Über die Berechnung der Rendite und des mathematischen Wertes einer Kapitalanlage

Autor(en): **Neuhaus, Johannes**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **70 (1970)**

PDF erstellt am: **29.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967031

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

B

Wissenschaftliche Mitteilungen

Über die Berechnung der Rendite und des mathematischen Wertes einer Kapitalanlage

Von Johannes Neuhaus, Küsnacht (Zürich)

1. Vorbemerkungen

Die nachstehenden Ausführungen befassen sich mit der Ermittlung des Renditesatzes und des mathematischen Wertes einer Kapitalanlage, also mit zwei zusammenhängenden Problemen von erheblicher wirtschaftlicher Bedeutung. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit wird referiert über einige in den letztvergangenen Jahrzehnten erzielte Fortschritte (z. B. die Einführung des Volatility-Begriffes) und erarbeitete Beziehungen zwischen Aktienrendite und mathematischem Aktienwert, welche grossenteils britischen und amerikanischen Aktuaren zu verdanken sind.

In der finanzmathematischen Literatur ist das Thema «Rendite und Kurs» im allgemeinen getrennt für festverzinsliche Wertpapiere oder Aktien oder Investitionen (Erwerb von Betriebsanlagen, Geschäftserweiterungen usw.) behandelt worden. Der Verfasser dieser Arbeit war bestrebt, den Gegenstand gesamthaft anzugehen und im Anschluss daran einzeln über Rendite und mathematischen Wert von festverzinslichen Anlagen, Investitionen und Aktien zu berichten.

Es versteht sich, dass die Berechnung der Rendite wirtschaftlich im Vordergrund steht. Bei der Berechnung des mathematischen Wertes handelt es sich meistens um gewisse Spezialprobleme wie: mathematische Bewertung festverzinslicher Wertpapiere durch Lebensversicherungs-Gesellschaften, mathematischer Wert als Hilfsgrösse für die Ren-

diteberechnung usw. Indessen lassen sich – wenn eine beabsichtigte Investition zu prüfen ist – anhand des mathematischen Wertes Fragen folgender Art beantworten: Ist der vom Investor anzulegende Betrag als angemessen, als übersetzt oder als günstig zu betrachten? Welche Dividende und welches Dividendenwachstum ist im Preis einer Aktie eskomptiert? Wie lange müsste das überdurchschnittliche Wachstum dauern? Welcher Preis einer bestimmten Wuchsaktie lässt sich – im Vergleich mit einer Aktie von durchschnittlichem Verhalten – rechtfertigen?

Im folgenden wird eine Kapitalanlage vom Standpunkt des Anlegers aus betrachtet, zunächst für ein Jahr, dann für eine mehrjährige Investitionsdauer (Laufzeit). Der Anfangskurs, welcher häufig mit dem Kaufpreis identisch ist und sich auf den Zeitpunkt 0 bezieht, wird mit K_0 bezeichnet. Der Anleger erhält periodische (wir nehmen an: jährliche) Einnahmen (Obligationenzinsen, Aktiendividenden, Investitionserträge usw). $E_1, E_2, \ldots E_t, \ldots E_n$ und ausserdem am Ende des n-ten Jahres den Rückzahlungs- oder Verkaufspreis oder Liquidationswert K_n. Die jeweiligen Preise der Anlage im Verlaufe der Investitionsdauer seien $K_1, K_2, \ldots K_{n-1}$, ein allfälliges Nominalkapital sei K^* genannt.

Falls es sich um ein Wertpapier handelt, das im Zeitpunkt 0 schon läuft, wird angenommen, der Betrag E_0 sei unmittelbar vor der Investitionsdauer fällig geworden und bereits bezahlt.

Wenn die Einnahme E_t konstant ist, wird sie mit E und der Quotient $\frac{E}{K^*}$ mit i^* = Nominalzinsfuss bezeichnet.

2. Die Rendite des einzelnen Jahres

Als Rendite bezeichnen wir das Verhältnis des Jahresertrages E zum Preis, Kurs oder Wert K der Kapitalanlage.

Zunächst werden allfällige Änderungen des Kurses K und des Ertrages E ausser acht gelassen. Als Jahresrendite wird dann die momentane Rendite $\frac{E}{K}$ betrachtet.

Bei *Aktien* bezeichnet man $\frac{E}{K}$ als Dividendenrendite und $\frac{K}{E}$ als Kurs-Dividende-Verhältnis. E ist normalerweise ein Teil des auf die

einzelne Aktie entfallenden jährlichen Geschäftsgewinnes G. Auch der nicht zur Auszahlung gelangende Gewinnteil $G-E$ ist für die Beurteilung der Aktie von Belang (das Ausmass der zurückbehaltenen Gewinnteile kann sich in der Höhe der künftigen Jahreserträge auswirken). Man betrachtet deshalb auch die Gewinnrendite $\frac{G}{K}$ und das Kurs-Gewinn-Verhältnis $\frac{K}{G}$.

Es soll nun die Rendite des einzelnen Jahres genauer erfasst werden. Dazu wird das t-te Jahr der Laufzeit, also die Spanne zwischen den Zeitpunkten $t-1$ und t, und der Quotient $m_t = \frac{E_t}{K_{t-1}}$ betrachtet.

Falls ausser E_t auch die allfällige Kursdifferenz $K_t - K_{t-1}$ berücksichtigt wird, ergibt sich

$$y_t = \frac{E_t + K_t}{K_{t-1}} - 1 . \tag{1}$$

Beispiel:

(4½%ige Obligation, Rest-Laufzeit 3 Jahre, $K_0 =$ Fr. 98.10, $K_1 =$ Fr. 97.50, $K_2 =$ Fr. 99.60, $K_3 =$ Fr. 100.–)

t	K_{t-1} Fr.	E_t Fr.	m_t %	y_t %
1	98.10	4.50	4,59	3,98
2	97.50	4.50	4,62	6,77
3	99.60	4.50	4,52	4,92

Es ist zu empfehlen, für die den Anleger interessierenden Aktien eine Liste mit den Ertragssätzen y_t der zurückliegenden Jahre zusammenzustellen; diese Zahlen können für eine Prognose der künftigen Ertragsentwicklung nützlich sein. In diesem Sinne hat J. R. Hemsted[1]) für 30 britische Aktien die Werte y_t der einzelnen Jahre 1958 bis 1967 festgestellt und – davon ausgehend – eine Schätzung für jedes der Jahre 1968 bis 1977 und jede der 30 Aktien vorgenommen.

[1]) J. R. Hemsted, One-year-returns and the degree of risk, (J. Inst. Act., Vol. 95, p. 19, 1969).

3. Kurs und Rendite

Auf die ganze künftige Investitionsdauer (nicht nur auf die einzelnen Jahre) bezieht sich der Renditesatz (Effektiv-Zinssatz) i; seine Beziehung zum Anfangskurs K_0 ergibt sich wie folgt:

Der Anfangskurs K_0 der Investition wird – für das erste Jahr – im Ausmass der Rendite $K_0 \cdot i$ erhöht und am Jahresende um E_1 gekürzt. In den folgenden Jahren wird die staffelartige Vermehrung und Verminderung des jeweiligen Saldos fortgesetzt.

Am Ende des n-ten Jahres muss sich K_n ergeben:

$$\{[K_0(1+i)-E_1](1+i)-E_2\}(1+i)-E_3 \ldots -E_n = K_n. \tag{2}$$

Es folgt:

$$K_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{E_t}{(1+i)^t} + \frac{K_n}{(1+i)^n}, \tag{3}$$

d.h. der Anfangskurs K_0 ist gleich dem Total der zum Renditesatz i diskontierten Beträge $E_1, \ldots E_t, \ldots E_n$ und K_n.

Wenn K_0 (z.B. als Ankaufspreis oder Marktpreis) vorgegeben ist, kann der zugehörige Renditesatz i gerechnet werden; eine explizite Darstellung ist im allgemeinen nicht möglich.

Eine weitere Beziehung zwischen $K_0, E_1, \ldots E_t, \ldots E_n$ und K_n ergibt sich, wenn die Grössen y_t verwendet werden. Gleichung (1) lässt sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} K_0(1+y_1) - E_1 &= K_1 \\ \vdots \qquad \vdots \quad \vdots &\quad \vdots \\ K_{t-1} \cdot (1+y_t) - E_t &= K_t \\ \vdots \qquad \vdots \quad \vdots &\quad \vdots \\ K_{n-1} \cdot (1+y_n) - E_n &= K_n. \end{aligned} \tag{4}$$

Wenn hieraus fortschreitend $K_1, \ldots K_{n-1}$ eliminiert wird, resultiert:

$$K_0 = \frac{E_1}{1+y_1} + \frac{E_2}{(1+y_1)(1+y_2)} + \ldots + \frac{E_n + K_n}{(1+y_1)(1+y_2)\ldots(1+y_n)}. \tag{5}$$

Ferner folgt, wenn die Grössen $E_1, \ldots E_n$ aus (2) und (4) eliminiert werden,

$$\sum_{t=1}^{n} K_{t-1}(i-y_t)(1+i)^{n-t} = 0 \qquad \text{und}$$

$$\mathrm{i} = \sum_{t=1}^{n} (\varkappa_t \cdot y_t) : \sum_{t=1}^{n} \varkappa_t , \tag{6}$$

wobei
$$\varkappa_t = \frac{K_{t-1}}{(1+i)^{t-1}} ,$$

d.h. der Renditesatz i ist das (mit den zu i diskontierten Kursen gewichtete)Mittel der Werte y_t.

4. Der mathematische Kurs

Aus der Grundgleichung (3) lassen sich – wenn $E_1, \ldots E_n$ und K_n sowie der Renditesatz i vorgegeben sind – der Anfangskurs $K_0^{(i)}$ und die weiteren Kurse $K_1^{(i)}, \ldots K_{n-1}^{(i)}$ prospektiv ermitteln[2]).

Für $t = 1, 2, \ldots n$ gilt die Rekursionsformel

$$K_{t-1}^{(i)} \cdot (1+i) = E_t + K_t^{(i)} \tag{7}$$

und – wegen (1) – die Gleichung

$$y_t^{(i)} = \frac{E_t + K_t^{(i)}}{K_{t-1}^{(i)}} - 1 = i . \tag{8}$$

Für eine festverzinsliche Kapitalanlage ergibt sich (falls $K_n = K^* = 1$ und $E_t = i^* =$ konst.) aus (3)

$$K_0 = i^* \cdot a_{\overline{n}|}^{(i)} + \frac{1}{(1+i)^n} = 1 - (i - i^*)\, a_{\overline{n}|}^{(i)} . \tag{9}$$

$$K_0 \cdot (1+i)^n = K_0 \cdot (1 + i\, s_{\overline{n}|}^{(i)}) = 1 + i^* \cdot s_{\overline{n}|}^{(i)} . \tag{10}$$

---

[2]) Mit $K_t^{(i)}$, $a_{\overline{n}|}^{(i)}$, $s_{\overline{n}|}^{(i)}$ usw. werden Werte bezeichnet, welche mit dem vorgegebenen Renditesatz i gerechnet sind.

Der Barwert der zukünftigen Aktiendividenden ist laut Formel (3)

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{E_t}{(1+i)^t} \,. \tag{11}$$

Es ist nun zu bedenken, dass künftige Dividenden um so ungewisser erscheinen, je weiter entfernt ihre Fälligkeit in der Zukunft liegt. Dies lässt sich berücksichtigen, indem der Diskontierung von E_1, E_2, ... E_t steigende Effektivzinssätze i_1, i_2, ... i_t ... zugrunde gelegt werden. In diesem Sinne hat W. Scott Baumann[3]) angenommen:

$$i_t = i_1[1 + 0{,}0075(t-1)] \,, \tag{12}$$

z.B. $i_{20} = i_1 \cdot 1.1425$.

5. Der Renditesatz festverzinslicher Anlagen

Aus den Formeln (9) und (10) ergibt sich:

$$i = i^* + \frac{1-K_0}{a_{\overline{n}|}^{(i)}} \,. \tag{13}$$

$$i = \frac{i^*}{K_0} + \frac{1-K_0}{K_0 \cdot s_{\overline{n}|}^{(i)}} \,. \tag{14}$$

Bei gegebenem Kurs K_0 kann der Renditesatz i mit verschiedenen Hilfsmitteln geschätzt bzw. gerechnet werden:

Faustformeln der Praxis (teils sehr ungenaue Ergebnisse),
Iterationsverfahren auf Basis von (13) oder (14),
Rendite- und Kurs-Nomogramme,
mathematisch abgeleitete Approximationsformeln,
Interpolation (linear oder mit höheren Differenzen) von mathematischen Kursen,
Rendite- und Kurs-Tabellen,
Computer-Programme,
für Tilgungsanleihen: spezielle Kursformeln oder mathematische Laufzeiten.

---

[3]) W. Scott Baumann, Estimating the present value of common stocks by the variable rate method, Michigan 1963.

Im Rahmen von Theorie und Praxis der Renditesatz-Ermittlung verdient das nachfolgend beschriebene Vorgehen – obschon es nicht häufig angewandt wird – ein besonderes Interesse:

Laut (10) ist

$$(K_0 i - i^*)\, s^{(i)}_{\overline{n}|} = 1 - K_0 \,.$$

Der Klammerausdruck stellt den jährlichen Beitrag zur Auffüllung von K_0 auf den Rückzahlungskurs 1 dar. Wenn nun in einem bestimmten Zeitpunkt verschiedene Anlagen mit unterschiedlichen Renditesätzen i zu beurteilen sind, so ist es nach Ansicht einiger angesehener Fachleute richtig, die Grössen $K_0 i - i^*$ nicht zu den jeweiligen unterschiedlichen Renditesätzen i, sondern zu einem einheitlichen (den Marktverhältnissen entsprechenden) Wiederanlage-Renditesatz $\hat{\imath}$ aufzuzinsen, d.h. einen entsprechenden Rentenendwertfaktor $\hat{s}_{\overline{n}|}$ zu verwenden[4]), welcher mit $\hat{\imath}$ gerechnet ist. Es ergibt sich dann ein modifizierter, von $\hat{\imath}$ abhängiger Renditesatz

$$i' = \frac{i^*}{K_0} + \frac{1 - K_0}{K_0 \,.\, \hat{s}_{\overline{n}|}}\ ^{5)} \,. \tag{16}$$

Beispiele:

4%ige Obligation, $n = 15$, $K_0 = 0.8405$, $i = 0.056$

Für $\hat{\imath}$	=	0.04	0.05	0.056	0.06
resultiert i'	=	0.0571	0.0564	0.0560	0.0557

6. Bedeutung und Berechnung der Volatility

In Grossbritannien und Amerika benützt man den Begriff Volatility[6])[7]). Wenn der Kurs eines Wertpapiers sich (als Folge einer Rendi-

---

[4]) D.W.A.Donald, Actuarial note on the calculation of yields (Trans. Fact. Act. Vol.26, p.368, 1959).

[5]) Nach dieser Formel ist bereits das RETA Renditen-Tabellen-Buch von M.Müller und E.Holzer (Zürich 1944) gerechnet; dem damaligen Rendite-Niveau entsprechend, wurde $\hat{\imath} = 0.03$ verwendet.

[6]) A.T.Grant, Switching of British Government Securities (Investment Analyst, No.3, August 1962).

[7]) B.G.Malkiel, Equity yields, growth and the structure of share prices (American Econ. Review, Vol.53, p.1004, 1963).

tesatzänderung um z. B. $^1/_8\%$) stark ändert, so sagt man, es sei «volatile», seine Volatility sei gross. Der Begriff Volatility ist von erheblicher praktischer Bedeutung; ein Anleger, welcher annimmt, es sei mit grosser Wahrscheinlichkeit eine Senkung des Rendite-Niveaus zu erwarten, wird ein Wertpapier mit grosser Volatility – sofern die allfällige Rendite-Senkung im Kurs dieser Anlage noch nicht berücksichtigt ist – als interessant betrachten, weil ein erheblicher Kapitalgewinn im Bereich der Möglichkeit liegt.

Als Mass der Volatility kommt in Betracht der mit $\frac{i}{K_0}$ multiplizierte absolute Betrag des Differentialquotienten von K_0 nach i,

$$\eta(i, K_0) = -\frac{i}{K_0} \cdot \frac{dK_0}{di} = -\frac{dK_0}{K_0} : \frac{di}{i} . \tag{17}$$

Wegen (10) ist

$$\eta(i, K_0) = 1 + \frac{ni}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^n \cdot K_0} - \frac{ni^*}{(1+i)\, K_0} . \tag{18}$$

Die Grösse η (i, K_0) kann hier nicht umfassend untersucht werden; es mögen aber einige einfache Feststellungen folgen: η (i, K_0) ist im allgemeinen um so grösser, je länger die zukünftige Laufzeit ist, hängt aber auch von i^* ab. Bei ewigen Renten ist $\eta = 1$. Für Obligationen, deren Preis gleich dem Nennwert ist

$(K_0 = 1, \quad i^* = i)$, gilt wegen (18) $\eta = 1 - \frac{1}{(1+i)^n}$;

für Obligationen welche keine Zinscoupons haben und demgemäss mit Zins und Zinseszins zurückbezahlt werden, ist $\eta = \frac{ni}{1+i}$.

Beispiele:

		A	*B*	*C*
Es sei vorgegeben:	K_0	0.981	0.906	0.860
	i^*	0.045	0.04	0.04
	n	3	15	15
Es ergibt sich:	i	0.052	0.049	0.0538
	η	0.142	0.531	0.574

7. Beurteilung von Investitionsprojekten

Als Investitionen werden Massnahmen bezeichnet, welche zunächst Geldausgaben bewirken und mit denen (zu einem späteren Zeitpunkt eintreffende) grössere Geldeinnahmen erwartet werden: Beschaffung von Maschinen, Gebäuden, Einrichtungen; Entwicklung von Produkten; Geschäftserweiterungen; Erwerb von Unternehmungen und Beteiligungen[8] [9]).

Wie bei der numerischen Wertschriftenbewertung handelt es sich auch bei der numerischen Beruteilung von Investitionsprojekten weitgehend um die Berechnung des Renditesatzes i oder des mathematischen Wertes $K_0^{(i)}$. Es wird mit folgenden Grössen operiert:
Investitionsbetrag (er wird hier einfachheitshalber als einmalig angenommen und mit K_0 bezeichnet),

Investitionsdauer n
jährlicher Geldrückfluss $E_1, \ldots E_t, \ldots E_n$,
Liquidationserlös K_n
interner Ertragssatz i.

Die genannten Grössen stehen untereinander in der durch Gleichung (3) formulierten Beziehung.

Wenn der zu einem vorgegebenen Ertragssatz i gerechnete totale Gegenwartswert der Beträge $E_1, \ldots E_t, \ldots E_n, K_n$ mit $K_0^{(i)}$ bezeichnet wird, ergibt sich als Überschuss des Investitionsprojektes

$$K_0^{(i)} - K_0 \,.$$

In der Investitionsrechnung, welche sich im Laufe der letzten Jahrzehnte zu einer wirtschaftswissenschaftlichen Disziplin entwickelt hat, wird dieses Verfahren als Barwertmethode oder Kapitalwertmethode bezeichnet.

Zwei weitere, ebenfalls empfehlenswerte Methoden der Investitionsrechnung (Methode des internen Ertragssatzes und verbesserte Payback-Methode[9]) bestehen darin, dass gemäss (3) der dem Investitionsbetrag entsprechende interne Ertragssatz berechnet wird.

---

[8]) F. Trechsel, Investitionsplanung und Investitionsrechnung, 1966.
[9]) K. Käfer, Investitionsrechnungen, 1966/1970.

Ausser den genannten, modernen und exakten Verfahren verwendet die wirtschaftliche Praxis auch alte Beurteilungsmethoden, welche gewisse Unzulänglichkeiten aufweisen.

8. Dividenden-Barwert, Aktienkurs und -rendite

Gemäss Formeln (3) und (11) kann der diskontierte Betrag der erwarteten Aktiendividenden als mathematischer Kurs der Aktie betrachtet werden (es ist zum Renditesatz i zu diskontieren)[10]).

Für verschiedene *Voraussetzungen betreffend Dividendenverlauf* werden nachstehend die sich ergebenden mathematischen Aktienkurse aufgeführt.

a) Konstante Dividende E

$$K_0^{(i)} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E}{(1+i)^t} = \frac{E}{i}\,; \tag{19}$$

aus (17) resultiert $\eta(i, K_0) = 1$.

b) Zeitlich unbegrenztes Dividendenwachstum mit konstanter Wachstumsrate w

Es wird vorausgesetzt:

$$E_t = E_0 \cdot (1+w)^t \qquad t = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

Ein solches zukünftiges Wachstum ist dann zu erwarten, wenn man annehmen kann, dass gewisse Voraussetzungen wissenschaftlicher Natur (sie sind in einer Abhandlung von J. R. Hemsted[11]) dargelegt) erfüllt sein werden.

---

[10]) Es wird angenommen, der Anleger erwerbe oder behalte die Aktien für bleibenden Besitz ($n = \infty$). Die Möglichkeit des Wiederverkaufs darf hier ausser acht gelassen werden; der Anleger muss annehmen, er werde beim Wiederverkauf keinen besseren Preis erzielen als den diskontierten Betrag der nachher zu erwartenden Dividenden.

[11]) J. R. Hemsted, The expected yield of ordinary shares (J. Inst. Act. Stud.-Soc., vol. 16, p. 401, 1961).

Für $w < i$ ergibt sich

$$K_0^{(i)} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_0 (1+w)^t}{(1+i)^t} = \frac{E_0 (1+w)}{i-w} = \frac{E_1}{i-w} . \tag{21}$$

$$i = \frac{E_0 (1+w)}{K_0} + w = \frac{E_1}{K_0} + w = m_1 + w . \tag{22}$$

Wenn die Dividende ständig erheblich wächst, rechtfertigt sich also ein bedeutend höheres Kurs-Dividende-Verhältnis $\frac{K}{E}$ als bei einer Aktie mit konstanter Dividende.

Anderseits ist ein ausserordentlich hohes Kurs-Dividende-Verhältnis $\frac{K}{E}$ nur dann zu verantworten, wenn erwartet werden kann, dass die Dividende stark und anhaltend wächst.

Für ein beliebiges t gilt:

$$K_t^{(i)} = K_0^{(i)} \cdot (1+w)^t , \tag{23}$$

d.h. der mathematische Aktienkurs wächst jährlich um die Dividenden-Wachstumsrate.

Aus (17) und (21) ergibt sich $\eta(i, K_0) = \frac{i}{i-w}$, d.h. die Volatility von Aktien mit steigenden Dividenden ist grösser als diejenige von Aktien mit konstanten Dividenden.

Beispiele:

Aus $E_0 = 1$, $i = 0.05$, $w = 0.03$ folgt:

$K_0^{(i)} = 51.5$, $K_t^{(i)} = 51.5 \cdot 1.03^t$, $\eta = 2.5$

Aus $K_0 = 30$, $E_0 = 1$, $w = 0.02$ folgt:

$i = \frac{1.02}{30} + 0.02 = 0.054$, $\eta = 1.59$

Auch durchaus normale Aktien, welche dem Mittel eines beispielsweise durch den Financial Times-Actuaries-Index erfassten theoreti-

schen Aktienbestandes entsprechen und als Standard-Aktien bezeichnet werden können, weisen langfristig eine Dividenden-Wachstumsrate auf. Wenn wir eine beliebige Aktie (K_0, E_0, m_1, w), z.B. eine ausgesprochene Wuchsaktie, mit der Standard-Aktie ($K_0^{(s)}$, $E_0^{(s)}$, $m_1^{(s)}$, $w^{(s)}$) vergleichen und gleiche Renditesätze annehmen[12]), ergibt sich laut (22)

$$m_1 + w = m_1^{(s)} + w^{(s)} .$$

Diese Gleichung beantwortet die Frage, wie hoch das Dividende-Kurs-Verhältnis $m_1 = \frac{E_1}{K}$ sein darf, damit der Kauf einer Wuchsaktie als noch interessant betrachtet werden kann. Anderseits lässt sich aus der Gleichung ersehen, bei welcher Dividenden-Wachstumsrate der Renditesatz gleich demjenigen einer Standard-Aktie ist.

Es sei daran erinnert, dass ein unbegrenztes Dividendenwachstum mit konstanter Wachstumsrate vorausgesetzt ist.

c) Dividendenwachstum während N Jahren, nachher konstante Dividende

Es wird angenommen, die Unternehmung sei in einem Stadium starken Dividendenwachstums und gehe nach N Jahren in einen Zustand der Stabilität über. Unter dieser Voraussetzung gilt:

Wenn
$$\frac{(1+w)^N}{(1+i)^N} = \xi \tag{24}$$

gesetzt wird, ist

$$K_0^{(i)} = \frac{E_0 (1+w)\,(1-\xi)}{i-w} + \frac{E_0\,\xi}{i} . \tag{25}$$

Nach einem einfachen Rechenverfahren von A.T. Jamieson[13]) lässt sich ermitteln, während wieviel Jahren die Dividende steigen muss, wenn das gegenwärtige Kurs-Dividende-Verhältnis, die Wachstumsrate und der Renditesatz vorgegeben sind.

---

[12]) D. Weaver and M. G. Hall, The evaluation of ordinary shares using a computer (J. Inst. Act. vol. 93, p. 165, 1967).

[13]) A. T. Jamieson, Some problems of life office investment in ordinary shares (Trans. Fac. Act. vol. 26, p. 817, 1959).

Critchley hat eine Näherungsformel aufgestellt[14]), nach welcher sich diejenige konstante Dividende ergibt, welche den gleichen mathematischen Aktienwert liefert wie die während N Jahren zur Wachstumsrate w steigende und dann konstante Dividende vom Anfangsbetrag E_0.

d) Dividendenwachstum von jährlich w_{I} während N Jahren, nachher (zeitlich unbegrenzt) *von jährlich w_{II}*

Für diesen Fall lautet die Formel:

$$K_0^{(i)} = \frac{E_0 (1 + w_{\mathrm{I}}) (1 - \xi')}{i - w_{\mathrm{I}}} + \frac{E_0 \, \xi' (1 + w_{\mathrm{II}})}{i - w_{\mathrm{II}}} \tag{26}$$

wobei $\xi' = \dfrac{(1 + w_{\mathrm{I}})^N}{(1 + i)^N}$ und

$w_{\mathrm{II}} < i$ vorausgesetzt ist.

Tabellen

Der Voraussetzung *c)* entsprechende Tabellen von Dividenden-Barwerten sind von Clendenin und van Cleave publiziert worden[15]).

Ein reichhaltiges Tabellenwerk einer englischen Wertschriftenmaklerfirma[16]) liefert (unter den Voraussetzungen *c)* und *d)*) für vorgegebene Werte von $\dfrac{E_1}{K}$, w_{I}, N und w_{II} den Renditesatz i.

Weitere wertvolle Hilfsmittel für die Aktienbewertung sind ferner die Tabellenwerke von W. Scott Bauman[3]) und von Molodovsky, May und Chottiner[17]) sowie ein von Malkiel[7]) entwickeltes Verfahren, nach welchem das marktkonforme Kurs-Gewinn-Verhältnis einer Aktie ermittelt werden kann.

---

[14]) J.B. Marshall, The evaluation of ordinary shares (Trans. Fac. Act. vol. 30, p. 95, 1967).

[15]) J.C. Clendenin and M. van Cleave, Growth and common stock values (J. Finance, vol. IX, p. 365, 1954). J.C. Clendenin, Introduction to investments, p. 100, 1960.

[16]) Growth yield tables, herausgegeben von Phillips and Drew, London. (For private circulation only).

[17]) N. Molodovsky, C. May and S. Chottiner, Common stock valuation. Principles, tables and application (Fin. Analysts Journ., 1965).

Es sei darauf hingewiesen, dass vorstehende Aufzählung nicht alle Bewertungsmethoden enthält und dass numerische Verfahren das individuelle Urteil des Anlegers nicht völlig ersetzen.

Zum weiteren Bereich von Kurs und Rendite gehören mehrere Probleme (Renditekurven, Anlagen-Selektion, spezielle Gesichtspunkte des investierenden Lebensversicherers, switching), welche in diesem Aufsatz nicht besprochen werden konnten.

Zusammenfassung

Wie in den Vorbemerkungen näher ausgeführt ist, wird im vorstehenden Bericht über verschiedene Begriffe und Beziehungen referiert, welche in der neueren finanzmathematischen Literatur eingeführt und untersucht wurden. Gleichzeitig wird auf moderne Rechenverfahren und Tabellenwerke hingewiesen, welche die numerische Beurteilung der Rendite von Kapitalanlagen erleichtern.

Résumé

Comme cela a été rapporté d'une façon plus détaillée dans l'avant-propos, le présent article traite de quelques notions et relations introduites et analysées dans la nouvelle littérature concernant les mathématiques financières. Simultanément il est fait mention des méthodes modernes de calcul, ainsi que de recueils de tableaux facilitant l'appréciation numérique du rendement des placements de capitaux.

Riassunto

Come si menziona più particolareggiatamente negli avampropositi, il presente studio riferisce di vari concetti e relazioni introdotti ed esaminati nella letteratura recente sulla matematica finanziaria. Nel contempo si indicano moderni metodi di calcolo e raccolte di tavole che facilitano l'apprezzamento numerico della rendita di investimenti di capitali.

Summary

As is more fully explained in the introductory remarks, the present report deals with various concepts and relations which have been introduced and investigated in the more recent literature on mathematics of finance. At the same time reference is made to modern calculation procedures and tables which simplify the numerical evaluation of returns on capital investments.