta^2}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Hauptmomente zweiter bis vierter Ordnung:

Setzen wir im folgenden der einfachen Darstellung wegen für $e^{\beta^2} = \varepsilon > 1$ und für $e^{\alpha + \frac{1}{2}\beta^2} = \mu$, so sind

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu^2(\varepsilon - 1) \\ \mu_3 &= \mu^3(\varepsilon - 1)^2 (\varepsilon + 2) \\ \mu_4 &= \mu^4(\varepsilon - 1)^2 (\varepsilon^4 + 2\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 - 3). \end{aligned} \tag{3.65}$$

Kumulanten erster bis vierter Ordnung:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \mu \\ \varkappa_2 &= \mu^2(\varepsilon - 1) \\ \varkappa_3 &= \mu^3(\varepsilon - 1)^2 (\varepsilon + 2) \\ \varkappa_4 &= \mu^4(\varepsilon - 1)^2 [\varepsilon^4 + 2\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 - 6]. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Standardisierte Kumulanten erster bis vierter Ordnung:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (\varepsilon - 1)^{-\frac{1}{2}} \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= (\varepsilon - 1)^{\frac{1}{2}} (\varepsilon + 2) \\ \lambda_4 &= \varepsilon^4 + 2\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 - 6. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Ausgezeichnete statistische Masszahlen

Durchschnitt: $$\mu = \mu_1' = e^{\alpha + \frac{1}{2}\beta^2}. \tag{3.68}$$

Zentralwert: $$x_z = e^{\alpha} : F^{LN}(e^{\alpha}; \alpha, \beta^2) = \tfrac{1}{2}. \tag{3.69}$$

Häufigster Wert:

$$x_h = e^{\alpha - \beta^2} : f^{LN}(e^{\alpha - \beta^2}; \alpha, \beta^2) = \operatorname{Max}\left[f^{LN}(y; \alpha, \beta^2)\right]. \tag{3.70}$$

Der Vergleich der drei Lageparameter x_h, x_z und μ gibt Aufschluss über die Schiefe der Verteilung. Für die Lognormalverteilung gilt die Relation

$$x_h < x_z < \mu;$$

d.h. die Lognormalverteilung ist eine linkssteile Verteilung.

Streuung: $\sigma^2 = \mu_2 = e^{2\alpha+\beta^2}(e^{\beta^2}-1)$. (3.71)

Schiefe: $\gamma_1 = \lambda_3 = (\varepsilon-1)^{\frac{1}{2}}(\varepsilon+2) > 0$, (linkssteil). (3.72)

Exzess: $\gamma_2 = \lambda_4 = \varepsilon^4 + 2\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 - 6 > 0$, (leptokurtisch). (3.73)

Aus der kritischen Beurteilung der ausgezeichneten statistischen Masszahlen folgert man, dass bei der Lognormalverteilung Schiefe γ_1 und Exzess γ_2 in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen. Letzteres lässt sich in der (γ_1^2, γ_2)-Ebene als Kurve deuten mit der Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= (\varepsilon-1)(\varepsilon+2)^2, \\ \gamma_2 &= \varepsilon^4 + 2\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 - 6. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Diese in Graphik 2 (Seite 112) vorgemerkte Bindung zwischen Schiefe und Exzess ist ein Charakteristikum für den *Geltungsbereich* der Lognormalverteilung.

342 Schätzen der Parameter

342.1 *Methode der Maximum Likelihood*

Sollen die beiden Parameter α und β^2 aus Stichprobendaten geschätzt werden, so sucht man zunächst nach (1.55) die Likelihoodfunktion

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta^2) &= \prod_{i=1}^{n} f(\alpha, \beta^2; y_i) \\ &= \left(\frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i}\right) e^{-\frac{1}{2\beta^2} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} (\ln y_i - \alpha)^2}. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Beidseitig logarithmiert ergibt

$$\ln L(\alpha, \beta^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\beta^2) - \overset{n}{\underset{i=1}{S}} \ln y_i - \frac{1}{2\beta^2} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} (\ln y_i - \alpha)^2.$$

Die Auflösung des Gleichungssystems

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta^2} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} (\ln y_i - \alpha) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta^2} = -\frac{n}{2\beta^2} + \frac{1}{2\beta^4} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} (\ln y_i - \alpha)^2 = 0,$$

führt zu den Maximum-Likelihood-Schätzwerten

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{1}{n} \underset{i=1}{\overset{n}{S}} \ln y_i, \\ \hat{\beta}^2 &= \frac{1}{n} \underset{i=1}{\overset{n}{S}} \left[\ln y_i - \frac{1}{n} \underset{i=1}{\overset{n}{S}} \ln y_i \right]^2. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Die Schätzwerte sind zuverlässig mit minimaler Streuung, wenn wir den zweiten Ausdruck leicht modifizieren.

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{1}{n} \underset{i=1}{\overset{n}{S}} \ln y_i, \\ \hat{\beta}^2 &= \frac{1}{n-1} \underset{i=1}{\overset{n}{S}} \left[\ln y_i - \frac{1}{n} \underset{i=1}{\overset{n}{S}} \ln y_i \right]^2. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Der Vergleich dieser Schätzwerte mit der früher hergeleiteten Relation (3.19) lässt erkennen, dass α und β^2 leicht zu schätzen sind. Die ursprünglichen Stichprobenelemente y_i werden logarithmisch transformiert $x_i = \ln y_i$, deren Durchschnitt $\bar{x}$ und Streuung $s^2(x)$ errechnet und mit den zu schätzenden Parameter α und β^2 identifiziert.

342.2 *Methode der Momente*

Die beiden ersten Nullmomente sind gemäss (3.64)

$$\begin{aligned} \mu_1' &= e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}}. \\ \mu_2' &= e^{2\alpha + 2\beta^2}. \end{aligned}$$

Ersetzt man die linken Seiten durch die empirischen Nullmomente

$$\begin{aligned} m_1' &\approx e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}}, \\ m_2' &\approx e^{2\alpha + 2\beta^2}, \end{aligned}$$

so führt die Auflösung auf die Schätzwerte

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= 2 \ln m_1' - \tfrac{1}{2} \ln m_2', \\ \hat{\beta}^2 &= 2 \ln m_1' + \ln m_2'. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Diese weichen von den Maximum-Likelihood-Schätzwerten ab.

343 Güte der Anpassung

Soll über die Güte der Approximation mittels einer Lognormalverteilungskurve mit den Parametern (α, β^2) befunden werden, so ist die einfache Hypothese mit den in 14 dargelegten Testverfahren sinnvoll.

Soll zusätzlich darüber befunden werden, ob die empirische Verteilung der Klasse der Lognormalverteilungen entstamme, so ist die zusammengesetzte Hypothese

$$H_0 : F^{LN}(y; \alpha, \beta^2) = F_0^{LN}(y; \hat{\alpha}, \hat{\beta}^2) \qquad (3.79)$$

zu prüfen. Die Wahl der spezifischen Verteilungsfunktion F_0^{LN} modifiziert insbesondere die Sicherheitspunkte der gebräuchlichen Testverfahren. Für die Lognormalverteilung ist die theoretische Verteilung der in 14 aufgeführten Testgrössen heute nur für den Chiquadrattest bekannt. Behelfsmässig bedient man sich gewisser Transformationstests, die auf der logarithmischen Bindung der Lognormalverteilung zur Normalverteilung beruhen.

343.1 *Chiquadrattest*

Sind die Parameter der Lognormalverteilung (α, β^2) mittels der Methode der Maximum Likelihood geschätzt worden, so befolgt nach R. A. Fisher [12] die Testgrösse

$$X^2(LN) = \sum_{j=1}^{m} \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j} \qquad (3.80) = (1.67)$$

(theoretischer Ansatz)

die Chiquadratverteilung mit $n^* = (m-1)-2 = m-3$ Freiheitsgraden; die Zahl der Freiheitsgrade erniedrigt sich um die Anzahl der zu schätzenden Parameter.

Für die Durchführung des Tests finden die numerischen Ansätze (1.73) oder (1.74) Anwendung.

343.2 *Transformationstests*

Die Transformation $x_i = \ln y_i$ führt die lognormalverteilten Stichprobenelemente in normalverteilte über. Wir testen die zusammengesetzte Hypothese nach einem der im Abschnitt 313 dargelegten Verfahren. Wird die Hypothese der Normalität (3.21) abgelehnt, so lehnen wir ebenfalls die Hypothese der Lognormalität (3.79) ab.

35 Logarithmische Gram-Charlier-Verteilung

351 Definition, Eigenschaften

Eine Zufallsvariable Y heisst logarithmisch Gram-Charlier-verteilt mit den Parametern $\alpha\,[-\infty < \alpha < \infty]$, $\beta^2\,[\beta^2 > 0]$, η_1 und η_2, wenn deren Häufigkeitsfunktion zu

$$f^{LG}(y;\alpha,\beta^2,\eta_1,\eta_2) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{y}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y-\alpha}{\beta}\right)^2}\left[1+\frac{\eta_1}{3!}H_3\left(\frac{\ln y-\alpha}{\beta}\right)+\frac{\eta_2}{4!}H_4\left(\frac{\ln y-\alpha}{\beta}\right)\right],$$

$$0 < y < \infty, \qquad (3.81)$$

oder deren Verteilungsfunktion zu

$$F^{LG}(y;\alpha,\beta^2,\eta_1,\eta_2) = \int_{-\infty}^{y} f^{LG}(u;\alpha,\beta^2,\eta_1,\eta_2)\,du \qquad (3.82)$$

gegeben ist.

Vermöge der Transformation $x = \ln y$ geht die logarithmische Gram-Charlier-Verteilung über in die gewöhnliche Gram-Charlier-Verteilung.

$$f^{LG}(y;\alpha,\beta^2,\eta_1,\eta_2) = e^{-x} f^{G}(x;\alpha,\beta^2,\eta_1,\eta_2), \quad \text{mit } x = \ln y. \qquad (3.83)$$

Eine weitere Transformation $z = \dfrac{\ln y-\alpha}{\beta}$ bindet die logarithmische Gram-Charlier-Verteilung direkt zur Standardform der Normalverteilung.

$$f^{LG}(y;\alpha,\beta^2,\eta_1,\eta_2) = \frac{1}{\beta}\,e^{-\alpha-\beta z} f^{N}(z)\left[1+\frac{\eta_1}{3!}H_3(z)+\frac{\eta_2}{4!}H_4(z)\right]$$

$$\text{mit } z = \frac{\ln y-\alpha}{\beta}. \qquad (3.84)$$

$$F^{LG}(y;\alpha,\beta^2,\eta_1,\eta_2) = F^{N}(z) - f^{N}(z)\left[\frac{\eta_1}{3!}H_2(z)+\frac{\eta_2}{4!}H_3(z)\right],$$

$$\text{mit } z = \frac{\ln y-\alpha}{\beta}. \qquad (3.85)$$

Nullmoment r-ter Ordnung

$$\mu_r' = \int_0^{\infty} y^r f^{LG}(y)\,dy$$

oder unter Verwendung der Transformation $y = e^x$

$$\mu_r' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} f^{G}(x)\,dx.$$

Der Vergleich mit der charakteristischen Funktion der gewöhnlichen Gram-Charlier-Verteilung

$$\varphi^G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f^G(x)\, dx$$

lässt erkennen, dass die gesuchten μ_r' unmittelbar aus der Beziehung (3.33) hergeleitet werden können unter Beachtung folgender Substitutionen $it = r$, $\mu = \alpha$, $\sigma^2 = \beta^2$, $\gamma_1 = \eta_1$ und $\gamma_2 = \eta_2$:

$$\mu_r' = e^{r\alpha + \frac{r^2\beta^2}{2}} \left[1 + \frac{\eta_1}{3!}(r\beta)^3 + \frac{\eta_2}{4!}(r\beta)^4\right], \quad r = 1, 2, \ldots. \qquad (3.86)$$

Da die Hauptmomente, Kumulanten und statistischen Masszahlen sich nicht übersichtlich darstellen lassen, verzichten wir darauf, diese explizite aufzuführen. Vermerkt sei aber, dass sich sämtliche vorerwähnten Grössen mittels einer elektronischen Rechenanlage auf Grund der Definitionsbeziehungen (1.7) bis (1.19) ohne weiteres für beliebige Parameterkombinationen aus den Nullmomenten bestimmen lassen.

352 Schätzen der Parameter

Sollen die Parameter $(\alpha, \beta^2, \eta_1, \eta_2)$ aus empirischen Daten y_i geschätzt werden, so sind diese vorgängig logarithmisch zu transformieren $x_i = \ln y_i$. Für die transformierte Stichprobe ermittelt man alsdann nach Beziehung (3.44) die statistischen Masszahlen $\hat{\mu}(x_i)$, $\hat{\sigma}^2(x_i)$, $\hat{\gamma}_1(x_i)$ und $\hat{\gamma}_2(x_i)$; welche die gesuchten Schätzwerte bilden.

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(y_i) &= \hat{\mu}(x_i) \\ \hat{\beta}^2(y_i) &= \hat{\sigma}^2(x_i) \\ \hat{\eta}_1(y_i) &= \hat{\gamma}_1(x_i) \\ \hat{\eta}_2(y_i) &= \hat{\gamma}_2(x_i). \end{aligned} \qquad \text{mit } x_i = \ln y_i \qquad (3.87)$$

353 Güte der Anpassung

Analog zu den Erwägungen bei der gewöhnlichen Gram-Charlier-Verteilung ist hier nur das Testen der einfachen Hypothese

$$H_0: F(y) = F_0^{LG} \quad (y; \alpha = \hat{\alpha},\ \beta^2 = \hat{\beta}^2,\ \eta_1 = \hat{\eta}_1,\ \eta_2 = \hat{\eta}_2) \qquad (3.88)$$

sinnvoll.

36 Logarithmische Edgeworth-Verteilung

361 Definition, Eigenschaften

Die Zufallsvariable Y heisst logarithmisch Edgeworth-verteilt mit den Parametern $\alpha\,[-\infty < \alpha < \infty]$, $\beta^2\,[\beta^2 > 0]$, η_1 und η_2, wenn diese durch die Häufigkeitsfunktion

$$f^{LE}(y;\alpha,\beta^2,\eta_1,\eta_2) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{y}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y-\alpha}{\beta}\right)^2}$$

$$\cdot\left[1+\frac{\eta_1}{3!}H_3\left(\frac{\ln y-\alpha}{\beta}\right)+\frac{\eta_2}{4!}H_4\left(\frac{\ln y-\alpha}{\beta}\right)+\frac{\eta_1^2}{72}H_6\left(\frac{\ln y-\alpha}{\beta}\right)\right],$$

$$0 < y < \infty \qquad (3.89)$$

oder durch die Verteilungsfunktion

$$F^{LE}(y;\alpha,\beta^2,\eta_1,\eta_2) = \int_{-\infty}^{y} f^{LE}(u;\alpha,\beta^2,\eta_1,\eta_2)\,du \qquad (3.90)$$

charakterisiert ist.

Die Transformation $x = \ln y$ führt die logarithmische Edgeworth-Verteilung in die gewöhnliche Edgeworth-Verteilung über.

$$f^{LE}(y;\alpha,\beta^2,\eta_1,\eta_2) = e^{-x} f^{E}(x;\alpha,\beta^2,\eta_1,\eta_2), \quad \text{mit } x = \ln y. \qquad (3.91)$$

Zur Standardform der Normalverteilung lässt sich $f^{LE}(y)$ vermöge der Transformation $z = \dfrac{\ln y-\alpha}{\beta}$ in Beziehung setzen.

$$f^{LE}(y;\alpha,\beta^2,\eta_1,\eta_2) = \frac{1}{\beta}e^{-\alpha-\beta z}f^{N}(z)\left[1+\frac{\eta_1}{3!}H_3(z)+\frac{\eta_2}{4!}H_4(z)+\frac{\eta_1^2}{72}H_6(z)\right],$$

$$\text{mit } z = \frac{\ln y-\alpha}{\beta} \qquad (3.92)$$

und

$$F^{LE}(y;\alpha,\beta^2,\eta_1,\eta_2) = F^{N}(z) - f^{N}(z)\left[\frac{\eta_1}{3!}H_2(z)+\frac{\eta_2}{4!}H_3(z)+\frac{\eta_1^2}{72}H_5(z)\right],$$

$$\text{mit } z = \frac{\ln y-\alpha}{\beta}. \qquad (3.93)$$

Nullmoment r-ter Ordnung:

Aus
$$\mu_r' = \int_0^\infty y^r f^{LE}(y)\, dy = \int_{-\infty}^\infty e^{rx} f^E(x)\, dx$$

und der charakteristischen Funktion der gewöhnlichen Edgeworth-Verteilung (3.50)
$$\varphi^E(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{itx} f^E(x)\, dx$$

lässt sich die Relation

$$\mu_r' = e^{r\alpha + \frac{r^2\beta^2}{2}} \left[1 + \frac{\eta_1}{3!}(r\beta)^3 + \frac{\eta_2}{4!}(r\beta)^4 + \frac{\eta_1^2}{72}(r\beta)^6\right] \qquad (3.94)$$

direkt ablesen, falls die Substitutionen $it = r$, $\mu = \alpha$, $\sigma^2 = \beta^2$, $\gamma_1 = \eta_1$ und $\gamma_2 = \eta_2$ berücksichtigt werden.

Für das Aufsuchen der Hauptmomente, Kumulanten und statistischen Masszahlen sei erneut auf die Grundbeziehungen (1.7) bis (1.19) verwiesen, die die Bindungen zu den Nullmomenten für beliebige Parameterkombinationen $(\alpha, \beta^2, \eta_1, \eta_2)$ gewährleisten.

362 Schätzen der Parameter, Güte der Anpassung

Für die logarithmische Edgeworth-Verteilung gelten die früher für die logarithmische Gram-Charlier-Verteilung in den Abschnitten 352 und 353 gemachten Überlegungen sinngemäss.

4 Einsatz elektronischer Rechengeräte

Die im Kapitel 3 behandelten Verteilungen sind durchwegs geeignet für den Einsatz elektronischer Rechenanlagen. Wenden wir uns demnach in aller Kürze der Programmierung zu; auf eine Wiedergabe der bisher ausgearbeiteten Groblösung wird an dieser Stelle verzichtet[1]).

Das Hauptprogramm, das aus einer Reihe von Unterprogrammen besteht, gestattet eine Verarbeitung von Häufigkeitsreihen einerseits oder von Einzelwerten, die in geordneter Folge vorliegen, andererseits. In einem ersten Arbeitsgang werden die charakteristischen Grössen der *empirischen Verteilung* ermittelt. Mittels der Schiefe und des Exzesses kann auf Grund des Geltungsbereiches (Graphik 2, Seite 112) ein erster Entscheid über die Wahl der *theoretischen Verteilung* gefällt werden. Der zweite Arbeitsgang bestimmt in einer ersten Stufe die Parameter der gewählten theoretischen Verteilung. Mit diesen lassen sich in der folgenden 2. und 3. Stufe für die Klassenmitten oder für die Einzelwerte als Argument die Werte der Häufigkeitsfunktion und der Verteilungsfunktion errechnen. Da die Parameter der logarithmischen Verteilungen nicht identisch sind mit den statistischen Masszahlen, müssen diese charakteristischen Grössen auf einer weiteren Stufe gesondert ermittelt werden. Auf der letzten Stufe werden die Masszahlen bereitgestellt, um über die Güte der Anpassung der gewählten theoretischen Verteilung befinden zu können; es betrifft dies für die Häufigkeitsreihen die Chiquadrat-Testgrösse und für die Einzelwerte die Cramér-von Mises-Smirnow-Testgrösse.

Eine Iteration gestattet das mehrmalige Durchlaufen des zweiten Arbeitsganges. Es können für eine bestimmte Parameterkombination mehrere theoretische Verteilungen errechnet und auf deren Güte hin getestet werden.

Auf eine Besonderheit sei noch hingewiesen. Die Normalverteilung resp. Lognormalverteilung lässt sich als Gram-Charlier- resp. logarithmische Gram-Charlier-Verteilung auffassen mit der speziellen Setzung $\gamma_1 = 0$ und $\gamma_2 = 0$ resp. $\eta_1 = 0$ und $\eta_2 = 0$. Diese Spezialisierung ist unmittelbar zu Beginn des zweiten Arbeitsganges zu treffen.

---

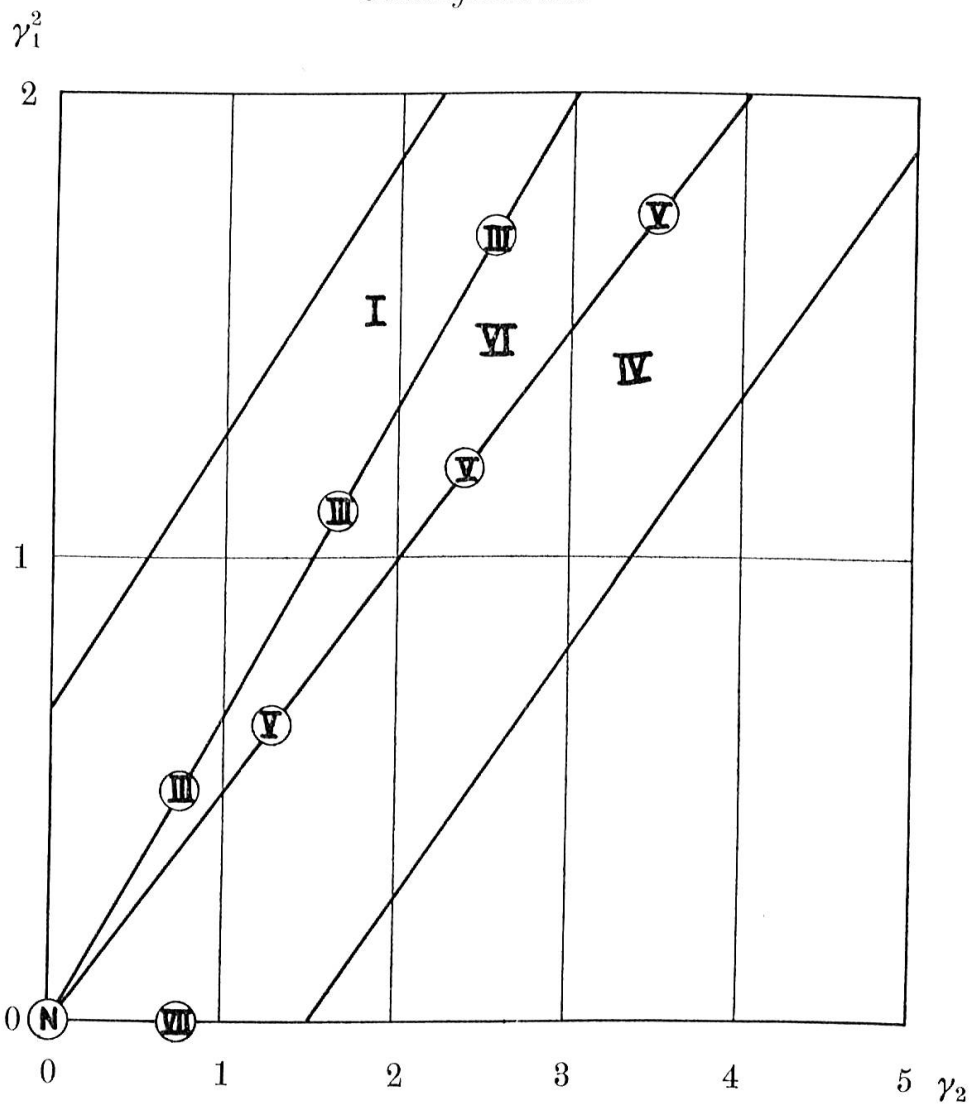
[1]) Das Programm in einer allgemein verwendbaren Programmierungssprache ist in Bearbeitung und steht später zur Verfügung.

5 Anhang

Graphik 1

Pearson-Verteilungen

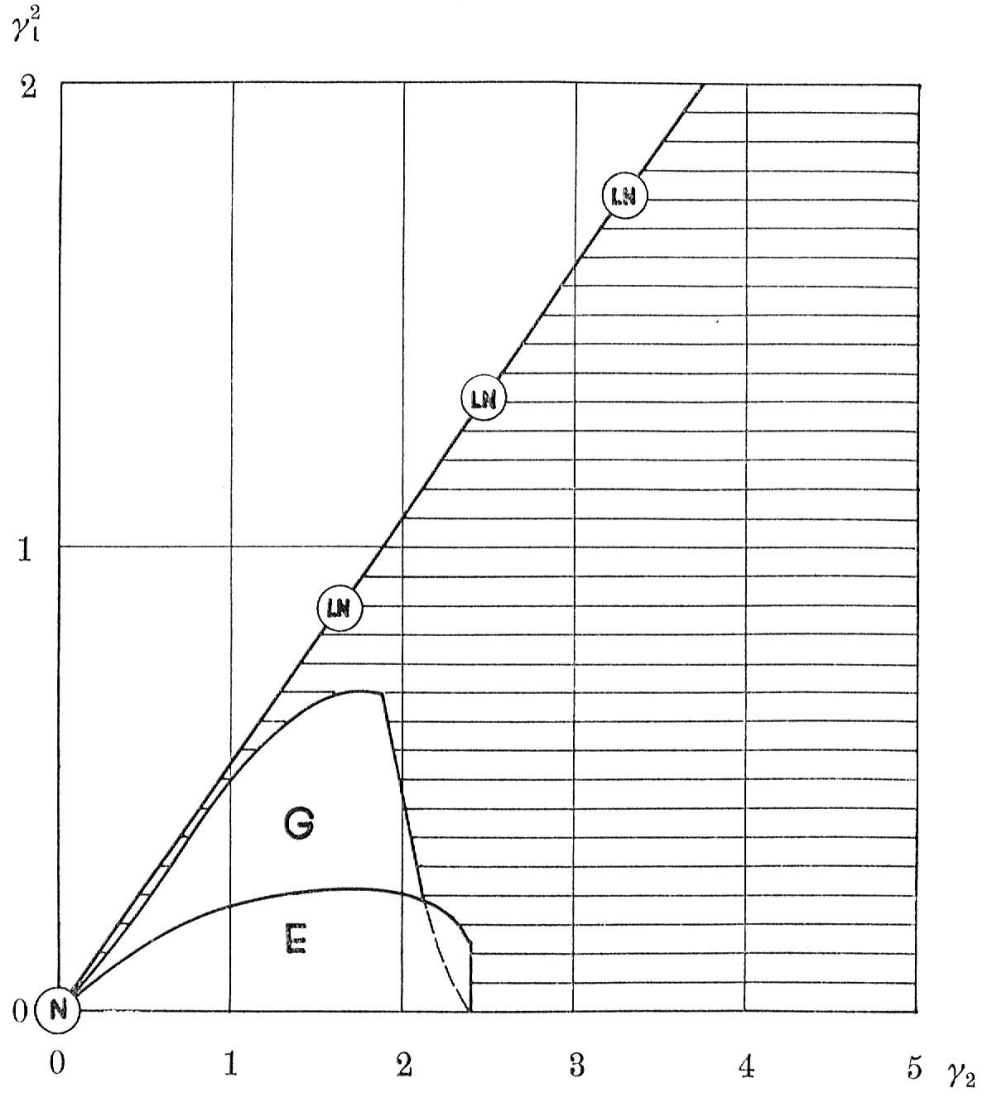
Geltungsbereiche



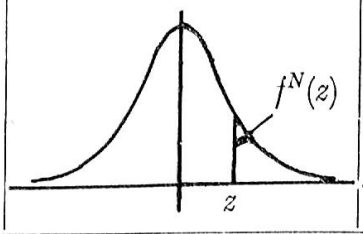
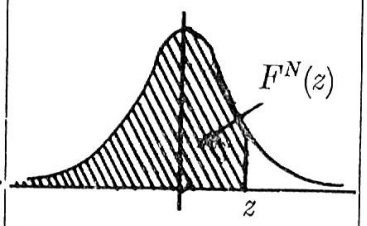
Graphik 2

Gram-Charlier-Verteilungen und Edgeworth-Verteilungen

Geltungsbereiche



Tabellierte Werte der Normalverteilung — *Tabelle 1*

Tabellenwerke	$f^N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ 	$F^N(z) = \int_{-\infty}^{z} f^N(u)\,du$ 
(1)	(2)	(3)
Fisher, R.A., and *Yates, F.*: Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, London 1957	$f(z)$: 4 Dezimalen $z = 0(0{,}01)\,3(0{,}1)\,3{,}9$	—
National Bureau of Standards: Tables of Probability Functions, Vol. II, Washington 1948	$f(z)$: 15 Dezimalen $z = 0(0{,}0001)1(0{,}001)\,8{,}285$ 7 Stellen $z = 6(0{,}1)10$	—
Owen, D.B.: Statistical Tables. Massachusetts 1962	$f(z)$: 6 Dezimalen $z = 0(0{,}01)3{,}99$	$F(z)$: 6 Dezimalen $z = 0(0{,}01)3{,}99$
Pearson, K.: Tables for Statisticians and Biometricians. Part 1 and 2. Cambridge 1930	$f(z)$: 7 Dezimalen $z = 0(0{,}01)4{,}5$ 10 Dezimalen $z = 4{,}5(0{,}01)6$	$F(z)$: 7 Dezimalen $z = 0(0{,}01)4{,}5$ 10 Dezimalen $z = 4{,}5(0{,}01)6$
Pearson, E.S., and *Hartley, H.O.*: Biometrika Tables for Statisticians. Vol. 1, Cambridge 1954		

Tabellierte Werte der Sicherheitspunkte ausgewählter Testgrössen Tab. 2

Testgrösse	Sicherheitsschwelle P	Stichprobenumfang n	Literatur
(1)	(2)	(3)	(4)
Chiquadrat $\chi^2_{n^*}$ (F. G.: $n^* = 1(1)30$)	0,05; 0,01; 0,001	.	*Linder, A.:* Statistische Methoden. Birkhäuser Verlag, Basel (1960), S. 464.
Kolmogoroff $K_n/\sqrt{n}$	0,20; 0,10; 0,05; 0,02; 0,01	1(1)100, ∞	*Miller, H. L.:* Table of percentage points of Kolmogorov statistics. J. Amer. Statist. Ass. 51 (1956), S. 113–115.
$K_n(N)$	0,05; 0,01	25, 100	*Kac, M., Kiefer, J.,* and *Wolfowitz, J.:* On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods. Ann. Math. Statist. 26 (1955), S. 210.
Cramér-von Mises-Smirnow W_n^2	0,05; 0,01	25, 100	*Kac, M., Kiefer, J.,* and *Wolfowitz, J.:* Ann. Math. Statist. 26 (1955).
Anderson-Darling $\bar{W}_n^2$	0,10; 0,05; 0,01	1(1)8, ∞	*Lewis, P. A. W.:* Distribution of the Anderson-Darling statistic. Ann. Math. Statist. 32 (1961), S. 1124.
Schiefe g_1	0,10; 0,05; 0,01	25(5)50(10) 100(25)200 (50)1000(200) 2000(500)5000	*Pearson, E. S.,* and *Hartley, H. O.:* Biometrika tables for statisticians. Vol. I. Cambridge University Press (1958), S. 183/184.
Exzess g_2	0,05; 0,01	200(50)1000 (200)2000 (500)5000	*Pearson, E. S.,* and *Hartley, H.O.:* Vol. I (1958).
a	0,05; 0,01	11(5)51(10) 101(100)1001	*Pearson, E. S.,* and *Hartley, H. O.:* Vol. I (1958).

6 Literaturnachweis

[1] *Aitchison, J.*, and *Brown, J.A.C.:* The lognormal distribution with special reference to its uses in economics. Cambridge Univ. Press (1957).

[2] *Anderson, T.W.*, and *Darling, D.A.:* Asymptotic theory of certain «goodness of fit» criteria based on stochastic processes. Ann. Math. Statist. 23 (1952), S. 193–212.

[3] *Barton, D.E.*, and *Dennis, K.E.:* The conditions under which Gram-Charlier and Edgeworth curves are positive and unimodal. Biometrika 35 (1952), S. 425 bis 427.

[4] *Charlier, C.V.L.:* Über das Fehlergesetz. Ark. Mat. Astr. Fys. 2, No. 8 (1905).

[5] *Cochran, W.G.:* The χ^2-test of goodness of fit. Ann. Math. Statist. 23 (1952), S. 315–345.

[6] *Cochran, W.G.:* Some methods of strengthening the common χ^2-tests. Biometrics 10 (1954), S. 417–451.

[7] *Cramér, H.:* On the composition of elementary errors. Skand. Aktuartidskr. 11 (1928), S. 13–74 und 141–180.

[8] *Cramér, H.:* Mathematical methods of statistics. Almqvist und Wiksells, Uppsala (1946).

[9] *Edgeworth, F.Y.:* The law of error. Trans. Cambridge Philos. Soc. 20 (1905), S. 36–65.

[10] *Elderton, W.P.:* Frequency curves and correlation. Cambridge Univ. Press (1938).

[11] *Fisher, R.A.:* On an absolute criterion for fitting frequency curves. Mess. of Math. 41 (1912), S. 155–160.

[12] *Fisher, R.A.:* On the interpretation of χ^2 from contingency tables, and the calculation of P. J. Roy. Statist. Soc. 85 (1922), S. 87–94.

[13] *Fisher, R.A.:* On the mathematical foundations of theoretical statistics. Philos. Trans. Roy. Soc. 222 (1922), S. 309–368.

[14] *Fisher, R.A.:* Statistical tests of agreement between observation and hypothesis. Economica 3 (1923), S. 139–147.

[15] *Fisher, R.A.:* Statistical methods for research workers. Oliver and Boyd, London (1941).

[16] *Geary, R.C.:* Testing for normality. Biometrika 34 (1947), S. 209–242.

[17] *Gram, J.P.:* Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate. J. Reine Angew. Math. 94 (1883), S. 41–73.

[18] *Hastings, C.* Jr.: Approximations for digital computers. Princeton Univ. Press (1955).

[19] *Johnson, N.L.:* Systems of frequency curves generated by methods of translation. Biometrika 36 (1949), S. 149–176.

[20] *Kac, M., Kiefer, J.,* and *Wolfowitz, J.:* On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods. Ann. Math. Statist. 26 (1955), S. 189–211.

[21] *Kolmogoroff, A.:* Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. Giorn. Ist. Ital. Attuari 4 (1933), S. 83–91.

[22] *Lorenz, P.:* Die Sheppardsche Korrektur der Streuung. Mitteilungsblatt für Math. Statist. 3 (1951), S. 179–184.

[23] *Lüönd, K.G.:* Die Prüfverteilungen in der mathematischen Statistik. Diss. Univ. Bern (1954).

[24] *Mann, H. B.,* and *Wald, A.:* On the choice of the number of class intervals in the application of the chi square test. Ann. Math. Statist. 13 (1942), S. 306–317.

[25] *Marshall, A.W.:* The small sample distribution of nw^2. Ann. Math. Statist. 29 (1958), S. 307–309.

[26] *Massey, F.J.:* The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit. J. Amer. Statist. Ass. 46 (1951), S. 68–78.

[27] *Miller, L.H.:* Table of percentage points of Kolmogorov statistics. J. Amer. Statist. Ass. 51 (1956), S. 111–121.

[28] *Von Mises, R.:* Vorlesungen aus dem Gebiet der angewandten Mathematik. 1. Band: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig 1931.

[29] *Pearson, K.:* On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. Phil. Mag. 50 (1900), S. 157–175.

[30] *Pearson, E.S.,* and *Hartley, H.O.:* Biometrika tables for statisticians, vol. I. Cambridge Univ. Press (1958).

[31] *Schläpfer, T.:* Gütefunktionen und Robustheit parametrischer Prüfverfahren. Diss. Univ. Bern (1961).

[32] *Sheppard, W.F.:* On the calculation of the most probable values of frequency-constants, for data arranged according to equidistant divisions of a scale. Proc. London Math. Soc. 29 (1898), S. 353–380.

[33] *Smirnov, N.V.:* Sur la distribution de ω^2. C.R. de l'Acad. des Sciences 202 (1936), S. 449–452.

[34] *Smirnov, N.V.:* Table for estimating the goodness of fit of empirical distributions. Ann. Math. Statist. 19 (1948), S. 279–281.

[35] *Wegmüller, W.:* Das Grenzverhalten statistischer Prüfverteilungen. Mitt. Ver. Schweiz. Versich.-Math. 58 (1958), S. 127–150.

[36] *Williams, C.A.:* On the choice of the number and width of classes for the chi-square test of goodness of fit. J. Amer. Statist. Ass. 45 (1950), S. 77–86.

[37] *Wilson, E.B.,* and *Hilferty, M.M.:* The distribution of chi-square. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 17 (1931), S. 684–688.

[38] *Wise, M.E.:* Multinomial probabilities and the χ^2 and X^2 distributions. Biometrika 50 (1963), S. 145–154.

Résumé

L'auteur étudie certaines distributions théoriques – loi normale, Gram-Charlier, Edgeworth, normale logarithmique, Gram-Charlier logarithmique, Edgeworth logarithmique – qui présentent entre elles et avec la loi normale réduite des relations simples et se prêtent à l'ajustement de distributions expérimentales à l'aide de calculateurs électroniques.

La méthode du maximum de vraisemblance et la méthode des moments appliquées à l'estimation des paramètres sont brièvement exposées.

Enfin, les principaux critères d'appréciation de la validité de l'ajustement – test du χ^2, de Kolmogoroff, de Cramér-v. Mises-Smirnoff et de Anderson-Darling-sont présentés avec les bases numériques qui en sont dérivées.

Summary

The author deals with certain frequency curves, namely the Normal distribution, the Gram-Charlier distribution, the Edgeworth distribution, the Lognormal distribution, the Logarithmic Gram-Charlier distribution, and the Logarithmic Edgeworth distribution. He shows their relation between each other and also to the Normal standard distribution and explains how they are qualified for the approximation of empirical distributions with the help of electronic computers.

For the estimation of parameters the methods of Maximum likelihood and of Moments are briefly dealt with.

For the goodness of fit the author describes the most important tests at present in use, as the Chi-squared test, the Kolmogorov test, the Cramér-von Mises-Smirnov test, and the Anderson-Darling test. He explains especially the most adapted formulas for the solution of numerical problems derived from these tests.

Riassunto

L'autore analizza qualche distribuzioni teoretiche – la distribuzione normale, la distribuzione Gram-Charlier, la distribuzione Edgeworth, la distribuzione normale logaritmica, la distribuzione logaritmica Gram-Charlier, la distribuzione logaritmica Edgeworth – che hanno speciali relazioni tra di loro e con la distribuzione normale standardizzata, e che sono adatti per l'approssimazione delle distribuzioni empiriche col aiuto di calcolatrici eletroniche.

Per stimare i parametri vengono esposti il metodo della massima verosimiglianza e il metodo dei momenti.

Per giudicare la bontà dell'adattamento vengono compilati gli oggi importanti criteri come il criterio del χ^2, il criterio di Kolmogoroff, il criterio di Cramér-von Mises-Smirnoff, il criterio di Anderson-Darling con la formula numerica derivata.