Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 71 (1971)

Artikel: Grösstschaden-Verteilung und ihre Anwendungen

Autor: Ammeter, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967160

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Grösstschaden-Verteilungen und ihre Anwendungen

Von Hans Ammeter, Zürich

Das Problem der Gross- und Grösst-Risiken erlangt eine immer grössere Bedeutung im Versicherungswesen. In unserem dynamischen und technischen Zeitalter gibt es immer grössere Objekte, welche nach Deckung suchen. Mitunter wird es schon recht schwierig, für Grösstobjekte die gesamte Deckung zusammenzubringen, was nicht verwunderlich ist, weil diese Grösstobjekte Schäden von mehreren hundert Millionen Schweizer Franken beinhalten können. Für die private Versicherung wird es zur Existenzfrage, diese Deckung in dieser oder jener Weise übernehmen zu können. Verschiedene Gremien befassen sich intensiv mit diesem Fragenkreis. So hat zum Beispiel das Comité Européen des Assurances seine Jahrestagung 1969 dem Problem gewidmet.

Es liegt in der Natur der Sache, dass für das Grossrisikoproblem die Theorie der Grösstschäden, welche gewissermassen noch eine Stufe höher liegt, von grundlegender Bedeutung ist. Diese Theorie gibt wertvolle Einsichten in die Struktur der Grossschäden und führt zu sinnvollen Lösungen für die Bemessung von Grossrisiko-Reserven und für die Ansetzung der Maxima des Selbstbehaltes, ja für die gesamte Risikopolitik eines Versicherungsträgers. Darüber hinaus erlaubt die Kenntnis der Verteilungsgesetze der Grösstschäden die Prämienberechnung für Grösstschaden-Deckungen und erweist sich als nützlich für verschiedene statistische Anwendungen.

Ausgangspunkt für die Herleitung der Grösstschaden-Verteilungen ist die statistische Theorie der Extremwerte, die vor allem von Gumbel begründet worden ist. Dieser Autor hat denn auch ein bekanntes Lehrbuch unter dem Titel «Statistics of Extremes» veröffentlicht. Die Gumbelschen Ansätze können jedoch nicht unmittelbar auf das Versicherungswesen übertragen werden. Gumbel geht nämlich von statistischen Erhebungen aus mit einer feststehenden Zahl von Versuchen. Im Versicherungswesen tritt eine zusätzliche Schwierigkeit auf, nämlich dass die Anzahl der Schadenfälle nicht fest, sondern selbst eine zufällige Variable

ist. Man kann deshalb nicht a priori sagen, wieviel Schadenfälle in einer Beobachtungsperiode, d.h. zum Beispiel in einem Jahr, auftreten werden. Diese Schwierigkeit lässt sich jedoch überwinden, führt aber dazu, dass gewisse Unterschiede in den Ansätzen und Resultaten auftreten.

Der Verfasser hat sich schon in früheren Jahren mit verschiedenen Teilaspekten des Problems befasst und erste Resultate in zwei früheren Arbeiten veröffentlicht [1, 2][1]).

Diese Arbeiten sind im Zusammenhang mit zwei ASTIN-Kolloquien entstanden, an denen verschiedene ASTIN-Mitglieder mit verdienstvollen Beiträgen aufgewartet haben. Es seien hier vor allem die Herren Beard, Franckx und Thépaut genannt. Herr Beard war es übrigens, der den Verfasser auf das Thema aufmerksam machte und ihn einlud, sich damit zu beschäftigen, wofür ihm an dieser Stelle der beste Dank ausgesprochen sei. In jüngster Zeit haben sich erfreulicherweise auch weitere Autoren dem Problem angenommen, was zu einer fruchtbaren Vertiefung der Erkenntnisse schon geführt hat und noch führen wird.

Im folgenden wird zunächst versucht, einen Überblick zu geben über die bereits vorliegenden theoretischen Resultate. Dabei wird von möglichst allgemeinen Ansätzen ausgegangen, die dann durch immer weitergehende Spezialisierung schliesslich zu Modellen führen, die eine brauchbare Unterlage abgeben für eine fruchtbare Analyse der Grösstschäden bei den verschiedenen Anwendungen.

I. Grösstschaden-Verteilungen

1. Die grundlegende allgemeine Formel für die Verteilungsfunktion des Grösstschadens stammt von Prof. *Franckx* [6].

Bei der Herleitung der Formel von Franckx geht man zunächst davon aus, dass insgesamt r Schadenfälle auftreten; die Wahrscheinlichkeit, dass der Grösstschaden kleiner oder höchstens gleich m ausfällt bei r insgesamt auftretenden Schadenfällen, ist gleich dem Produkt aus der Wahrscheinlichkeit q_r, dass insgesamt r Schadenfälle auftreten und der Wahrscheinlichkeit $[S(m)]^r$, dass keiner dieser Schadenfälle eine Schadensumme $x > m$ aufweist.

[1]) Die Zahlen in [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluss dieser Arbeit.

Darin bedeutet $S(m)$ die Verteilungsfunktion der Schadensumme m eines einzelnen Schadens, d.h. $S(m)$ ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass irgendein Einzelschaden höchstens gleich m ausfällt. Die zugehörige Frequenzfunktion der Schadensumme m eines Einzelschadens wird im folgenden mit $s(m)$ bezeichnet; $s(m)dm$ ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass irgendein Einzelschaden in das infinitesimale Intervall $(m, m + dm)$ fällt. Mit q_r wird die Frequenzfunktion der Schadenzahlen bezeichnet; q_r bedeutet somit die Wahrscheinlichkeit, dass in einem wohldefinierten Zeitabschnitt, z.B. einem Versicherungsjahr, genau r Schadenfälle eintreten.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Grösstschaden bei irgend einer Schadenzahl r höchstens gleich m ausfällt, ist gleich der Summe aller Wahrscheinlichkeiten für $r = 1, 2, 3$ usw., also gilt für die Verteilungsfunktion des Grösstschadens m die Formel

$$\Phi(m) = \sum_{r=1}^{\infty} q_r [S(m)]^r . \tag{1'}$$

Benützt man die sog. erzeugende Funktion der Verteilung q_r

$$Q(s) = \sum_{r=0}^{\infty} q_r \, s^r ,$$

so kann man für die Verteilungsfunktion des Grösstschadens m die allgemeine Formel schreiben

$$\Phi(m) = Q[S(m)] . \tag{1}$$

Die Formel (1) von Franckx bedeutet also, dass sich die Verteilungsfunktion des Grösstschadens m, $\Phi(m)$, aus der erzeugenden Funktion Q der Verteilung der Schadenzahl r ergibt, wenn man anstelle des Arguments s die Verteilungsfunktion der Schadensummenverteilung $S(m)$ einsetzt, was ein bemerkenswert elegantes Resultat ergibt. Die Funktion (1') für $\Phi(m)$ strebt für $m \to \infty$ nicht gegen 1, sondern gegen $1 - q_0$. Um zu einer vollständigen Verteilung zu gelangen, muss man deshalb für den schadenfreien Fall noch das Zusatzglied für $r = 0$ beifügen, d.h. die untere Grenze der Summe in der Formel (1') rechts ist auf $r = 0$ anzusetzen, obschon man beim schadenfreien Verlauf kaum von einem «Höchstschaden m» sprechen kann. Das Zusatzglied q_0 hat aber bei fast allen praktischen Anwendungen numerisch keine Bedeutung. Im folgenden wird es daher in der Regel vernachlässigt.

Aus der allgemeinen Formel können speziellere Ausdrücke hergeleitet werden. Zunächst sei für q_r die Poisson-Formel

$$q_r = \frac{e^{-t}\, t^r}{r!} \tag{2a}$$

eingeführt, worin t die erwartete Schadenzahl bedeutet. Die erzeugende Funktion der Poisson-Verteilung lautet:

$$Q(s) = e^{-t(1-s)}, \tag{2b}$$

was für die Verteilungsfunktion des Grösstschadens m auf die Formel

$$\Phi(m) = e^{-t\,[1-S(m)]}$$

führt. (3)

Anstelle der Poisson-Verteilung (2) liessen sich natürlich für q_r auch allgemeinere Ansätze verwenden, z.B. die negative Binomial-Verteilung

$$q_r = \binom{h+r-1}{r} \left(\frac{h}{h+t}\right)^h \left(\frac{t}{h+t}\right)^r \tag{4a}$$

in der h den Schwankungs-Parameter bezeichnet. Die erzeugende Funktion der negativen Binomial-Verteilung

$$Q(s) = \left[1 + \frac{t}{h}(1-s)\right]^{-h} \tag{4b}$$

führt dann für die Verteilungsfunktion des Grösstschadens m schliesslich auf die Formel

$$\Phi(m) = \left\{1 + \frac{t}{h}[1 - S(m)]\right\}^{-h}. \tag{5}$$

Kupper [7] hat den Fall $h = 1$ näher untersucht, wo (4a) in eine geometrische Verteilung degeneriert, was die Rechnung wesentlich erleichtert. Der Fall $h = 1$ entspricht einem sehr stark schwankenden Risiko, das praktisch als unversicherbar gelten müsste. In diesem sehr extremen Fall reduziert sich – verglichen mit dem Poissonfall – der Mittelwert des höchsten Schadens um höchstens 11,4%. Bemerkenswert ist, dass die Annahme unstabiler Schadenswahrscheinlichkeiten

zu einem kleineren Mittelwert des höchsten Schadens führt, wobei aber selbst im genannten Extremfall nur eine verhältnismässig geringfügige Reduktion eintritt.

Im folgenden soll daher von dieser Verallgemeinerung weiter kein Gebrauch gemacht werden, da sie zu einer wesentlichen Komplizierung der Formeln führt, praktisch aber im Zusammenhang mit dem Grösstschaden-Problem kaum Wesentliches verspricht.

Aus der Formel für die Verteilungsfunktion $\Phi(m)$ lässt sich durch Differenzieren die Formel für die zugehörige Frequenzfunktion $\varphi(m)$ finden; $\varphi(m)\,dm$ ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste Schaden in das Intervall $(m, m + dm)$ fällt. Man erhält die Formel

$$\varphi(m) = \frac{d\,\Phi(m)}{dm} = t\,s(m)\,e^{-t[1-S(m)]}. \tag{6}$$

2. Die Formel (6) gilt für den grössten Schaden m. Es interessiert natürlich auch die Formel für den zweitgrössten, drittgrössten, allgemein nt-grössten Schaden m. Für die Frequenzfunktion des nt-grössten Schadens m gilt die Formel

$$\varphi_n(m) = t\,s(m)\,e^{-t[1-S(m)]}\,\frac{\{t[1-S(m)]\}^{n-1}}{(n-1)\,!}\,. \tag{7}$$

Diese Formel lässt sich in folgender Weise interpretieren:

Die beiden ersten Faktoren $t\,s(m)$ geben die durchschnittliche Anzahl Fälle und die Dichte eines Schadens m an, der restliche Teil der Formel (7) ist eine Poisson-Verteilung, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, dass $(n-1)$ weitere Schadenfälle mit je einem Einzelschaden von $x > m$ auftreten. Die Formel (7) lässt sich also in plausibler Weise erklären.

II. Die Verteilung des Gesamtschadens, wenn die grössten Schäden von der Deckung ausgeschlossen sind [1]

1. Für verschiedene Anwendungen ist es nützlich, die Verteilung des Gesamtschadens x zu kennen, wenn der grösste Schaden selbst von der Deckung im Selbstbehalt – etwa weil er rückversichert ist – ausgeschlossen ist. Die Frequenzfunktion dieser Verteilung sei mit $f(x, t, -1)$ bezeichnet. Für die Frequenzfunktion des Gesamtschadens $f(x, t)$, bei

welchem der grösste Schaden m nicht ausgeschlossen ist, gilt die bekannte Formel

$$f(x, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-t} t^r}{r!} s^{*r}(x) , \tag{8}$$

in der t die erwartete Schadenzahl und $s^{*r}(x)$ die r-te Faltungspotenz der Schadensummenverteilung $s(x)$ bedeutet. Wenn der grösste Schaden eine Summe zwischen m und $m + dm$ erfordert, so erhält man für die bedingte Frequenzfunktion $f_m(x, t, -1)$ den Ausdruck

$$f_m(x, t, -1) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{-t} t^r}{r!} r s(m) [s_m(x)]^{*(r-1)} .$$

Darin bedeutet $s_m(x)$ die an der Stelle m «gestutzte» Schadensummenverteilung

$$s_m(x) = s(x) \quad \text{für} \quad x \leqq m$$

$$s_m(x) = 0 \quad \text{für} \quad x > m$$

und $[s_m(x)]^{*(r-1)}$ die $(r-1)$-te Faltungspotenz von $s_m(x)$. Besonders zu beachten ist hier, dass die Stutzung zuerst erfolgt und erst nachher die Faltung.

Der Ausdruck $\qquad [s_m(x)]^{*(r-1)} dx$

ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass der Totalschaden aus r Schadenfällen – nach Ausschluss der grössten Schadensumme m – in das Intervall $(x, x + dx)$ fällt. Die Frequenzfunktion des Gesamtschadens $f(x, t, -1)$ bei Ausschluss eines beliebig hohen Höchstschadens m ergibt sich durch Integration über m aus der Frequenzfunktion $f_m(x, t, -1)$; es ist

$$f(x, t, -1) = \int_0^{\infty} f_m(x, t, -1)\, dm$$

$$= \int_0^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{-t} t^r}{r!} r s(m) [s_m(x)]^{*(r-1)} dm . \tag{9}$$

In dieser Formel ist der Faktor r besonders zu beachten; er bringt zum Ausdruck, dass bei insgesamt r Schadenfällen, jeder der r Fälle die Rolle des höchsten Schadens m übernehmen kann, so dass r verschiedene Möglichkeiten für das gleiche Gesamtergebnis bestehen.

2. Eine analoge Herleitung führt auf die Formel für die Frequenzfunktion des Gesamtschadens x, wenn nicht nur der Höchstschaden m selbst, sondern die n grössten Schäden ausgeschlossen werden. Die Schlussformel lautet

$$f(x, t, -n) = \int_0^\infty \sum_{r=n}^\infty \frac{e^{-t} t^r}{r!} n \binom{r}{n} s(m) \, [1 - S(m)]^{n-1} \, [s_m(x)]^{*(r-n)} dm \qquad (10)$$

und geht für $n = 1$ in die Formel (9) über.

3. Die Formeln (9) und (10) sind leider ziemlich kompliziert aufgebaut, so dass eine direkte numerische Berechnung praktisch kaum möglich ist, selbst wenn ein leistungsfähiger Computer verfügbar wäre. Anderseits ist es oft möglich, für die Momente der Verteilungen (9) und (10) der numerischen Berechnung zugängliche Formeln aufzustellen.

Für den Mittelwert der Verteilung (9), der mit $\mu_1^{(-1)}$ bezeichnet sei, gilt z.B. folgende Ableitung:

$$\mu_1^{(-1)} = \int_0^\infty x \, f(x, t, -1) \, dx \, .$$

Da die zufällige Variable x in der Verteilung (9) nur in der Faltungspotenz $[s_m(x)]^{*(r-1)}$ auftritt, muss zuerst der Ausdruck

$$\int_0^\infty x [s_m(x)]^{*(r-1)} \, dx$$

ermittelt werden. Es erweist sich als nützlich, zuerst den «gestutzten Mittelwert»

$$S_{m,1} = \int_0^m x \, s_m(x) \, dx = \int_0^m x \, s(x) \, dx$$

zu bestimmen; es ist

$$\int_0^\infty x [s_m(x)]^{*(r-1)} \, dx = (r-1) \, S_{m,1} \, S(m)^{r-2} \, .$$

Mit Hilfe dieser Beziehung erhält man schliesslich

$$\mu_1^{(-1)} = \int_0^\infty \sum_{r=1}^\infty \frac{e^{-t}\, t^r}{r!}\, r(r-1)\, s(m)\, S_{m,1}\, S(m)^{r-2}\, dm$$

$$= \int_0^\infty t^2\, s(m)\, S_{m,1}\, e^{-t\,[1-S(m)]}\, dm\,. \tag{11}$$

Durch eine ähnliche Ableitung ergibt sich für das zweite Moment die Schlussformel

$$\mu_2^{(-1)} = \int_0^\infty t\, s(m)\, e^{-t[1-S(m)]}\, [(t\, S_{m,1})^2 + t S_{m,2}]\, dm\,, \tag{12}$$

in der zur Abkürzung

$$S_{m,2} = \int_0^m x^2 s(x)\, dx$$

eingesetzt wurde. Für weitere Einzelheiten sei auf die Arbeit [1] verwiesen.

III. Die Paretoverteilung

1. Um zu möglichst konkreten Resultaten zu gelangen, ist es nützlich, anstelle der allgemeinen Schadensummen-Verteilung $S(m)$, einen ganz bestimmten Typ einzuführen, nämlich die sog. Paretoverteilung. Diese Verteilung ist durch folgende Formeln definiert:

$$s(x) = (\alpha-1)\, x^{-\alpha}$$

und

$$S(x) = 1 - x^{1-\alpha} \tag{13}$$

mit

$$x \geqq 1\,.$$

Die Paretoverteilung wird oft auch auf anderen Gebieten mit Erfolg angewendet, z.B. für Einkommensverteilungen und Intelligenztests. Die Kurve weist einen hyperbelähnlichen Verlauf auf. Für den Mittelwert und das zweite Moment gelten die Formeln

$$S_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2} \tag{14a}$$

$$S_2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 3} \, . \tag{14b}$$

Für $\alpha \leqq 2$ existiert der Mittelwert nicht. Für $\alpha \leqq 3$ existiert das zweite Moment nicht. Darin kommt die sehr langsame Annäherung an die x-Achse für grosse Summen zum Ausdruck. Die langsame Konvergenz bei grossen Summen bringt es mit sich, dass die Paretoverteilung eine für den Versicherer sehr ungünstige Verteilung ist, welche die Stabilität des Versicherungsgeschäftes gefährdet. *Segerdahl* und *Benktander* haben sogar gezeigt, dass es sich – von einem bestimmten Standpunkt aus gesehen – um die gefährlichste Kurvenart für den Versicherer handelt.

Nebenbei sei noch bemerkt, dass in der Literatur oft auch eine andere Parameter-Bezeichnung gewählt wird. Der Parameter $\alpha - 1$ wird oft als α bezeichnet. Bei Vergleichen muss man das stets beachten.

Ausschlaggebend ist bei Paretoverteilungen der Parameter α. Kleine α-Werte kennzeichnen für den Versicherer gefährliche Verteilungen mit gegebenenfalls nicht existierendem Mittelwert und Standardabweichung. Diese unbequemen Grenzfälle lassen sich durch geeignete Stutzung der Verteilung ausschalten; dadurch wird allerdings der Formelapparat etwas komplizierter und manche Formel, die im folgenden hergeleitet wird, würde etwas weniger elegant aussehen. Das erschwert zwar die Untersuchungen und Berechnungen, verunmöglicht sie aber nicht. Je grösser anderseits der Parameter α angesetzt wird, desto harmloser wird die Schadensummen-Verteilung Der Grenzwert $\alpha \to \infty$ führt schliesslich auf einheitliche Schadensummen.

Im Vergleich zu konkreten Schadensummen-Verteilungen lässt sich folgendes sagen: Bei den kleinen Summen, welche zwar als stark überwiegend angenommen sind, ist die Übereinstimmung nicht sonderlich gut; oft muss man sogar sagen, die Übereinstimmung sei ziemlich schlecht. Das ist aber für das Problem der Grösstschäden ziemlich bedeutungslos; hier kommt es vor allem auf den Bereich der grossen Summen an. In dieser Zone ist jedoch die Übereinstimmung der Paretoverteilung mit beobachteten Verteilungen oft ziemlich gut, manchmal sogar verblüffend gut. Man darf daher in vielen Fällen annehmen,

dass den aufgrund der Paretoverteilung gewonnenen Resultaten auf dem Gebiete der Höchstschadentheorie ein recht hoher Grad von Allgemeingültigkeit zugemessen werden darf.

Kupper hat in seiner Arbeit [7] auch noch den Fall untersucht, bei dem anstelle der Paretoverteilung die Exponentialverteilung mit gleichem Mittelwert angenommen wird. Die Exponentialverteilung konvergiert – insbesondere für kleines α – für grosse Schadensummen wesentlich schneller gegen Null als die Paretoverteilung, was auch dazu führt, dass alle ihre Momente – im Gegensatz zur Paretoverteilung – stets existieren. Die Annahme einer Exponentialverteilung führt darum – vor allem für kleines α – zu ganz wesentlich kleineren Mittelwerten für den grössten Schaden als die entsprechende Paretoverteilung. *Kupper* zeigt, dass in einem bestimmten Fall ($t = 100$; $\alpha = 2{,}25$) der Mittelwert des grössten Schadens im Paretofall 8,4mal grösser ist als im Fall der Exponentialverteilung mit gleicher mittlerer Schadensumme. Dieses Beispiel illustriert die Bedeutung einer vorsichtigen Annahme über die Schadensummenverteilung $s(x)$ im Bereich der grossen Summen, wo die statistischen Unterlagen wohl immer etwas dürftig sein werden. Die Paretoverteilung ist für den Versicherer stets eine vorsichtige Annahme, die aber glücklicherweise dennoch zu einem handlichen Formelapparat führt.

2. Setzt man in die allgemeinen Formeln (6) und (7) für die Frequenzfunktion des grössten oder nt-grössten Schadens für $s(m)$ die Paretoverteilung (13) ein, so erhält man

$$\varphi_1(m) = t(\alpha-1)\, m^{-\alpha} e^{-t m^{1-\alpha}} \tag{15}$$

und

$$\varphi_n(m) = t(\alpha-1)\, m^{-\alpha} e^{-t m^{1-\alpha}} \frac{(t m^{1-\alpha})^{n-1}}{(n-1)\,!}\,. \tag{16}$$

Für den Mittelwert des grössten Schadens m ergibt sich auf Grund von (15)

$$M_1^{(1)} = \int_0^\infty t(\alpha-1)\, m^{1-\alpha}\, e^{-t m^{1-\alpha}}\, dm\,.$$

Die Substitution

$$u = t m^{1-\alpha}$$

führt auf den Ausdruck

$$M_1^{(1)} = t^{\frac{1}{\alpha-1}} \int_0^t e^{-u} u^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}-1} du$$

$$= t^{\frac{1}{\alpha-1}} \Gamma_t \left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right).$$

In dieser Formel bezeichnet Γ_t die sogenannte unvollständige Gammafunktion. Da t in der Regel eine verhältnismässig grosse Zahl ist, kann man ohne nennenswerte Genauigkeitseinbusse t durch ∞ ersetzen, d.h. man kann die unvollständige durch die vollständige Gammafunktion

$$\Gamma\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}-1} du$$

ersetzen. Man erhält so für den Mittelwert des grössten Schadens die elegante Formel

$$M_1^{(1)} = t^{\frac{1}{\alpha-1}} \Gamma\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right), \tag{17}$$

in welcher das Argument der Γ-Funktion nach Formel (14a) den reziproken Mittelwert der Paretoverteilung (13) darstellt. Da zwischen dem Parameter α und dem Mittelwert S_1 der Paretoverteilung eine einfache Beziehung besteht, kann man α durch S_1 ersetzen und gelangt so zur Formel

$$M_1^{(1)} = t^{1-\frac{1}{S_1}} \Gamma\left(\frac{1}{S_1}\right), \tag{17'}$$

die unter Umständen auch benützt werden kann, wenn die Annahme einer Paretoverteilung $s(x)$ nicht genau erfüllt ist.

In analoger Weise erhält man für das zweite Nullpunktmoment des Höchstschadens m die Schlussformel

$$M_2^{(1)} = t^{\frac{2}{\alpha-1}} \Gamma\left(\frac{\alpha-3}{\alpha-1}\right), \tag{18}$$

worin das Argument der Gammafunktion gleich dem reziproken zweiten Moment der Paretoverteilung (13) ist.

Methodisch ganz analog lässt sich auch der Mittelwert des nt-höchsten Schadens berechnen. Man gelangt schliesslich zur Formel

$$M_1^{(n)} = t^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1} + n - 1\right)}{(n-1)!} . \tag{19}$$

Beachtet man die bekannte Rekursionsformel

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) ,$$

so kann man anstelle von (19) auch schreiben

$$M_1^{(n)} = \frac{\frac{\alpha-2}{\alpha-1} + n - 2}{n-1} M_1^{(n-1)} , \tag{19'}$$

wodurch eine einfache rekursive Berechnung der Erwartungswerte des höchsten, zweithöchsten, ...nt-höchsten Schadens ermöglicht wird.

3. In weitgehend ähnlicher Weise wie die Momente der Verteilung des höchsten Schadens lassen sich auch die Momente bestimmen für den Gesamtschaden, wenn z. B. der höchste Schaden ausgeschlossen wird. Für die Ableitung sei hier auf die Arbeit [1] verwiesen. Es ist

$$\mu_1^{(-1)} = t\,\frac{\alpha-1}{\alpha-2} - t^{\frac{1}{\alpha-1}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right) \tag{20a}$$

und

$$\begin{aligned} \mu_2^{(-1)} = {} & \left(t\,\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right)^2 + t\,\frac{\alpha-1}{\alpha-3} \\ & - \Gamma\left(\frac{2\alpha-3}{\alpha-1}\right)\left[2t^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right)^2\right] \\ & + \Gamma\left(\frac{3\alpha-5}{\alpha-1}\right)\left[t^{\frac{2}{\alpha-1}}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right)^2\right] \\ & - \Gamma\left(\frac{2\alpha-4}{\alpha-1}\right)\left[t^{\frac{2}{\alpha-1}}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha-3}\right)\right] . \end{aligned} \tag{20b}$$

4. In den bisherigen Formeln wird stets eine Paretoverteilung $s(x)$ angenommen mit nach oben unbegrenzten Schadensummen x. Für kleinere Werte von α – vor allem wenn $\alpha < 2$ ist – werden diese Formeln mitunter unbrauchbar, weil dann schon die mittlere Schadensumme S_1 nicht mehr existiert. Genau genommen muss man aber feststellen, dass kein Versicherungsträger Deckungen bis ins Unendliche gewährt. In dieser oder jener Weise findet stets eine Begrenzung statt, sei es, dass der Versicherer nur Risiken bis zu einem bestimmten Höchstbetrag übernimmt, sei es, dass er allfällige Exzedenten rückversichert. Man kann diesen Verhältnissen Rechnung tragen, indem man annimmt, der Versicherer begrenze seine Verpflichtungen auf ein bestimmtes Maximum U. Die Verteilung des grössten Schadens m, $\varphi_1(m)$ gemäss Formel (15), geht dann über in die allgemeinere Formel

$$\varphi_1^{(U)}(m) = \begin{cases} t(\alpha-1)\, m^{-\alpha} e^{-t m^{1-\alpha}} & 1 \leqq m < U \\ 1 - e^{-t U^{1-\alpha}} & m = U \\ 0 & m > U\,, \end{cases}$$

wobei angenommen wird, dass für alle Schäden $m \geqq U$ das Maximum U geleistet wird.

Wie *Kupper* in seiner Arbeit [7] gezeigt hat, ergibt sich dann anstelle von Formel (17) ür den Mittelwert des grössten Schadens m die allgemeinere Formel

$$M_1^{(1)}(U) = t^{\frac{1}{\alpha-1}} \left[\Gamma_t\left(\frac{1}{S_1}\right) - \Gamma_{U^*}\left(\frac{1}{S_1}\right) \right] + U(1 - e^{-U^*})\,, \tag{21}$$

wobei zur Abkürzung $U^* = tU^{1-\alpha}$ eingeführt wurde und auf die unvollständige Γ-Funktion zurückgegangen werden musste. Für grosses t strebt der Ausdruck (21) rechts gegen U, weil die Klammer [] und Ue^{-U^*} für $t \to \infty$ verschwinden; es ist also

$$M_1^{(1)}(U) = U \qquad \text{für } t \to \infty\,, \tag{21'}$$

was auch intuitiv zu erwarten ist, indem bei sehr grossem Versicherungsbestand ($t \to \infty$) der höchste Schaden m mit immer grösser werdender Wahrscheinlichkeit mit dem Maximum zusammenfallen muss.

Diese Feststellung gilt auch sinngemäss für den zweitgrössten, drittgrössten und nt-grössten Schaden, wobei naturgemäss die Konvergenz gegen U für wachsendes n immer schwächer wird.

IV. Die Struktur der Grösstschäden

Im folgenden wird versucht, anhand der hergeleiteten Formeln und für bestimmte numerische Annahmen die Grössenordnung der Grösstschäden zu illustrieren.

Diese numerischen Untersuchungen führen zu einigen Ergebnissen, die bisher wohl noch wenig bekannt waren.

In der nachfolgenden Tabelle sind einige Werte für den Erwartungswert des Grösstschadens $M_1^{(1)}$ bei verschiedenen Annahmen über die Parameter α und t zusammengestellt. Der besseren Vergleichbarkeit halber wird dabei der Erwartungswert des Grösstschadens stets in Prozenten der Bedarfsnettoprämie tS_1 für den in Betracht kommenden Versicherungsbestand ausgedrückt.

$M_1^{(1)}$ in Prozenten von tS_1

α	$t = 100$	$t = 200$	$t = 1000$
2,0	∞	∞	∞
2,25	36,6	31,8	23,1
3	8,9	6,3	2,8
4	4,2	2,6	0,9
5	2,9	1,7	0,5
10	1,6	0,8	0,2
∞	1,0	0,5	0,1

Alle drei Kolonnen vermitteln ein ähnliches Bild hinsichtlich der Abhängigkeit von α. Für kleine α -Werte – das sind die gefährlichen Fälle – ist der Erwartungswert des grössten Schadens sehr hoch. Für $t = 100$ ist zum Beispiel der Erwartungswert des grössten Schadens für $\alpha = 2{,}25$ mehr als das 36fache des durchschnittlichen Schadens. Mit wachsendem α – d. h. mit fallender Schadensummenstreuung –

nimmt die Belastung für den grössten Schaden immer mehr ab, um schliesslich für $\alpha \to \infty$ mit dem durchschnittlichen Schaden zusammenzufallen.

Interessant ist auch die Abhängigkeit von der Bestandesgrösse, die hier mit dem Parameter t – der erwarteten Schadenzahl – gemessen wird. Während der erwartete Gesamtschaden proportional mit t wächst, steigt $M_1^{(1)}$ nur proportional mit $t^{\frac{1}{\alpha-1}}$, d.h. schwächer an, z.B. für $\alpha = 3$ mit $t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{t}$. Daraus folgt, dass für grosse Bestände der Grösstschaden relativ weniger beansprucht als bei kleinen Beständen.

Für $\alpha = 2{,}25$ hat sich ergeben, dass der Grösstschaden mehr als das 36fache eines durchschnittlichen Schadens kostet, wenn $t = 100$ ist.

Für $t = 200$ steigt dieses Vielfache auf 64 und für $t = 1000$ sogar auf das 230 fache eines durchschnittlichen Schadens, was aber – wenn man mit der gesamten Erstversicherungs-Bedarfsnettoprämie vergleicht – auf die sinkenden Prozentsätze von 37 %, 32 % und 23 % führt. Für $\alpha = 3$, was etwa den Verhältnissen in der Automobilbranche entsprechen könnte, ergibt sich für

$$t = \begin{cases} 100 \\ 200 \\ 1000 \end{cases} \begin{matrix} \text{eine Belastung} \\ \text{für den höch-} \\ \text{sten Schaden} \\ \text{allein von} \end{matrix} \qquad M_1^{(1)} = \begin{cases} 8{,}9\% \\ 6{,}3\% \\ 2{,}8\% \end{cases} \begin{matrix} \text{der gesamten} \\ \text{Erstversiche-} \\ \text{rungs-Bedarfs-} \\ \text{nettoprämie} \end{matrix}$$

In diesen Zahlen kommt die ausgleichende Kraft eines wachsenden Bestandes zum Ausdruck, welche die wachsende Grösse des höchsten Schadens überzukompensieren vermag.

Im theoretischen Grenzfall $\alpha = 2$ ergäbe sich übrigens überhaupt keine Abhängigkeit von t, weil in diesem Fall $t^{\frac{1}{\alpha-1}} = t^1$ ausfiele, d.h. der Erwartungswert des Grösstschadens $M_1^{(1)}$ wächst proportional mit dem Bestand an, so dass die erwähnte ausgleichende Kraft des wachsenden Bestandes nicht zur Geltung kommt. Dieser Grenzfall ist zwar irreal, indem er auf unendlich grosse Erwartungswerte führt. Praktisch kann man aber doch sagen, dass für α-Werte, die wenig über 2 liegen, praktisch Unabhängigkeit gegenüber Veränderungen im Bestandesumfang vorliegt.

Bisher wurde nur der Erwartungswert des Grösstschadens betrachtet. In der Praxis ist auch der Schwankungsbereich des Grösst-

schadens und darüber hinaus die Grössenordnung eines maximalen Höchstschadens von Bedeutung. Für die Abklärung dieser Frage ist der sogenannte Variationskoeffizient nützlich, der durch das Verhältnis Standardabweichung σ zum Mittelwert M_1 definiert ist. Für diesen Variationskoeffizienten gilt die Formel

$$V = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{\alpha-3}{\alpha-1}\right) - \Gamma^2\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right)} \sim \frac{1}{\alpha-2{,}55},$$

nach welcher der Variationskoeffizient überraschenderweise ganz unabhängig ist vom Bestandesumfang t.

Die nachstehende Tabelle ergibt folgende numerischen Werte für den Variationskoeffizienten V:

	Variationskoeffizient	
α	genau	approximativ
3,25	1,52	1,43
3,5	1,03	1,05
3,75	0,81	0,83
4,0	0,68	0,69
5,0	0,44	0,41
∞	0	0

Setzt man grob vereinfachend $V = 1$, so könnte man – wenn man den Variationsbereich auf $\pm 2\sigma$ ansetzt – in erster Näherung sagen, der maximale Grösstschaden sei ungefähr mit 3 $M_1^{(1)}$ anzusetzen.

Dies zeigt, dass insbesondere bei kleinen α-Werten die Grösstschäden einen ganz erheblichen Teil der Prämieneinnahmen aufzehren können. Dies gilt insbesondere für kleine Versicherungsbestände, wo der Grösstschaden die ganze Prämie oder noch mehr beanspruchen könnte.

Neben den Grösstschäden selbst interessiert natürlich auch die Grössenordnung des zweithöchsten, dritthöchsten usw. Schadens.

Nach der Rekursionsformel (19′) kann man die Erwartungswerte des nt-höchsten Schadens rekursiv aus dem Erwartungswert des höchsten Schadens berechnen.

In der folgenden Tabelle sind einige numerische Werte für diese zweit-, dritt- usw. höchsten Schäden in Prozenten des Mittelwertes des grössten Schadens zusammengestellt, wobei wiederum die bemerkenswerte Feststellung zu beachten ist, dass diese Verhältniszahlen von der Grösse des Versicherungsbestandes - gemessen durch den Parameter t – unabhängig sind.

$M_1^{(n)}$ in Prozenten von $M_1^{(1)}$

α	S_1	$n=2$ %	$n=3$ %	$n=5$ %	$n=10$ %
2,25	5,0	20	12	7	4
2,50	3,0	33	22	14	
2,75	2,3	43	31	22	
3,00	2,0	50	38	27	19
3,25	1,8	56	43	33	
3,50	1,7	59	47	36	
3,75	1,6	63	51	40	
4,00	1,5	67	56	45	35
5,00	1,3	77	68	59	
∞	1,0	100	100	100	100

Für $\alpha = 2{,}25$ mit $S_1 = 5$ beträgt somit der Erwartungswert des zweithöchsten Schadens nur noch 20% des Erwartungswerts für den Grösstschaden selbst. Dieses Verhältnis steigt mit wachsendem α an. Für $\alpha = 3$ mit $S_1 = 2$ beträgt es z. B. 50%, für $\alpha = 4$, $S_1 = 1{,}5$ ist es 67%.

Ähnliche Verhältniszahlen lassen sich für die dritt-, viert- usw. grössten Schäden herleiten. Für $\alpha = 3$ beträgt z. B. der Erwartungswert

des zweitgrössten Schadens	50%	– wie erwähnt –
des drittgrössten Schadens	37,5%	
des zehntgrössten Schadens	18,5%	

des Erwartungswertes des grössten Schadens selbst. Allgemein kann man feststellen, dass je gefährlicher der Grösstschaden selbst ins Gewicht fällt, desto harmloser die nachfolgenden Schäden sind, oder umgekehrt: je weniger der Grösstschaden selbst belastet, umso mehr sind die nachfolgenden Grösstschäden von Bedeutung.

V. Statistische Anwendungen

1. Der Erwartungswert des Grösstschadens genügt der Formel (17), wenn eine Paretoverteilung angenommen wird. Dieser Erwartungswert

$$M_1^{(1)} = t^{\frac{1}{\alpha-1}} \Gamma\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right)$$

weist eine ähnliche Konstruktion auf wie die Standardabweichung des Gesamtschadens, welche durch die Formel

$$\sigma = \sqrt{tS_2} = \sqrt{\frac{t(\alpha-1)}{\alpha-3}}$$

dargestellt wird.

Für $\alpha = 3$ ist somit der Erwartungswert des Grösstschadens in gleicher Weise wie die Streuung des Gesamtschadens von der Dimension $t^{\frac{1}{2}}$. Aber auch für andere α-Werte besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen Streuung des Gesamtschadens und Erwartungswert des Grösstschadens. Dies zeigt, dass man den Erwartungswert des Grösstschadens auch als Streuungsmass für den Gesamtschaden benützen kann. Im Paretofall ist der Erwartungswert des Grösstschadens sogar leistungsfähiger als die übliche Streuung, da dieser Erwartungswert für einen grösseren α-Bereich existiert als die Streuung des Gesamtschadens.

Das übliche Streuungsmass σ weist wegen der ihm zugrunde liegenden quadratischen Mittelbildung den Nachteil auf, dass es nicht anschaulich der Intuition zugänglich ist. Auch in dieser Beziehung ist der Erwartungswert des Grösstschadens dem üblichen Streuungsmass überlegen, indem es unmittelbar einleuchtet, dass der Erwar-

tungswert des Grösstschadens signifikativ ist für den Schwankungsbereich.

Darüber liessen sich verschiedene Anwendungen herleiten. Beispielsweise könnte man die Risikopolitik einer Gesellschaft anhand des Erwartungswertes des Grösstschadens festlegen. Ebenso könnte man, wenn die Reihe der Grösstschäden für verschiedene aufeinanderfolgende Jahre bekannt ist, aus diesen Werten auf die zugrunde liegende Verteilung schliessen usw.

2. Es ist gerade in der Sachversicherung üblich, die Risikoqualität durch die Gesamtschadenbelastung in Prozenten der Prämie zu messen. Die Aussagekraft (Credibility) solcher Erfahrungszahlen wird jedoch oft durch die grössten Schäden stark gestört, so dass man zu einer bedeutend besseren Aussagekraft gelangt, wenn man die grössten Schäden aus der Statistik ausschliesst.

Derron hat in seiner Arbeit [5] gezeigt, dass man durch den Ausschluss der Grösstschäden zu einer sehr starken Verbesserung der Kredibilität gelangen kann. Dabei muss man jedoch auf die verallgemeinerten Gesamtschadenverteilungen (9) oder (10) zurückgreifen, d.h. die durch den Ausschluss der Grösstschäden entstehende Deformation der Verteilung des Gesamtschadens berücksichtigen. Diese lässt sich aber durch die genannten Verteilungen (9) und (10) erfassen, gegebenenfalls in Verbindung mit den Formeln für Mittelwert und Streuung (20a) und (20b) der Verteilung des Gesamtschadens unter Ausschluss des oder der Grösstschäden. Auch hier kann man zu sinnvollen Anwendungen gelangen.

VI. Deckung der Grösstschäden

Es besteht die Möglichkeit, die Grösstschäden durch Rückversicherung abzudecken und diese dadurch aus der Schadenbelastung des Erstversicherers zu eliminieren.

Die hergeleiteten Formeln für die Grösstschäden geben dabei eine gute Grundlage ab für die Tarifierung dieser Grösstschadendeckungen. In der Tat stellen die Erwartungswerte gerade die Bedarfsnettoprämien für solche Deckungen dar. Für praktische Deckungen müsste diese Bedarfsnettoprämie noch mit einem erheblichen Sicherheitszuschlag ausge-

stattet werden, auf dessen nähere Gestaltung hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Die numerischen Beispiele in Kapitel IV illustrieren die Höhe dieser Bedarfsnettoprämie. Für $\alpha = 3$ beträgt z. B. die Bedarfsnettoprämie für die Abdeckung des grössten Schadens bei einem Versicherungsbestand mit $t = 100$ rund 8,9% der gesamten Bedarfsnettoprämie des betreffenden Bestandes. Dieser Prämiensatz reduziert sich für $t = 200$, d.h. bei einem doppelt so grossen Bestand, auf 6,3% und für $t = 1000$ auf 2,8% der Bedarfsnettoprämie des gesamten Bestandes. Diese Deckung kann auch mit einer Franchise oder mit einer Maximierung ausgestattet werden, wobei sich die entsprechenden Rabatte leicht mit Hilfe einer Tabelle über die unvollständige Γ-Funktion ermitteln lassen. Hiefür sei auf die Arbeit [2] verwiesen.

Die Grösstschaden-Rückversicherung ist vor allem bei kleinen α sehr wirksam, wie folgendes Beispiel zeigt: Für $\alpha = 3$ ist z. B. die Standardabweichung für den Gesamtschaden des Erstversicherers unendlich gross. Wird aber der Grösstschaden durch Rückversicherung ausgeschlossen, so reduziert sich die unendlich grosse Standardabweichung auf 13,5% der gesamten Erstversicherer-Bedarfsnettoprämie, d.h. auf einen ziemlich kleinen Betrag. Dies zeigt, dass eine Grösstschaden-Rückversicherung das Risiko des Erstversicherers sehr stark stabilisieren kann.

Berliner hat in seiner Arbeit [4] gezeigt, dass eine sehr hohe Korrelation besteht zwischen dem Grösstschaden und dem Gesamtschaden des Erstversicherers. Für gewisse numerische Beispiele ist Berliner zu Korrelationskoeffizienten in der Grössenordnung von 75% gelangt. Auch diese Untersuchungen bestätigen, dass durch die Grösstschaden-Rückversicherung der Erstversicherer seinen Schadenverlauf sehr stark glätten kann.

Auch in administrativer Hinsicht würden solche Grösstschadendeckungen Vorteile aufweisen, wäre es doch nicht notwendig, individuelle Überweisungen mit ihren unvermeidlichen Umtrieben zu tätigen. Auf der anderen Seite ist es verständlich, dass die Rückversicherer hier zurückhaltend sind, weil eine für sie ziemlich gefährliche Deckung übernommen werden müsste, was jedenfalls nicht ohne gewichtige Sicherheitszuschläge geschehen könnte.

Für die Tarifierung von Grösstschaden-Rückversicherungen wären die in der vorliegenden Arbeit entwickelten Formeln, die sich auf die Paretoverteilung stützen, in verschiedener Hinsicht von Nut-

zen. Einmal wäre es möglich, mit sinnvollen Formeln, die verhältnismässig einfach auszuwerten wären, zu arbeiten. Auf der anderen Seite wurde schon darauf hingewiesen, dass die Paretoverteilung eine sichere Grundlage für die Tarifierung abgibt, indem die Paretoformel die ungünstigste Annahme darstellt, welche getroffen werden kann. Oder mit anderen Worten, die Paretoverteilung führt zu einer für die vorgesehenen Deckungen unentbehrlichen Sicherheit.

Die Grösstschadendeckung lässt sich im übrigen je nach den praktischen Bedürfnissen noch verfeinern. So kann man nicht nur wie erwähnt den Grösstschaden mit einer Franchise ausstatten oder maximieren, man kann auch nicht nur den Grösstschaden selbst, sondern auch die Zweit-, Dritt- und die folgenden Grösstschäden in die Dekkung einbeziehen. Ein besonders elegantes System hat *Thépaut* in seiner Arbeit [8] entwickelt, nach dem die Summe der n grössten Schäden rückversichert wird, soweit die einzelnen Schäden den $(n+1)$-grössten Schaden übersteigen. Für die Einzelheiten sei auf die Originalarbeit von *Thépaut* [8] verwiesen.

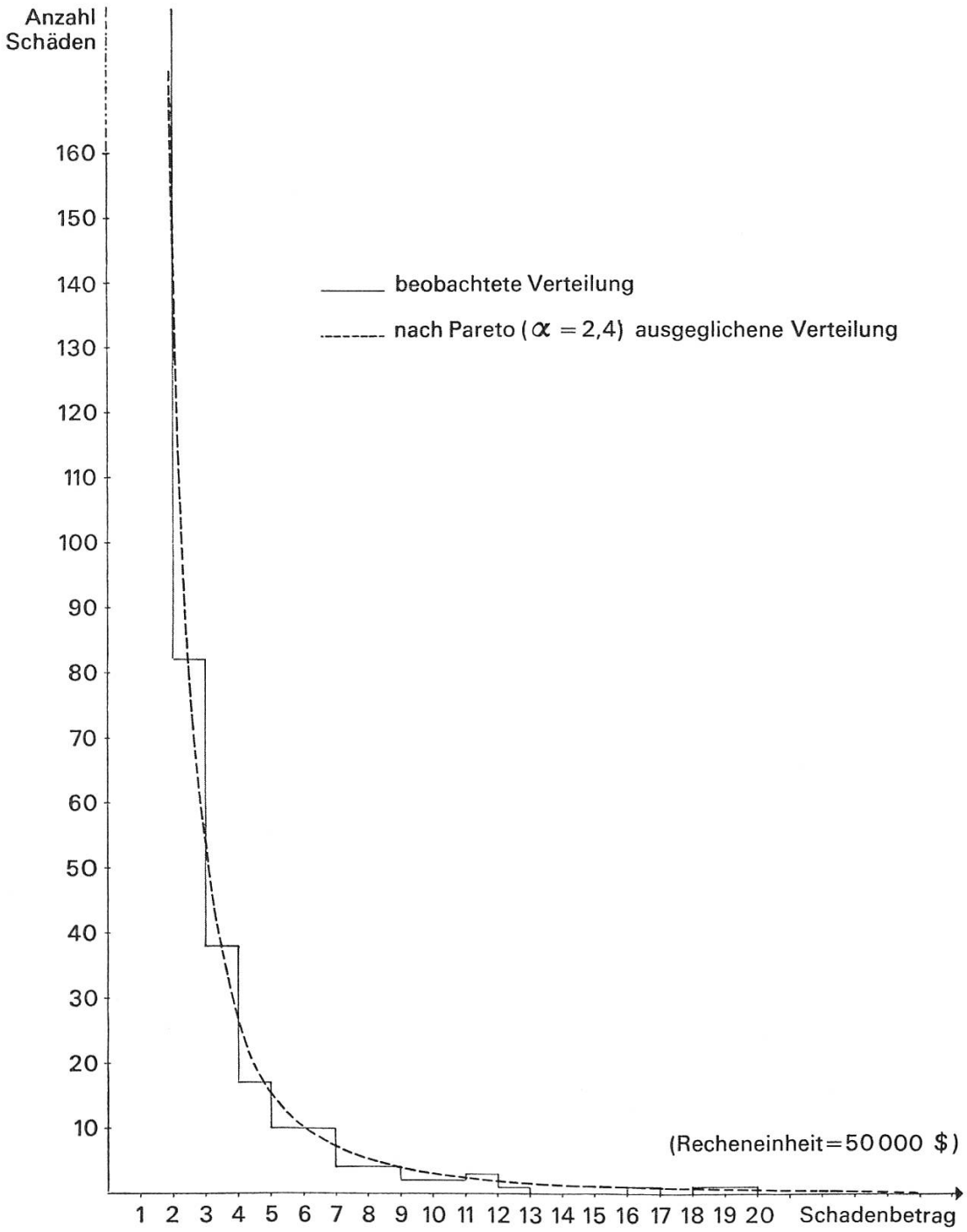
VII. Ein Beispiel aus der amerikanischen Feuerversicherung

Im folgenden wird ein Beispiel aus einem amerikanischen Feuerversicherungs-Portefeuille näher analysiert, dessen Daten aus der Arbeit [3] entnommen wurden.

In diesem Portefeuille betrug die Prämieneinnahme rund 600 Millionen Dollar, wovon 90 Millionen Dollar allein auf die Schäden mit Schadensummen von 50000 Dollar und mehr entfielen. Der Grösstschaden stellt sich in diesem Portefeuille im betreffenden Versicherungsjahr auf 15 Millionen Dollar. Dieses Portefeuille stammt im übrigen aus dem Jahr 1947, gehört also noch zu einer Zeit mit – verglichen mit heutigen Erfahrungen – verhältnismässig bescheidenen Schwankungen.

In der Graphik auf der folgenden Seite ist die Schadensummenverteilung im Bereich der Grossschäden wiedergegeben und eine Ausgleichung dieser Schadensummenverteilung nach der Paretoformel mit $\alpha = 2{,}4$. Es zeigt sich, dass die Paretoformel die Schadensummenverteilung sehr gut ausgleicht, was auch durch den χ^2-Test bestätigt wird.

Beispiel einer Schadensummenverteilung im Bereich der Grossschäden



Im vorliegenden Beispiel beträgt die Bedarfsnettoprämie für die Deckung des grössten Schadens rund 13,3 Millionen Dollar, was 2,3% der gesamten Prämieneinnahmen ausmacht und etwas niedriger wäre als der tatsächlich beobachtete Grösstschaden von rund 15 Millionen Dollar, in der Grössenordnung aber mit ihm übereinstimmt.

Es ist interessant, in diesem Fall die Auswirkung der Bestandesgrösse zu studieren. Würde das Portefeuille insgesamt nur 20% des wirklichen Portefeuilles ausmachen, d.h. anstelle einer Prämieneinnahme von 600 Millionen Dollar eine solche von 120 Millionen Dollar vorliegen, so wäre die Bedarfsnettoprämie für den grössten Schaden nur rund 4,25 Millionen Dollar statt 13,3 Millionen. Das sind dann aber 3,5% der Prämieneinnahmen, anstelle der oben genannten 2,2%. Umgekehrt wäre bei einem zehnmal grösseren Versicherungsbestand die genannte Rückversicherungsprämie nur noch 1,15% der Prämieneinnahme von 6 Milliarden Dollar, was aber rund 69 Millionen Dollar ausmachen würde.

Diese Beispiele zeigen, dass selbst im für die ausgleichende Wirkung der Bestandesgrösse ziemlich ungünstigen Fall einer Feuerversicherung durch den wachsenden Versicherungsbestand eine Verbesserung des Ausgleichs eintritt, die zwar nicht gross, aber doch fühlbar ist.

Von besonderem Interesse ist es, die Auswirkung einer gewöhnlichen Exzedenten-Rückversicherung auf die Belastung durch Grossschäden zu untersuchen.

Würde man z.B. ein Maximum des Selbstbehaltes von 5 Millionen Dollar – wohl ein sehr erheblicher Betrag – einführen, so würde die Bedarfsnettoprämie für den grössten Schaden von 13,3 Millionen Dollar ohne Exzedenten-Rückversicherung auf rund 4,2 Millionen Dollar mit Exzedenten-Rückversicherung zurückfallen. Die gewöhnliche Exzedenten-Rückversicherung reduziert somit die Bedarfsnettoprämie für den grössten Schaden von 2,2% der gesamten Erstversicherer-Bedarfsnettoprämie auf etwa 0,8% der verbleibenden Erstversicherer-Bedarfsnettoprämie, so dass man sagen kann, der Versicherungsträger hätte durch die Exzedenten-Rückversicherung sein Risiko auf etwa ein Drittel reduziert.

Es ist übrigens bezeichnend, dass die Bedarfsnettoprämie für den grössten Schaden, wenn die genannte Exzedenten-Rückversicherung vorgenommen wird, sehr nahe beim Maximum des Selbstbehaltes von

5 Millionen Dollar liegt. Mit Hilfe der Formel (21′) ist gezeigt worden, dass bei wachsendem Versicherungsbestand die Bedarfsnettoprämie schliesslich mit dem Maximum des Selbstbehaltes zusammenfällt.

Würde die betreffende Gesellschaft risikofreudiger werden und ihr Maximum des Selbstbehaltes nach der gewöhnlichen Exzedentenmethode von 5 auf 10 Millionen Dollar erhöhen, d.h. verdoppeln, so würde sich die betreffende Rückversicherungsprämie für den grössten Schaden zwar nicht ganz verdoppeln, aber immerhin um etwa 45% erhöhen und sich dann auf rund 6 Millionen Dollar stellen.

Das Beispiel zeigt, dass man mit Hilfe der Bedarfsnettoprämie für den grössten Schaden als Kriterium eine subtile Abschätzung der eigenen Deckungskapazität und einer verantwortbaren Risikofreudigkeit erreichen kann, selbst wenn man von der Möglichkeit, den grössten Schaden rückzuversichern, keinen Gebrauch machen würde. Die Bedarfsnettoprämie für den grössten Schaden könnte in diesem Sinne als ein Mass für die eigene Deckungskapazität benützt werden.

VIII. Das Grossrisiko-Problem

Zum Schluss sei noch auf eine besonders wichtige Anwendung zurückgekommen, nämlich auf das Grossrisiko-Problem. Auf die Frage der Tarifierung der Grossrisiken soll hier nicht weiter eingegangen werden, sondern vielmehr als Arbeitshypothese angenommen werden, dieses Problem sei in irgendeiner Weise gelöst.

Ferner sei angenommen, dass eine hinreichende Zahl von Gesellschaften grundsätzlich bereit sei, risikofreudiger aufzutreten und damit die Gesamtkapazität des Weltmarktes auf das erforderliche Niveau zu bringen. Solche Entschlüsse bei den betroffenen Gesellschaften setzen aber voraus, dass ein befriedigender technischer Ausgleich in den Grossrisiken gefunden werden kann. Präsident Dr. Meyer vom deutschen Verband hat bereits die Grundvoraussetzung für ein solches Verfahren genannt. Der Ausgleich kann nicht in einem Rechnungsjahr gefunden werden; er kann nur in längeren Zeiträumen bewerkstelligt werden. Ein solcher Ausgleich muss über eine Grossrisikoreserve erfolgen, der jedes Jahr bestimmte Beträge gutgeschrieben und allenfalls auftretende Grossschäden belastet werden. Für ein Funktionieren des Ausgleichs ist es erforderlich, dass

a) die jährliche Zuführung zur Grossrisikoreserve gross genug ist, um die zu erwartende Belastung durch Grossschäden aufzufangen;

b) die jährliche Zuführung mit einem hinreichenden Sicherheitszuschlag ausgestattet ist, um auch einen bei der betreffenden Gesellschaft zufällig auftretenden übernormalen Bedarf zu decken;

c) die Anfangsreserve gross genug ist, dass sie imstande ist, auch einen schon sehr früh auftretenden Grossschaden aufzufangen.

Die erste Forderung ist erfüllt, wenn die normale Zuführung zur Grossrisikoreserve gerade gleich gross ist wie die Bedarfsnettoprämie für den grössten Schaden, gegebenenfalls bei entsprechender Risikostruktur der Bedarfsnettoprämie für die zwei, drei oder allgemeiner die n grössten Schäden. Diese Zuführung reicht grundsätzlich aus, um den grössten oder die zwei grössten oder drei grössten usw. Schäden aus der Grossrisikoreserve zu decken.

Diese Zuführung reicht aber nur grundsätzlich, nicht aber in jedem Fall aus, da der Zufall zu einem höheren Bedarf führen kann. Es ist daher ein besonderer Sicherheitszuschlag hinzuzufügen; dieser kann explizite in einem Prozentsatz der Nettoprämie bestehen oder implizite, indem der Berechnung ein vorsichtiger Alpha-Wert in der Paretoverteilung zugeordnet wird. Die geeignete Bemessung dieses Zuschlages bedarf noch einer näheren theoretischen Abklärung.

Auch die Bemessung des Anfangswertes bedarf noch einer weiteren theoretischen Analyse. Vielleicht genügt aber schon folgende mehr heuristische Konstruktion:

Der grösste Schaden kann höchstens gleich gross sein wie das Maximum des Selbstbehaltes des betreffenden Versicherers. Wenn man deshalb eine Anfangsreserve bereitstellt, welche die Differenz zwischen dem Maximum des Selbstbehaltes und der Grösstschadenprämie ausgleicht, so kann tatsächlich nichts passieren. Beim zweitgrössten Schaden empfiehlt sich ein analoges Vorgehen. Man stellt eine Anfangsreserve in der Höhe der Prämiendifferenz zwischen dem grössten und dem zweitgrössten Schaden. Für den drittgrössten Schaden stellt man wiederum die Prämiendifferenz zwischen dem zweit- und drittgrössten Schaden zurück usw.

Bei diesem Verfahren sollte jederzeit ein Betrag zur Verfügung stehen, um die n grössten Schäden zu decken, wobei die Anzahl der zu erfassenden Grösstschäden durch eine besondere Untersuchung in

jedem Fall vorerst abzuklären wäre. Insgesamt hätte man dann in der Reserve, vermehrt um die Zuführung des betreffenden Jahres, jederzeit die Mittel zur Verfügung, um den Grösstschaden in der Höhe des maximal übernommenen Risikos zu decken; für den zweitgrössten Schaden würde ferner der Betrag zur Verfügung stehen, der normalerweise für den wesentlich höher belastenden Grösstschaden benötigt würde. Ebenso wäre für die folgenden Schäden immer der Betrag für den nächstgrösseren Schaden verfügbar usw. Die jährliche Zuführung betrüge dann, wenn man beispielsweise mit den drei grössten Schäden rechnet,

$$(1 + \lambda)\,[M_1^{(1)} + M_1^{(2)} + M_1^{(3)}],$$

worin λ ein Sicherheitsfaktor ist.

Die Anfangsreserve beträgt

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max} - M_1^{(1)} \\ + M_1^{(1)} - M_1^{(2)} \\ + M_1^{(2)} - M_1^{(3)} \end{array}\right\} = \text{Max} - M_1^{(3)}.$$

Dies gibt zusammen mit der jährlichen Zuführung einen insgesamt verfügbaren Betrag von

$$\text{Max} + M_1^{(1)} + M_1^{(2)} + \lambda\,(M_1^{(1)} + M_1^{(2)} + M_1^{(3)}),$$

d.h. neben dem Sicherheitszuschlag mit dem Faktor λ sind insgesamt verfügbar für die Deckung der drei grössten Schäden, das Maximum plus die Erwartungswerte für den grössten und den zweitgrössten Schaden, oder mit anderen Worten, es ist der Bedarf für den grössten und den zweitgrössten Schaden reserviert und für den drittgrössten Schaden nicht dessen Erwartungswert, sondern das Maximum selbst und dazu noch ein Sicherheitszuschlag.

Die dadurch erreichte Sicherheit ist sehr bedeutend, indem im allgemeinen oft ein grosser Wertunterschied zwischen dem grössten und zweitgrössten, dem zweitgrössten und drittgrössten Schaden besteht. Im geschilderten amerikanischen Beispiel beträgt z.B. der Erwartungswert für den zweitgrössten Schaden nur 28,6% des Erwartungswertes für den grössten Schaden.

Nur noch eine Gefahr bliebe unberücksichtigt, nämlich dass die Reserve mehrere Jahre hintereinander beansprucht und aufgebraucht

würde. Dies liesse sich vermeiden, wenn man von Anfang an den zwei- bis dreifachen Betrag der einfachen Reserve bereitstellen würde.

Das geschilderte Verfahren wäre vor allem in der praktischen Anwendung sehr einfach. Es müsste nur noch erreicht werden, dass die Reserve und die Zuführung steuerfrei blieben, was leider in vielen Ländern kaum ohne weiteres erreicht werden kann. Dieser Aspekt des Problems soll jedoch hier nicht näher behandelt werden. Immerhin ist eine steuerliche Anerkennung der Grossrisikoreserve von den zuständigen Behörden eher zu erwarten, wenn diese sich auf Grund einer wissenschaftlich fundierten Theorie rechtfertigen lässt, als wenn man mit willkürlichen Schätzungen operiert.

Das Grossrisikoproblem lässt sich auch mit Hilfe anderer Modelle lösen. Immer wird es aber zweckmässig sein, von den Grösstschäden auszugehen und anhand ihrer Verteilungen die erforderlichen Sicherheitsmassnahmen festzulegen. Beispielsweise könnte man auch einen Pool bilden, der für alle angeschlossenen Gesellschaften die n grössten Schäden übernimmt, wobei die teilnehmenden Gesellschaften die Erwartungswerte der versicherten Grösstschäden, vermehrt um einen angemessenen Sicherheitszuschlag, aufzubringen hätten.

Literaturverzeichnis

[1] *Ammeter, H.*, Note Concerning the Distribution Function of the Total Loss Excluding the Largest Individual Claim, ASTIN Bulletin, vol. III, Part II, 1964.

[2] – The Rating of «Largest Claim» Reinsurance Covers, Quaterly Letter from the Algemeene Reinsurance Companies, Jubilee Number 2, 1964.

[3] *Beard, R.E.*, Some Statistical Aspects of Non-Life Insurance, Journ. Inst. Act. Students' Society, vol. XIII, Part 3, 1954.

[4] *Berliner, B.*, Correlations between Excess of Loss Reinsurance Covers and Reinsurance of the n Largest Claims, 9. ASTIN-Kolloquium in Randers 1970, spätere Publikation im ASTIN- Bulletin.

[5] *Derron, M.*, A Study in Credibility Betterment through Exclusion of the Largest Claims, ASTIN Bulletin, vol. IV, Part I, 1966.

[6] *Franckx, E.*, Sur la fonction de distribution du sinistre le plus élevé, ASTIN Bulletin, vol. II, Part III, 1963.

[7] *Kupper, J.*, Contributions to the Theory of the Largest Claim Cover, 9. ASTIN-Kolloquium in Randers 1970, spätere Publikation im ASTIN-Bulletin.

[8] *Thépaut, A.*, Le traité d'excédent du coût moyen relatif (ECOMOR), Bull. Trimestriel de l'Inst. des Act. Français, N° 192, 1950.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Überblick über die wichtigsten Ergebnisse der Theorie der Grösstschäden und ihrer Anwendungen gegeben. Insbesondere wird die allgemeine Form der Verteilungsgesetze für die grössten Schäden und auch deren besondere Gestalt im Pareto-Fall geschildert. Die dargelegten Anwendungen umfassen eine Analyse der Grösstschäden anhand numerischer Annahmen, statistische Anwendungen sowie einen Ausblick auf das Grossrisikoproblem.

Summary

This paper gives an overview of the most important results of the theory of the largest claims and its applications. In particular, the general form of the distribution of the largest claims and its special form in the Pareto case are described. The applications discussed comprise an analysis of the largest claims upon certain numerical assumptions, statistical applications and a survey of the problem of large risks.

Résumé

Cette étude donne un aperçu sur les résultats les plus importants de la théorie des plus grands sinistres et de ses applications. En particulier, la forme générale de la loi de distribution des plus grands sinistres ainsi que son aspect spécial dans le cas Pareto y sont décrits. Les applications mentionnées comprennent une analyse des plus grands sinistres sur la base d'hypothèses numériques, des applications statistiques ainsi qu'une perspective du problème des grands risques.

Riassunto

Con questo lavoro viene gettato uno sguardo sui più importanti risultati della teoria dei più grandi sinistri e delle sue applicazioni. In special modo è descritta la forma generale della legge di distribuzione per i più grandi sinistri, nonchè il loro aspetto particolare nel caso Pareto. Le applicazioni esposte comprendono un'analisi dei più grandi sinistri sulla base di supposizioni numeriche, applicazioni statistiche, nonchè una panoramica sul problema dei grandi rischi.