Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 71 (1971)

Artikel: Der Einfluss von Zins auf die Ruinwahrscheinlichkeit

Autor: Gerber, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967161

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Der Einfluss von Zins auf die Ruinwahrscheinlichkeit

Von H. Gerber, Zürich (zur Zeit in Ann Arbor, Michigan)

1. Einleitung

Wir übernehmen zunächst ein wohlbekanntes Modell der kollektiven Risikotheorie. Der Einkommensprozess einer Gesellschaft bestehe aus den kontinuierlichen Prämieneinnahmen (sagen wir c pro Zeiteinheit) einerseits, und den Schadenzahlungen, mathematisch beschrieben durch einen zusammengesetzten Poisson-Prozess, andererseits. Den dazugehörigen Poisson-Parameter bezeichnen wir mit α (= erwartete Anzahl Schäden pro Zeiteinheit), die Verteilungsfunktion der einzelnen Schäden mit $F(x)$. Wir wollen sogleich annehmen, dass $F(x)$ genügend regulär sei, so dass Gleichung (3) eine positive Lösung besitzt. Insbesondere existieren also der Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 der einzelnen Schäden. Natürlich soll der Sicherheitszuschlag

$$\lambda = \frac{c}{\alpha\mu} - 1$$

positiv sein.

Die Gesellschaft startet mit einem Kapital $u = u(0)$; mit $u(t)$ bezeichnen wir ihr Kapital zur Zeit t. Unter $\Psi(u)$ verstehen wir die Ruinwahrscheinlichkeit, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $u(t)$ einmal negativ wird. Für die Überlebenswahrscheinlichkeit $R(u) = 1 - \Psi(u)$ gilt dann die Integro-Differentialgleichung (siehe beispielsweise [3])

$$cR'(u) = \alpha R(u) - \alpha \int_0^u R(u-x)\, dF(x)\,, \qquad u \geqq 0 \tag{1}$$

mit der Anfangsbedingung $R(0) = \lambda/(\lambda+1)$. Da diese Gleichung im allgemeinen nicht explizit lösbar ist, wird oft die Ungleichung (siehe beispielsweise [2])

$$\Psi(u) \leqq e^{-\varkappa u}, \qquad u \geqq 0 \tag{2}$$

zu Rate gezogen. Dabei ist $\varkappa$ die positive Lösung der Gleichung

$$\mu(\lambda+1)\varkappa+1 = \int_0^\infty e^{\varkappa x}\, dF(x)\,. \tag{3}$$

Wenn man hier $e^{\varkappa x}$ durch sein Taylor-Polynom 2. Grades ersetzt, ergibt sich

$$\varkappa \cong \frac{2\lambda}{\mu}\left(1+\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)^{-1}. \tag{4}$$

Soll die Ruinwahrscheinlichkeit höchstens ε betragen, so findet man für das nötige Anfangskapital u_ε aus (2) und (4) die Formel

$$u_\varepsilon \cong \frac{\mu}{2\lambda}\left(1+\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)(-\log\varepsilon)\,. \tag{5}$$

Die Tatsache, dass (2) eine Ungleichung ist, heisst, dass wir uns mit (5) auf der vorsichtigen Seite befinden. Will man noch vorsichtiger sein, so kann man den Poisson-Parameter α fluktuieren lassen (siehe [1]).

Jetzt wollen wir aber die Vorsicht aufgeben. Vielmehr wollen wir – in Anbetracht des frohen Ereignisses – das zugrunde liegende Modell im optimistischen Sinne abändern.

2. Modifiziertes Modell und Neudefinition von Ruin

Wir nehmen jetzt an, dass das Kapital $u(t)$ einen kontinuierlichen Zins abwirft (solange es positiv ist), beziehungsweise eine kontinuierliche Bezahlung von Schuldzinsen erfordert (solange es negativ ist). Der erste Teil dieser Idee ist in diesem Zusammenhang nicht neu (siehe [5]). Von Ruin sprechen wir jetzt aber, falls der Strom der ausgehenden Schuldzinsen je grösser wird als der Strom der einlaufenden Prämien.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Zinsintensität $\delta > 0$ unabhängig von $u(t)$ – also insbesondere auch unabhängig vom Vorzeichen! – sei. Die Gesellschaft nimmt nun also $c+\delta\, u(t)$ pro Zeitein-

heit ein, nämlich die Prämien, vermehrt (beziehungsweise vermindert) um die laufenden Zinsen. Ruin tritt demnach ein, falls $u(t) < -c/\delta$ wird. In Analogie zu (1) erhält man für die neue Überlebenswahrscheinlichkeit die Gleichung

$$(c+\delta u)\, R'(u) = \alpha R(u) - \alpha \int_0^{u+\frac{c}{\delta}} R(u-x)\, dF(x)\,, \qquad u \geqq -\frac{c}{\delta}\,. \tag{6}$$

Offenbar kann man jetzt $R(u)$ als eine stetige Verteilungsfunktion einer Zufallsvariabeln, die über dem Intervall $(-c/\delta, +\infty)$ verteilt ist, auffassen. Satz 1 wird dafür eine sehr ansprechende Interpretation liefern.

Gleichung (6) ist natürlich nur in Ausnahmefällen explizit lösbar. Als Illustration behandeln wir kurz den Fall exponentieller Schadenhöhenverteilung:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}\,. \tag{7}$$

In diesem Fall lässt sich (6) umwandeln in die Differentialgleichung

$$R''(u) + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\alpha-\delta}{c+\delta u}\right) R'(u) = 0\,, \tag{8}$$

welche die Lösung hat

$$R'(u) = k\,(c+\delta u)^{\frac{\alpha}{\delta}-1}\, e^{-\frac{u}{\mu}}\,, \qquad u \geqq -\frac{c}{\delta}\,. \tag{9}$$

$R(u)$ ist in diesem Falle also eine Gamma-Verteilung,

$$k = \frac{\delta}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)(\delta\mu)^{\alpha/\delta}}\,. \tag{10}$$

Falls α/δ klein ist (etwa <50), kann man $R(u)$ in einer Tabelle über die Gamma-Verteilung nachschlagen. Falls (was realistischer ist) α/δ gross

ist, wird man dagegen von der nämlichen Tabelle auf den Gebrauch der Normalverteilung verwiesen werden. Wir werden sehen (Satz 2), dass $R(u)$ dann auch im allgemeinen Fall durch eine Normalverteilung approximiert werden kann.

3. Approximation durch die Normalverteilung

Bezeichnen wir mit $X(t)$ das Total der Schadenzahlungen bis zur Zeit t, mit $a(t) = e^{-\delta t} u(t)$ den Barwert von $u(t)$. Offenbar ist

$$a(t) = u + \frac{c}{\delta}(1 - e^{-\delta t}) - \int_0^t e^{-\delta s}\, dX(s)\,, \tag{11}$$

wobei das Integral in Tat und Wahrheit natürlich eine Summe ist. Der Grenzwert $a(\infty) = \lim a(t)$, $t \to \infty$, existiert mit Wahrscheinlichkeit 1 und ist seinerseits auch eine Zufallsvariable.

Der folgende Satz besagt, dass $R(u)$ die Verteilungsfunktion der Differenz der Barwerte aller Ausgaben und Einnahmen ist.

Satz 1:

$$R(u) = P[a(\infty) > 0] = P\left[\int_0^\infty e^{-\delta t}\, dX(t) - \frac{c}{\delta} < u\right].$$

Beweis:

a) Falls Ruin eintritt, sagen wir zur Zeit T, so ist $u(T) < -c/\delta$ Für alle $t > T$ ist dann $u(t) < u(T)$ und insbesondere $a(t) < 0$, so dass $a(\infty) \leqq 0$.

b) Falls Ruin nicht eintritt, falls also $u(t) \geqq -c/\delta$ für alle t, dann ist $a(t) \geqq -(c/\delta)\, e^{-\delta t}$ für alle t, so dass $a(\infty) \geqq 0$.

Satz 1 folgt nun aus $P[a(\infty) = 0] = 0$.

Von einem praktischen Standpunkt aus nützlich erweist sich der folgende Satz, in dem $\Phi(x)$ die standardisierte Normalverteilung bezeichnet.

Satz 2: Wenn α/δ gross ist, dann gilt

$$R(u) \cong \Phi\left(\frac{u + (c-\alpha\mu)/\delta}{\sqrt{\frac{\alpha}{2\delta}(\mu^2+\sigma^2)}}\right).$$

Beweis: Man benützt dazu Satz 1 und (was im Anhang beschrieben wird) die Tatsache, dass $\int_0^\infty e^{-\delta t}\, dX(t)$ asymptotisch normal verteilt ist für $\alpha/\delta \to \infty$.

Bemerkung: Die Voraussetzung des Satzes ist nicht so einschränkend, wie sie vielleicht scheinen mag: Einerseits sind wir durch die gute Konvergenz im Falle exponentieller Schadenhöhenverteilung ermutigt, andererseits ist die erwartete Anzahl Schadenfälle pro Zeiteinheit der meisten Gesellschaften sicher ein Vielfaches der gängigen Zinsintensität. Eine explizite Fehlerabschätzung ist übrigens möglich anhand der «diskontierten» Version des Satzes von *Berry-Esséen* (siehe [4]).

4. Vergleich der beiden Ruinwahrscheinlichkeiten

Bezeichnen wir mit z_ε die Lösung der Gleichung $\Phi(z_\varepsilon) = 1-\varepsilon$. Falls die Ruinwahrscheinlichkeit höchstens ε betragen soll, ergibt sich für das dazu nötige Anfangskapital u_ε aus Satz 2 die Formel

$$u_\varepsilon \cong z_\varepsilon \sqrt{\frac{\alpha}{2\delta}(\mu^2+\sigma^2)} - \frac{c-\alpha\mu}{\delta}. \tag{12}$$

Wenn wir hier – in Unkenntnis von δ – die rechte Seite durch ihr Maximum (genommen über δ) ersetzen, erhalten wir schliesslich

$$u_\varepsilon \cong \frac{\mu}{\lambda}\left(1+\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)\frac{z_\varepsilon^2}{8}. \tag{13}$$

Dieser Ausdruck sieht der früheren Formel (5) tatsächlich sehr ähnlich. Die unterschiedlichen Koeffizienten seien für ein paar Werte von ε tabelliert:

ε	$\frac{-\log \varepsilon}{2}$	$\frac{z_\varepsilon^2}{8}$
.1	1.15	0.21
.05	1.50	0.33
.01	2.30	0.68
.005	2.65	0.83
.001	3.45	1.19

Bei vorgegebener Ruinwahrscheinlichkeit beträgt das notwendige Anfangskapital im «zinslosen» Modell also ein Vielfaches des nach (13) berechneten. Die optimistischen Annahmen von Abschnitt 2 haben also einen erheblichen Einfluss auf die Ruinwahrscheinlichkeit.

Anhang: Der «diskontierte» Zentrale Grenzwertsatz für den Totalschadensprozess

$X(t)$ ist wie vorher der totale Schaden bis zur Zeit t (zusammengesetzt Poisson), und wir interessieren uns für den Barwert aller Schadenzahlungen

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}\, dX(t) = \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta kh} \{X[(k+1)h] - X[kh]\}. \tag{14}$$

Bezeichnen wir die charakteristische Funktion davon mit $\varrho(z)$, diejenige von $F(x)$ mit $\varphi(z)$. Wenn wir uns daran erinnern, dass die charakteristische Funktion von $X[(k+1)h] - X[kh]$

$$e^{\alpha h[\varphi(z)-1]}$$

beträgt, erhalten wir aus (14)

$$\log \varrho(z) = \log E\left[e^{iz \int_0^\infty e^{-\delta t}\, dX(t)} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \alpha h \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi(ze^{-\delta kh}) - 1] \tag{15}$$

$$= \alpha \int_0^\infty [\varphi(ze^{-\delta t}) - 1]\, dt$$

und nach der Variablentransformation $s = ze^{-\delta t}$ schliesslich

$$\log \varrho(z) = \frac{\alpha}{\delta} \int_0^z \frac{\varphi(s) - 1}{s}\, ds\,. \tag{16}$$

Indem man $\log \varrho(z)$ nach Potenzen von z entwickelt, kann man den folgenden Satz beweisen.

Der «diskontierte» Zentrale Grenzwertsatz

$\int_0^\infty e^{-\delta t}\, dX(t)$ ist asymptotisch normalverteilt für $\alpha/\delta \to \infty$.

Einen etwas anderen Beweis findet man in [4].

Aus (16) ergibt sich nach einer Differentiationsübung, dass der Barwert aller Schadenzahlungen den Erwartungswert $\alpha\mu/\delta$ und die Varianz

$$\frac{\alpha}{2\delta}(\mu^2 + \sigma^2) \tag{17}$$

hat, was beim Beweis von Satz 2 gebraucht wird.

Referenzen

[1] *Ammeter, H.* (1970), Das Solvabilitätsproblem in der Risiko-Lebensversicherung, Mitteilungen Ver. schweiz. Vers.-Math.

[2] *Bühlmann, H.* (1970), Mathematical Methods in Risk Theory, Springer.

[3] *Feller, W.* (1966), An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. 2, Wiley.

[4] *Gerber, H.* (1971), The Discounted Central Limit Theorem and its Berry-Esséen Analogue, The Annals of Mathematical Statistics.

[5] *Segerdahl, C.-O.*, (1959), A survey of results in the collective theory of risk, The Harald Cramér Volume, Stockholm and New York.

Zusammenfassung

Das klassische Modell der kollektiven Risikotheorie wird abgeändert. Eine Gesellschaft kann nun ein negatives Kapital haben, muss dafür aber Schuldzinsen bezahlen. «Ruin» tritt ein, falls die eingehenden Prämien dafür nicht mehr ausreichen. Diese neue Art von Ruin ist eng verwandt mit dem Barwert der Differenz aller Einnahmen und Ausgaben, weshalb man den «diskontierten» Zentralen Grenzwertsatz anwenden kann.

Summary

The classical model of the collective theory of risk is modified. A company may have a negative surplus, in which case it has to pay interest. «Ruin» is now the event that the outgoing interest payments even become bigger than the incoming premiums. A close relationship with the present value of the total income minus outgo is established, such that the Discounted Central Limit Theorem can be applied.

Résumé

Le modèle classique de la théorie collective de risque est modifié. Dans ce modèle, une compagnie peut avoir un capital négatif. Dans ce cas-là, elle doit payer des intérêts. Si ceux-ci sont plus grands que les primes, elle fait faillite. Cette nouvelle définition de ruine est en relation avec la valeur actuelle des recettes diminuées par les dépenses. C'est pourquoi on peut appliquer le théorème Central-Limite «disconté».

Riassunto

Il modello classico della teoria collettiva del rischio è modificato. Una compagnia può avere un capitale negativo, ma deve pagare i rispettivi interessi. La «Ruin» subentra quando i premi non sono sufficienti a coprire gli interessi. Questo nuovo genere di rovina è strettamente in relazione con il valore attuale della differenza di tutte le entrate e di tutte le uscite. Tale è la ragione per cui si può applicare il teorema Central-Limite «scontato».