Über Mittelbildung bei Gruppen gleichartiger Versicherungswerte

Autor(en): **Jecklin, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **70 (1970)**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967026

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über Mittelbildung bei Gruppen gleichartiger Versicherungswerte

Von H. Jecklin, Zürich

Vor geraumer Zeit hat sich der Verfasser gemeinsam mit dem Jubilar, dem die vorliegende kleine Studie gewidmet ist, intensiv dem Studium der elementaren Mittelwerte gewidmet, was damals seinen Niederschlag auch in diesen Mitteilungen gefunden hat [1]. Es ist daher wohl nicht abwegig, bei heutiger Gelegenheit das an sich ja einfache, aber doch nicht reizlose Problem der quasiarithmetischen Mittelbildung auf Basis von Versicherungswerten aufzugreifen. Wenn dabei zum Teil bereits bekannte Fakten wiederholt werden, so möge man uns dies im Rahmen des Gesamten zugute halten.

Es bedeute für einen Versicherungswert (Rentenwert, Jahresprämie, Deckungskapitalsatz) wie üblich x das Eintrittsalter n die Versicherungsdauer, t die abgelaufene Dauer. Wir bezeichnen einen solchen Versicherungswert, der von allen drei Grössen abhängt (z.B. Dekkungskapital), mit $f(x, n, t)$, wenn er nur von x und n oder x und t abhängt (z.B. Rentenwert), mit $f(x, n)$ bzw. $f(x, t)$. Wird nun im letzteren Falle eine der Klammergrössen konstant gesetzt, so dass es sich also nur noch um eine Funktion mit einer Variablen handelt, so kann für eine Gruppe von N solcher Funktionswerte ein quasiarithmetischer Mittelwert dieser Variablen bestimmt werden aus der Gleichsetzung

$$N f(\xi) = \sum f(x)\,,$$

bzw. $$N f(\nu) = \sum f(n)\,, \qquad \text{bzw.} \qquad N f(\tau) = \sum f(t)\,.$$

Bezüglich der Voraussetzungen, die eine Funktion erfüllen muss, um als Basis für quasiarithmetische Mittelbildung dienen zu können, verweisen wir auf eine frühere Arbeit des Verfassers [2].

Wir wenden uns vorerst der Bestimmung des mittleren (oder technischen) Eintrittsalters einer Gruppe von gleichartigen Versicherungs-

werten zu, auch Zentralalter genannt. Aus dem Gesagten folgt eo ipso, dass gleiche Dauer der Versicherungswerte inhärente Voraussetzung ist [3]. Bekanntlich stützen sich manche Methoden globaler Reserveberechnung auf ein mittleres Alter. Bei der Z-Methode von Lidstone hat man es mit Gruppen von gleichartigen Versicherungswerten gleicher restlicher Dauer zu tun. In diesem Falle können wir $x+t = x'$ setzen, und es ist $n-t = n' =$ const. Bei der t-Methode des Verfassers handelt es sich um Gruppen von gleichartigen Versicherungswerten gleicher abgelaufener Dauer. Hier können wir $x+t = x'$ setzen, und es ist $t =$ const. In beiden Fällen handelt es sich im Effekt also um Gruppen von Versicherungswerten gleicher Dauer, wobei die Versicherungsdauer n der Einzelversicherung keine direkte Rolle spielt. Dass in Vereinfachung das mittlere erreichte Alter ξ' oftmals gleich $\xi+t$ gesetzt wird, geschieht in stillschweigender Voraussetzung der Gültigkeit des Gesetzes gleichmässigen Alterns [4]. Wenn die Versicherungswerte einer Gruppe nicht alle auf die Summeneinheit oder auf die gleiche Summe lauten, so tritt anstelle der Bestimmungsgleichung für das mittlere Eintrittsalter

$$Nf(\xi) = \sum f(x)\,,$$

wenn mit S die Summe der Einzelpolice bezeichnet wird, naturgemäss die gewogene Mittelbildung

$$f(\xi)\sum S = \sum Sf(x)\,.$$

Soweit die Versicherungswerte gleicher Dauer näherungsweise als ganze lineare Funktion der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeit q_x darstellbar sind, wenn also

$$f(x) = aq_x + b\,,$$

wobei a und b spezifische Konstanten der festen Dauer n sind, so bestimmt sich ξ aus

$$Nq_\xi = \sum q_x\,,$$

bzw.

$$q_\xi \sum S = \sum Sq_x\,.$$

Sofern insbesondere die Sterbetafel dem Gesetz von Gomperz oder jenem von Makeham folgt, kann man setzen

$$q_x = \alpha c^x + \beta\,, \qquad \alpha, \beta, c \text{ Konstanten,}$$

wobei im ersteren Falle $\beta = 0$, und es gilt

$$Nc^{\xi} = \sum c^{x}, \qquad c > 1,$$

d.h. explizit

$$\xi = \frac{1}{\log c}(\log \sum c^{x} - \log N),$$

bzw.

$$\xi = \frac{1}{\log c}(\log \sum Sc^{x} - \log \sum S),$$

wobei c die bekannte Makehamsche Konstante ist. Nachdem c^{x} mit $c > 1$ eine konvex steigende Funktion ist, gilt zufolge der Ungleichung von *Jensen* [5]

$$\xi > \frac{1}{N}\sum x, \qquad \text{bzw.} \qquad \xi > \frac{1}{\sum S}\sum Sx,$$

d.h. das mittlere (technische) Eintrittsalter ist grösser als das arithmetische Mittel aus den einzelnen Eintrittsaltern, und zwar gilt diese Aussage auch für nicht nach Makeham ausgeglichene Tafeln, soweit q_x in dem zu mittelnden Intervall konvex steigend ist. Vorstehende Ungleichung lässt sich auch leicht formelmässig wie folgt beweisen. Es gilt

$$\tfrac{1}{2}(c^{x_1} + c^{x_2}) > c^{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}, \quad 0 < x_1 < x_2, \quad c > 1.$$

Durch Iteration mit Hilfe der bei quasiarithmetischen Mitteln zulässigen Teilmittelwertbildung [2] folgt

$$\frac{1}{N}\sum c^{x} > c^{\frac{1}{N}\sum x},$$

$$\frac{1}{\log c}(\log \sum c^{x} - \log N) = \xi > \frac{1}{N}\sum x, \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Wir geben für den gleichen Sachverhalt noch einen weiteren elementaren, aber eleganten Beweis. Bekanntlich ist das arithmetische Mittel positiver Werte grösser als deren geometrisches Mittel. Also muss gelten

$$\frac{\sum c^{x}}{N} > \sqrt[N]{\prod c^{x}}, \qquad c > 1,$$

oder, was wegen $c = \text{const}$ dasselbe

$$\frac{\sum c^x}{N} > \sqrt[N]{c^{\Sigma x}}$$

$$\left(\frac{\sum c^x}{N}\right)^N > c^{\Sigma x}$$

$$\frac{1}{\log c}(\log \sum c^x - \log N) = \xi > \frac{1}{N}\sum x\,.$$

Die Aussage, dass das technische Durchschnittsalter höher liegt als das arithmetische Mittel der Einzelalter, lässt sich natürlich auch bei andern analytischen Sterbegesetzen formelmässig nachweisen. Verfasser hat seinerzeit zusammen mit W. Leimbacher

$$q_x = 1 - k\left(1 - \frac{1}{\omega - x}\right), \quad k = \text{const}, \quad \omega = \text{Schlussalter der Tafel},$$

gesetzt, was ermöglicht, Leibrenten durch Zeitrentenwerte darzustellen [6]. Als Spezialfälle ergeben sich aus dieser Sterbeformel für $k = 1$ das Sterbegesetz von Moivre $q_x = \frac{1}{\omega - x}$ und für $\omega = \infty$ jenes von Dormoy $q_x = (1-k) = \text{const}$. Mit vorgenannter Sterbeformel ermittelt sich das mittlere Eintrittsalter ξ aus der Bestimmungsgleichung

$$N\left[1 - k\left(1 - \frac{1}{\omega - \xi}\right)\right] = \sum\left[1 - k\left(1 - \frac{1}{\omega - x}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\omega - \xi} = \frac{1}{N}\sum\frac{1}{\omega - x}$$

$$\omega - \xi = \frac{N}{\sum(\omega - x)^{-1}}\,.$$

Bezeichnen wir die Komplementäralter mit $\omega - \xi = \zeta$, $\omega - x = z$,

so folgt $\qquad \zeta = \frac{N}{\sum z^{-1}}$, bzw. $\xi = \omega - \frac{N}{\sum z^{-1}}$,

für ζ also das harmonische Mittel der einzelnen Komplementäralter. Nun ist bekanntlich das harmonische Mittel kleiner als das arithmetische Mittel, daher

$$\frac{1}{N}\sum z = \frac{1}{N}\sum(\omega - x) > \frac{N}{\sum z^{-1}} = \omega - \xi\,,$$

$$\omega - \frac{1}{N}\sum x > \omega - \xi\,,$$

woraus wiederum $\quad \xi > \frac{1}{N}\sum x\,.$

Interessant am vorhin beschriebenen Procedere ist vor allem der Umstand, dass das mittlere Eintrittsalter direkt aus den x errechnet werden kann ohne Basierung auf eine Mittelungsfunktion wie q_x oder c^x.

Es lassen sich natürlich auch andere Sterbeformeln angeben, die eine Bestimmung des technischen mittleren Alters direkt aus den x erlauben. So finden wir bei *Quiquet* [7] unter anderem den Ansatz einer quadratischen Funktion für q_x, nämlich $q_x = a + bx + cx^2$. Hier folgt aus der Bestimmungsgleichung

$$N(a + b\xi + c\xi^2) = \sum(a + bx + cx^2)$$

$$\xi = \tfrac{1}{2}\left(\overset{+}{\sqrt{\beta^2 + 4A}} - \beta\right),$$

worin $\quad \beta = \frac{b}{c} \quad$ und $\quad A = \frac{1}{N}\sum(\beta x + x^2) \quad$ bedeuten.

Auch hier ist $\quad \xi > \frac{1}{N}\sum x\,,\quad$ was wie folgt gezeigt werden kann. Die

Behauptung $\quad \xi = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\beta^2 + 4A} - \beta\right) > \frac{1}{N}\sum x$

d.h. $$\sqrt{\beta^2 + \frac{4}{N}\sum(\beta x + x^2)} > \frac{2}{N}\sum x + \beta$$

$$\beta^2 + \frac{4}{N}\sum \beta x + \frac{4}{N}\sum x^2 > \frac{4}{N^2}(\sum x)^2 + \frac{4}{N}\beta \sum x + \beta^2$$

reduziert sich auf $$N\sum x^2 > (\sum x)^2 .$$

Ausmultipliziert stehen links N^2 Summanden x_i^2, $i = 1, 2, \ldots N$, und rechts N Summanden x_i^2 plus $N(N-1)$ Summanden $x_i x_k$, $i \neq k$. Dabei tritt jedes Produkt $x_i x_k$ doppelt auf. Beidseitig N Summanden x_i^2, $i = 1, 2 \ldots N$, weggehoben verbleibt

$$(N-1)\sum x_i^2 - \sum x_i x_k > 0 .$$

Die Anzahl der Summanden ist bei beiden Posten $N(N-1)$, d.h. eine gerade Zahl. Es lassen sich also $\frac{1}{2}N(N-1)$ Ausdrücke der Gestalt bilden

$$(x_i^2 - 2x_i x_k + x_k^2) = (x_i - x_k)^2 > 0 ,$$

womit der Beweis erbracht ist. Die in Frage stehende Ungleichung ist übrigens ein Spezialfall einer viel allgemeineren Aussage. Es gilt nämlich [1]

$$\left(\frac{\sum x^l}{N}\right)^{\frac{1}{l}} > \frac{\sum x}{N}, \qquad \text{wenn } l > 1 .$$

$$\frac{\sum x^l}{N} > \left(\frac{\sum x}{N}\right)^l ,$$

$$N^{l-1}\sum x^l > (\sum x)^l$$

also für $l = 2$ $$N\sum x^2 > (\sum x)^2 .$$

Die Regel, dass das technische mittlere Alter höher ist als das arithmetische Mittel der Einzelalter, gilt cum grano salis, keine Regel

ohne Ausnahme. So hat Dormoy ausser seinem bekannten Ansatz $q_x = \text{const}$ noch $q_x = a + bx$ vorgeschlagen [8], also eine ganze lineare Funktion. Hier folgt natürlich aus

$$N(a + b\xi) = \sum (a + bx)$$

unmittelbar

$$\xi = \frac{1}{N} \sum x,$$

was allerdings für die Praxis bedeutungslos ist, indem ein linearer Anstieg der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeit nicht in Betracht fällt.

Wir wenden uns nunmehr kurz einer Betrachtung der mittleren Dauer ν zu, wobei man ohne Beeinträchtigung $t = 0$ setzen kann. Es zeigt sich alsbald, dass die Sachlage hier nicht so einfach ist wie bei der Bestimmung des mittleren Alters, indem man unterscheiden muss, ob die mittlere Dauer ν der Versicherungswerte aus der Leibrente (Gruppe von Rentenwerten, Einmaleinlagen) oder aus deren reziprokem Wert (Gruppe von Jahresprämien, Deckungskapitalien) als Mittelungsfunktion zu bestimmen ist [9]. Im ersten Fall ist, durchwegs gleiches Eintrittsalter vorausgesetzt (d. h. $x = \text{const}$), die mittlere Dauer ν aus der Gleichsetzung

$$N\,\ddot{a}_{x:\overline{\nu}|} = \sum \ddot{a}_{x:\overline{n}|},$$

bzw.

$$\ddot{a}_{x:\overline{\nu}|} \sum S = \sum S\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

zu ermitteln. Da die Leibrente als Funktion von n eine konkav steigende Funktion ist, muss in Anwendung der Ungleichung von Jensen gelten

$$\nu < \frac{1}{N} \sum n,$$

d.h. die mittlere Dauer ν ist kleiner als das arithmetische Mittel der einzelnen Dauern.

Es dürfte praktisch kaum möglich sein, eine Formel aufzustellen zur expliziten Angabe von ν, ausgenommen Fälle ganz einfacher Sterbegesetze. Nimmt man beispielsweise die Formel von Dormoy, so ist

$$l_{x+t} = ks^{x+t}, \qquad k = \text{const} \qquad 0 < s < 1 \text{ const}$$

Es ist dann $\quad D_{x+t} = k(sv)^{x+t}$

und $\quad \dfrac{D_{x+t}}{D_x} = (sv)^t = w^t, \qquad$ mit $\quad sv = w < 1$ const.

Dies läuft somit einfach auf Ersetzung der Absterbeordnung durch eine Abzinsungsreihe hinaus. Der Barwert der Rente ist altersunabhängig,

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1-w^n}{1-w},$$

und man erhält für die Bestimmung der mittleren Dauer ν die Gleichung

$$Nw^\nu = \sum w^n, \qquad 0 < w < 1,$$

bzw.

$$w^\nu \sum S = \sum Sw^n,$$

also

$$\nu = \frac{1}{\log w}(\log \sum w^n - \log N),$$

bzw.

$$\nu = \frac{1}{\log w}(\log \sum Sw^n - \log \sum S),$$

und da w^n, $w < 1$, eine konvex fallende Funktion von n ist, folgt auch hieraus, dass

$$\nu < \frac{1}{N}\sum n.$$

Denn es ist $\quad \frac{1}{2}(w^{n_1} + w^{n_2}) > w^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}, \qquad 0 < n_1 < n_2, \; 0 < w < 1,$
und in verallgemeinernder Iteration

$$\frac{1}{N}\sum w^n > w^{\frac{1}{N}\Sigma n}$$

$$\log \sum w^n - \log N > \left(\frac{1}{N}\sum n\right)\log w, \qquad \log w \text{ negativ!}$$

$$\frac{1}{\log w}(\log \sum w^n - \log N) = \nu < \frac{1}{N}\sum n, \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Auch dieser Beweis lässt sich einfach auf die Tatsache basieren, dass das arithmetische Mittel grösser als das geometrische Mittel ist.

$$\frac{\sum w^n}{N} > \sqrt[N]{\prod w^n}\,, \quad 0 < w < 1\,, \quad w = \text{const}$$

$$\frac{\sum w^n}{N} > \sqrt[N]{w^{\Sigma n}}$$

$$\left(\frac{\sum w^n}{N}\right)^N > w^{\Sigma n}$$

$$\log \sum w^n - \log N > \left(\frac{1}{N} \sum n\right) \log w, \quad \text{wie vorhin.}$$

Beim zweiten Fall steht der Leibrentenwert, und damit n, im Nenner des Versicherungswertes. Wir haben es also mit dem reziproken Rentenwert zu tun und werden somit zu quasiharmonischer Mittelbildung geführt. Nachdem das harmonische Mittel kleiner ist als das arithmetische, muss bei Mittelbildung der Dauer n bei gleicher Verteilung der letzteren gegenüber dem ersten Fall eine Senkung eintreten. Die genaue mittlere Dauer ν für eine gleichaltrige Gruppe ergibt sich hier aus der Gleichsetzung

$$\frac{N}{\ddot{a}_{x:\overline{\nu}|}} = \sum \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\,, \qquad x = \text{const}$$

bzw.

$$\frac{\sum S}{\ddot{a}_{x:\overline{\nu}|}} = \sum \frac{S}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Wie wir bereits früher zeigten [10], ergibt sich eine gute erste Näherung, wenn man ν einfach als harmonisches Mittel der n ansetzt, also

$$\nu = \frac{N}{\sum \frac{1}{n}}\,, \quad \text{bzw.} \quad \nu = \frac{\sum S}{\sum \frac{S}{n}}\,.$$

Auch hier dürfte es kaum möglich sein, eine Formel für genaue explizite Angabe von ν aufzustellen, ganz einfache Sterbegesetze ausgenommen. Auf Basis der Formel von Dormoy beispielsweise erhält man:

ausgehend von der Prämie

$$N \frac{1-w}{1-w^{\nu}} = \sum \frac{1-w}{1-w^{n}}$$

$$w^{\nu} = 1 - \frac{N}{\sum \frac{1}{1-w^{n}}}$$

$$\nu = \frac{1}{\log w} \log \left(1 - \frac{N}{\sum \frac{1}{1-w^{n}}} \right)$$

ausgehend von der Reserve

$$N \left(1 - \frac{1-w^{\nu-t}}{1-w^{\nu}} \right) = \sum \left(1 - \frac{1-w^{n-t}}{1-w^{n}} \right).$$

Dies kann wegen

$$\frac{1-w^{n-t}}{1-w^{n}} = 1 + (1-w^{-t}) \frac{w}{1-w^{n}}$$

für t = const vereinfacht werden zu

$$N \frac{w^{\nu}}{1-w^{\nu}} = \sum \frac{w^{n}}{1-w^{n}}$$

$$N \frac{1}{u^{\nu}-1} = \sum \frac{1}{u^{n}-1}, \qquad w^{-1} = u,$$

$$u^{\nu} = 1 + \frac{N}{\sum \frac{1}{u^n - 1}}$$

$$\nu = \frac{1}{\log u} \log \left(1 + \frac{N}{\sum \frac{1}{u^n - 1}} \right).$$

Auf den ersten Blick scheinen die beiden Formeln nicht das gleiche explizite ν zu liefern, sie lassen sich aber leicht ineinander überführen unter Beachtung, dass $w^{-1} = u$.

$$\frac{1}{w^{\nu}} = \frac{\sum \frac{u^n}{u^n - 1}}{\sum \frac{u^n}{u^n - 1} - N} = \frac{\sum \frac{u^n}{u^n - 1}}{\sum \frac{1}{u^n - 1}} = 1 + \frac{\sum \frac{u^n - 1}{u^n - 1}}{\sum \frac{1}{u^n - 1}} = 1 + \frac{N}{\sum \frac{1}{u^n - 1}} = u^{\nu}.$$

Der aus letzteren Formeln für ν resultierende Wert ist kleiner als das gewöhnliche harmonische Mittel der einzelnen Dauern. Den Beweis hiefür haben wir an anderer Stelle durchgeführt [9].

Es ist, wie eingangs dargelegt, für die Bestimmung des mittleren Eintrittsalters ξ Voraussetzung, dass die zu mittelnde Gruppe Versicherungswerte gleicher Dauer umfasst. Unter gewissen Umständen kann man es jedoch wagen, diese Voraussetzung zu ignorieren. So ist bekanntlich die Reservehöhe der gemischten Versicherung gegebener Dauer nicht stark vom Eintrittsalter x abhängig. Auf dieser Tatsache fusst der vom Verfasser vorgeschlagene Versuch einer globalen Reserveberechnung auf Basis durchschnittlicher Dauern [10]. Im Hinblick darauf ergäbe sich zur Ermittlung von ν ein einfaches Vorgehen. Vorerst wird, ganz unbesehen der einzelnen Policendauer, ein mittleres ξ bestimmt aus der Relation

$$q_{\xi} \sum S = \sum S q_x .$$

Sodann schreitet man mit diesem ξ zur Ermittlung einer mittleren Versicherungsdauer ν aus der Gleichsetzung

$$P_{\xi : \overline{\nu}|} \sum S = \sum S P_{x : \overline{n}|},$$

wobei Summe und Prämie der Einzelversicherung als bekannt voraus gesetzt werden dürfen. Es ist also

$$P_{\xi:\overline{\nu}|} = \frac{\sum SP_{x:\overline{n}|}}{\sum S}$$

und weiter

$$\frac{1}{P_{\xi:\overline{\nu}|} + d} = \frac{N_\xi - N_{\xi+\nu}}{D_\xi}$$

$$N_{\xi+\nu} = N_\xi - \frac{D_\xi}{P_{\xi:\overline{\nu}|} + d} \, .$$

Da ξ bekannt ist, kann ν aus der Kommurationsreihe der N_x interpoliert werden.

Nun sei noch die mittlere abgelaufene Dauer τ einer nähern Betrachtung unterzogen. Notwendige Voraussetzung ist eine Gruppe bestimmter Versicherungswerte mit gleichem Eintrittsalter x und gleicher Dauer n. Wenn τ ermittelt ist, so steht auch die mittlere restliche Dauer $n - \tau$ fest. In erster Näherung wird in einfacher arithmetischer Mittelung gelten

$$\tau = \frac{1}{N} \sum t \, ,$$

$$\tau = \frac{\sum St}{\sum S} \, .$$

Das genaue τ muss aber grösser sein, denn Rentenendwert $\ddot{s}_{x:\overline{t}|}$ und Deckungskapital ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ sind als Funktionen von t konvex steigend und der Rentenbarwert $\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ konvex fallend. Stützen wir uns wieder auf die Formel von Dormoy, so haben wir für

$$\ddot{s}_{x:\overline{t}|} = \frac{u^t - 1}{u - 1}$$

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{1 - w^{n-t}}{1 - w^n} = \frac{u^t - 1}{u^n - 1}$$

$$\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = \frac{1 - w^{n-t}}{1 - w} = \frac{u^n - u^t}{u^n (1 - w)} \, .$$

In allen drei Fällen folgt

$$u^{\tau} = \frac{1}{N} \sum u^{t}$$

bzw.

$$u^{\tau} = \frac{1}{\sum S} \sum S u^{t}$$

und

$$\tau = \frac{1}{\log u} (\log \sum u^{t} - \log N) > \frac{1}{N} \sum t ,$$

$$\tau = \frac{1}{\log u} (\log \sum S u^{t} - \log \sum S) > \frac{1}{\sum S} \sum S t .$$

Der formelmässige Beweis ist analog zu jenem für ξ durchzuführen. Bezüglich der mittleren restlichen Dauer gilt

$$n - \tau = \frac{1}{\log w} (\log \sum w^{n-t} - \log N) < \frac{1}{N} \sum (n-t) ,$$

wobei der Beweis analog zu jenem für den ersten Fall bei der mittleren Dauer ν verläuft.

Die vorgängig besprochenen Mittelbildungen der Variablen x, n und t von Versicherungswerten führen fast zwangsläufig zur Frage, ob es nicht möglich ist, für ein Portefeuille gemischter Versicherungen das Deckungskapital in genügender Näherung global zu bestimmen als

$${}_{\tau}V_{\xi:\overline{\nu}|} \sum S = \sum S \, {}_{t}V_{x:\overline{n}|} ,$$

sofern nur die Verteilungen von x, n und t nach Versicherungssummen bekannt sind. Der Gedanke ist faszinierend, aber mit der für die Praxis nötigen Genauigkeit nicht realisierbar, und ein seinerzeitiger Versuch des Verfassers hat denn auch keine befriedigenden Resultate gezeitigt [10]. Der Grund liegt darin, dass die bei den Mittelbildungen zugrunde liegenden Voraussetzungen nur beschränkt oder überhaupt nicht erfüllt werden können.

So hat *Leepin* [11] in einer theoretischen Durchleuchtung gezeigt, dass das mittlere Alter ξ von den Versicherungsdauern nicht unabhängig ist, und er kommt zum Schluss, dass es keine in Betracht fallende Sterbetafel gibt, die eine globale Reserveberechnung nach Z- oder t-Methode auf Basis eines genauen ξ ermöglicht. In Umkehrung dieser Feststellung ist zu vermuten, dass die mittlere Dauer ν von den Eintrittsaltern abhängig ist. In der Tat zeigt die folgende kurze numerische Rechnung auf Basis S.M. 1939/44 zu $2\frac{1}{2}\%$, dass dies zutrifft.

	x	n	$1/n$	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}$	$1/\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}$
a)	30	15	0,0666...	12,4142	0,080553
	30	20	0,05	15,4690	0,064645
	30	25	0,04	18,0479	0,055408
		60	0,1566...	45,9311	0,200606
b)	50	15	0,0666...	11,9274	0,083841
	50	20	0,05	14,5172	0,068884
	50	25	0,04	16,4496	0,060792
		60	0,1566...	42,8942	0,213517

$\xi = x, \quad N = 3$	$\xi = 30$	$\xi = 50$
arithmetisches Mittel der n	20	20
quasiarithmetisches Mittel der n aus Rentenwerten	19,72	19,53
harmonisches Mittel der n	19,15	19,15
quasiharmonisches Mittel der n aus Rentenwerten	19,10	18,99

Wie bereits erwähnt, kann man unter Umständen bei der Festlegung von ξ von der Voraussetzung gleicher Dauer der Versicherungswerte absehen. Es ist aber doch ein gewisses Wagnis, wenn die Reserve auf Basis eines mittleren ξ global in t-Gruppen mit durchschnittlicher Dauer ν ermittelt wird, oder in n-Gruppen mit durchschnittlicher abgelaufener Dauer τ. Denn im ersten Fall setzt die Bestimmung von ξ gleiche Dauer der Versicherungswerte voraus, die Bestimmung von ν aber setzt Gleichaltrigkeit voraus. Abgesehen vom trivialen Fall identischer Versicherungswerte, liegt hier ein unlösbarer Widerspruch vor. Und ganz analog ist die Sachlage im zweiten Fall. Hier setzt die Bestimmung von ξ gleiche abgelaufene Dauer voraus, die Bestimmung von τ anderseits gleiche Eintrittsalter. Wenn sich praktisch in gewis-

sem Rahmen dennoch annehmbare Resultate ergeben, so ist dies dem Umstand zu verdanken, dass im allgemeinen x und n in nicht sehr grosser Spannweite variieren, und sodann der Tatsache, dass die Reservehöhe der gemischten Versicherung gegebener Dauer nicht stark vom Eintrittsalter abhängig ist. Soll nun aber auf Basis von drei Mittelwerten ξ, ν und τ operiert werden, so häufen sich die Widersprüche zufolge nichterfüllbarer Voraussetzungen. Denn die Bestimmung von ξ bedingt festes n und t, die Bestimmung von ν festes x und t und die Bestimmung von τ festes x und n. Wenn sich versuchsweise im konkreten Fall trotzdem in gleichzeitiger Verwendung von allen drei Mittelwerten ξ, ν und τ eine globale Reserve von guter Näherung ergeben kann, so möchten wir dies lediglich als Zufallstreffer werten.

Literatur

[1] *H. Jecklin* und *M. Eisenring*, Die elementaren Mittelwerte, MVSVM Bd. 47, Heft 1.

[2] *H. Jecklin*, Quasiarithmetische Mittelwerte, Elemente der Mathematik Bd. 4, Heft 5 und 6.

[3] – Die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit als Hilfsgrösse zur Bestimmung des technischen Durchschnittsalters von Personengruppen in der Lebensversicherung, Blätter für Versicherungsmathematik Bd. 4, Heft 6.

[4] *P. Iff*, Untersuchungen über das Gesetz des gleichmässigen Alterns, Dissertation Bern 1926.

[5] *V. Jensen*, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta mathematica vol. 30, 1905.

[6] *H. Jecklin* und *W. Leimbacher*, Über ein Sterbegesetz, welches eine exakte Darstellung der Leibrenten durch Zeitrentenwerte gestattet, MVSVM Bd. 53, Heft 2.

[7] *A. Quiquet*, Représentation algébrique des tables de survie, Bulletin de l'Institut des Actuaires Français Bd. 3, Heft 14.

[8] *E. Dormoy*, Théorie des Assurances sur la vie, vol. I, 1878.

[9] *H. Jecklin*, Über quasiarithmetische Mittelbildung mit Versicherungswerten, Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Bd. 8, Heft 4.

[10] – Globale Reserveberechnung auf Basis durchschnittlicher Dauern, MVSVM Bd. 65, Heft 1.

[11] *P. Leepin*, Über die Anwendung von Mittelwerten zur Reserveberechnung, MVSVM Bd. 49, Heft 2.

Zusammenfassung

Es wird die Mittelbildung bei den in Versicherungswerten auftretenden drei Veränderlichen x (Eintrittsalter), n (Versicherungsdauer) und t (abgelaufene Dauer) besprochen und anschliessend auf die Problematik hingewiesen, die aus gleichzeitiger Verwendung von mehr als einem dieser Mittelwerte bei globaler Reserveberechnung erwächst.

Résumé

L'auteur traite du calcul de valeurs moyennes pour les trois variables: x (âge d'entrée), n (durée de l'assurance) et t (durée écoulée). Ensuite il fait allusion aux problèmes qui apparaissent quand on utilise plus d'une de ces valeurs pour un calcul global des réserves.

Riassunto

L'autore tratta della formazione del valor medio delle tre variabili x (età d'ingresso), n (durata dell'assicurazione) e t (durata trascorsa) usate nell'assicurazione e fa poi allusione alla problematica che risulta dall'applicazione di più di uno di questi valori medi nel calcolo globale delle riserve.

Summary

The author treats the calculation of mean values for the three variables x (age at entry), n (term of insurance) and t (duration). Reference is also made to the problems which arise when more than one of these mean values are used in a global reserve calculation.