Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 71 (1971)

Artikel: Methoden zur Berechnung der Verteilungsfunktion des Totalschadens

Autor: Kupper, Josef

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967173

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Methoden zur Berechnung der Verteilungsfunktion des Totalschadens

Von Josef Kupper, Zürich

In der kollektiven Risikotheorie lassen sich in recht grober Vereinfachung zwei grosse Problemkreise unterscheiden. Die eine Gruppe von Untersuchungen befasst sich mit der Bildung und dem Aufbau risikotheoretischer Modelle, während die zweite Gruppe diese Modelle zur Lösung versicherungstechnischer Fragen wie Prämienkalkulation, Selbstbehalte, Reserven, Solvabilität usw. benützt. *Bühlmann* hat in seinem neuen Buch [11][1]) diese Zweiteilung sehr schön herausgearbeitet.

Mittelpunkt der Risikotheorie, d.h. Ziel des ersten und Ausgangspunkt des zweiten Problemkreises, bildet die Verteilungsfunktion des Totalschadens innerhalb einer vorgegebenen Zeitspanne. An der Kenntnis dieser Funktion hat der Versicherer ein besonderes Interesse, das sich nicht nur in rein theoretischen Belangen erschöpft, sondern gerade im Hinblick auf die praktische Anwendung auch der numerischen Behandlung Beachtung schenkt.

Über die Möglichkeiten der numerischen Berechnung der Verteilungsfunktion des Totalschadens sind in den letzten Jahren von verschiedener Seite Beiträge publiziert worden. Insbesondere haben sich skandinavische Autoren auf diesem Gebiet sehr fruchtbar gezeigt; bereits an dieser Stelle sei vor allem auf die wohl schon klassisch zu nennende Arbeit von *Bohman* und *Esscher* [8] hingewiesen. Das Wissen um die möglichen Verfahren zur Berechnung der Totalschadenverteilung gibt natürlich auch die Mittel zur Hand, damit zusammenhängende Mittelwerte wie die Netto-Risikoprämie oder eine Stop-Loss-Prämie auf numerischem Wege zu bestimmen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit liegt nicht darin, neue Erkenntnisse zu vermitteln. Sie will den Leser vielmehr im Sinne einer Syn-

---

[1]) Zahlen in [] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluss der Arbeit.

these mit dem neuesten Stand der Theorie bekannt machen, die verschiedenen Verfahren in eine Systematik einzuordnen und kurz zu charakterisieren versuchen. Bevor damit begonnen werden kann, ist es notwendig, in einem ersten Abschnitt das Wesentliche über das zugrunde liegende theoretische Modell zu sagen.

1. Der grundlegende Aufbau des Modells

Der Risikoprozess in der Nichtlebensversicherung lässt sich durch zwei stochastische Variablen beschreiben, die Schadenanzahl und die Schadensumme. Was für Modelle für diese beiden Basisvariablen gewählt werden können, soll hier nicht eingehend erörtert werden, ausführliche Angaben darüber sind beispielsweise in der Arbeit [21] des Verfassers zu finden. Es sei daher nur kurz an die wichtigsten Formeln erinnert.

A. Die Verteilung der Schadenanzahl

Bezeichne $P_r(t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass bei t zu erwartenden Schadenfällen genau r eintreten, so lässt sich unter der Voraussetzung eines heterogenen Bestandes mit Strukturfunktion $U(q)$ diese bekanntlich durch die Beziehung

$$P_r(t) = \int_0^\infty e^{-qt} \frac{(qt)^r}{r!} \, dU(q) \tag{1}$$

wiedergeben, wobei für die Verteilungsfunktion $U(q)$ notwendigerweise $\mu_U = \int_0^\infty q \, dU(q) = 1$ gelten muss.

Die charakteristische Funktion der Verteilung P sei mit $\varphi_P(z, t)$, die Momente seien allgemein mit $p_j = \sum_r r^j P_r(t)$, speziell Mittelwert und Varianz mit μ_P und σ_P^2 bezeichnet.

Im klassischen Fall eines homogenen Bestandes ist die Strukturfunktion ausgeartet

$$U(q) = \varepsilon(q-1) = \begin{cases} 0 & q<1 \\ 1 & q \geqq 1 \end{cases},$$

und es resultiert für die Verteilung der Schadenanzahl die Poisson Verteilung

$$P_r(t) = e^{-t} \frac{t^r}{!r}, \tag{2}$$

die auch heute noch, insbesondere als Approximation im Sinne einer ersten Näherung, vielfache Verwendung findet.

Will man sich damit nicht begnügen, so bietet die Annahme einer Gammaverteilung mit $\mu_U = 1$

$$U(q) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\alpha q} e^{-z} z^{\alpha-1} dz$$

als Strukturfunktion eine wertvolle Verallgemeinerung. Diese führt für die Schadenzahlverteilung auf eine negative Binomialverteilung

$$P_r(t) = \binom{\alpha + r - 1}{r} \left(\frac{\alpha}{\alpha + t}\right)^{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha + t}\right)^{r}. \tag{3}$$

Die negative Binomialverteilung lässt auch andere Interpretationen zu und gilt als eines der vielseitigsten Hilfsmittel zur Darstellung stochastischer Vorgänge in der Nichtlebensversicherung.

B. Die Verteilung der Schadensummen

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schaden, sofern er eingetreten ist, eine Schadensumme $X \leqq x$ produziert, werde durch die Verteilungsfunktion $S(x)$ wiedergegeben. Es ist üblich, im Falle einer analytischen Darstellung der Funktion $S(x)$ eine stetige – gegebenenfalls stückweise stetige – unilaterale Verteilungsfunktion zu wählen. Eine der einfachsten Möglichkeiten, die man gewissermassen als erste grobe Approximation bezeichnen könnte, wird durch die Exponential-Verteilung

$$S(x) = 1 - e^{-ax}, \quad x > 0 \tag{4}$$

gegeben.

Für charakteristische Funktion und Momente werde mit entsprechenden Indizes und Bezeichnungen, also $\varphi_S(z,t)$, s_j, μ_S, σ_S^2, gearbeitet.

C. Die Verteilung des Totalschadens

Der Totalschaden lässt sich aus den beiden Grundvariablen Schadenzahl und Schadensumme zusammensetzen. Unter gewissen vereinfachenden Annahmen (stochastische Unabhängigkeit der beiden Variablen, Zeitunabhängigkeit der Schadensummenverteilung) folgt für die Wahrscheinlichkeit, dass bei t zu erwartenden Schadenfällen der Totalschaden $\leqq x$ ausfällt, die Beziehung

$$F(x,t) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t)\, S^{*r}(x)\,, \tag{5}$$

wobei $S^{*r}(x)$ die r-fache Faltung der Verteilungsfunktion $S(x)$ mit sich selbst bedeutet. In der üblichen Terminologie gilt zudem

$$S^{*0}(x) = \varepsilon(x) \quad \text{und} \quad S^{*1}(x) = S(x)\,.$$

Die charakteristische Funktion der Totalschadenverteilung lässt sich durch

$$\varphi_F(z,t) = \int_0^{\infty} e^{izx} dF(x,t) = \varphi_P\left[\frac{1}{i}\log\varphi_S(z)\,,\ t\right]$$

oder unter direktem Bezug auf die Strukturfunktion durch

$$\varphi_F(z,t) = \varphi_U\left\{\frac{t}{i}\left[\varphi_S(z)-1\right]\right\} \tag{6}$$

ausdrücken. Die Momente der Verteilung F lassen sich ohne besondere Mühe aus den Momenten der Grundverteilungen herleiten, was für die praktische Anwendung von besonderer Bedeutung ist. So gelten beispielsweise die Formeln

$$\begin{aligned} \mu_F &= \mu_P \mu_S \\ \sigma_F^2 &= \mu_P \sigma_S^2 + \sigma_P^2 \mu_S^2 \\ f_3 &= \mu_P\, s_3 + 3\mu_S \sigma_S^2 (p_2 - \mu_S) + \mu_S^3 (p_3 + \mu_P)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

In den beiden unter Punkt A besonders erwähnten Spezialfällen lassen sich die angegebenen Beziehungen in einfacher Weise wie folgt darstellen:

mit (2):
$$\varphi_F(z,t) = e^{t[\varphi_S(z)-1]}$$
$$\mu_F = ts_1$$
$$\sigma_F^2 = ts_2$$
$$f_3 = ts_3 + 3s_1 s_2 t^2 + s_1^3 t^3 ;$$

mit (3):
$$\varphi(z,t) = \left\{1 - \frac{t}{\alpha}\left[\varphi_S(z) - 1\right]\right\}^{-\alpha}$$
$$\mu_F = ts_1$$
$$\sigma_F^2 = ts_2 + \frac{t^2}{\alpha} s_1^2$$
$$f_3 = ts_3 + 3s_1 s_2 \frac{\alpha+1}{\alpha} t^2 + s_1^3 \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha^2} t^3 .$$

Wird zusätzlich mit der Verteilung (4) gearbeitet, dann können die Momentenformeln auf Grund der Beziehung

$$s_j = \frac{j!}{a^j}$$

noch etwas vereinfacht werden.

2. Versuch einer Systematik der Berechnungsverfahren

Die bereits angetönte Wichtigkeit, die der Funktion (5) im Rahmen der kollektiven Risikotheorie zukommt, hat es mit sich gebracht, dass man sich schon recht früh die Frage nach ihrer numerischen Berechnung gestellt hat. Das Verfahren von *Esscher*, die sog. Esscher-Transformation, ist bereits im Jahre 1932 [14] erstmals beschrieben worden.

Zwei Gründe machen die Berechnung der Totalschadenverteilung kompliziert und mühsam:

- die Faltungspotenz,
- die unendliche Summe.

Es ist daher nicht verwunderlich, dass man, nachdem sich bald einmal herausgestellt hatte, dass eine explizite Berechnung nur in den seltensten Fällen möglich war, auf verschiedenste Arten versucht hat, diese Schwierigkeiten möglichst elegant zu umgehen. Als grosse Hilfe hat sich dabei der Einsatz des Computers erwiesen.

Es dürfte die natürliche Reihenfolge sein, im folgenden zuerst kurz Fälle zu erwähnen, die eine explizite Berechnung erlauben. Darnach soll, dem historischen Ablauf die Referenz erweisend, ein Abschnitt über Grenzwertbetrachtungen folgen, wobei hier zwischen direkten und indirekten Methoden unterschieden werden kann. Als nächstes wird auf die auf den Computer zugeschnittenen Näherungsverfahren aufmerksam gemacht; auch hier ist es möglich, wie im eben erwähnten Themenkreis, zwischen zwei Hauptarten zu unterscheiden. Jedem dieser beiden wichtigen Kapitel ist ein Sonderabschnitt beigefügt, der auf eine Möglichkeit hinweisen will, die nicht spezifisch für das vorliegende Problem ist, sondern bereits in anderen Bereichen ihre Bedeutung erlangt hat. Schliesslich ist noch erwähnenswert, dass auch versucht werden kann, über die Verteilungsfunktion (5) numerisch Aussagen zu machen, ohne dem in Abschnitt 1 ausgestalteten Modell zu folgen. Zusammenfassend ergibt sich folgende Einteilung:

- Explizite Berechnung
- Grenzwertbetrachtungen
  - Direkte Methoden
  - Indirekte Methoden
  - Sonderfall Reliability
- Computerverfahren
  - Direkte Methoden
  - Indirekte Methoden
  - Sonderfall Monte Carlo
- «Modellfreie» Versuche

Beim Umfang der Möglichkeiten, die sich zur Lösung des Problems anbieten, ist es wohl klar, dass es im Rahmen einer solchen Arbeit kaum

möglich ist, mehr als eine erste Orientierung zu geben. Der interessierte Leser sei für das weitere Studium auf die zitierte Literatur verwiesen, wo auch in den meisten Fällen präzisere Angaben über die Genauigkeit der einzelnen Verfahren zu finden sind.

Im Anhang sind für einen Spezialfall einige numerische Vergleichszahlen wiedergegeben.

Zwei Vorbemerkungen seien hier doch noch gemacht:

a) Die Unterteilung in einzelne Verfahren, wie sie zuvor aufgezählt worden sind, darf nicht den Eindruck einer scharfen Trennung erwecken. Es ist sehr wohl möglich, dass unter Umständen zwei Methoden ineinandergreifen.

b) Wie aus verschiedenen Untersuchungen (siehe z.B. in [23]) hervorgeht, ist es oft nützlich, den Definitionsbereich von $F(x,t)$ zu zerlegen und für verschiedene Teilintervalle verschiedene Verfahren zur Anwendung zu bringen.

Aus Gründen der Vereinfachung der Darlegung werden wir uns in den folgenden Ausführungen, abgesehen von einigen Hinweisen, darauf beschränken, den Fall der verallgemeinerten Poisson-Verteilung, d.h. den Fall mit der Verteilung (2) als Schadenzahlverteilung, zu analysieren. Da man mit Hilfe der Ammeter-Transformation jederzeit eine verallgemeinerte negative Binomialverteilung in eine verallgemeinerte Poisson-Verteilung überführen kann, scheint uns diese Einschränkung nicht allzu gravierend.

3. Explizite Berechnung

Die erste Bedingung, um die Berechnung der Verteilungsfunktion $F(x, t)$ explizit durchführbar zu machen, liegt in der Möglichkeit begründet, die Faltung der Verteilung $S(x)$ wirklich vornehmen zu können. Das ist in der Praxis zumeist nicht der Fall. Zwei wichtige Beispiele seien hier jedoch erwähnt:

A. $S(x)$ ist ausgeartet

Darunter verstehen wir, dass alle Schadensummen gleich gross, nämlich gleich s_1 sind. Dann gilt

$$S(x) = \varepsilon(x - s_1)$$

und

$$S^{*r}(x) = \varepsilon(x - rs_1) .$$

Damit erhält man als Endresultat

$$F(x, t) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{x}{s_1}\right]} P_r(t) , \tag{8}$$

wobei $\left[\frac{x}{s_1}\right]$ die grösste ganze Zahl $\leqq \frac{x}{s_1}$ bezeichnet.

Dieser Tatbestand wird kaum je erfüllt sein, am ehesten noch in der Lebensversicherung, wenn wir an einen Bestand mit lauter gleich hohen Todesfallsummen denken. Als Basistypus ist das Ergebnis trotzdem recht wertvoll. Weiter erlaubt es, mit relativ einfachen Mitteln gewisse weitere Einblicke in die Prämienkalkulation zu gewinnen, die sonst nicht so leicht erhältlich wären (siehe z. B. [17]).

B. $S(x)$ gehorcht der Verteilung (4)

Es ist eine bekannte Eigenschaft der Exponentialverteilung, dass durch Faltung eine Gamma-Verteilung entsteht, deren Dichte durch

$$s^{*r}(x) = \frac{a^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-ax}$$

ausgedrückt werden kann. Eingesetzt in (5), ergibt sich für die Dichte der Totalschadenverteilung

$$f(x, t) = \sqrt{\frac{ta}{x}}\, e^{-t-ax}\, I_1(2\sqrt{tax})$$

$$= ta\, e^{-(\sqrt{t}+\sqrt{ax})^2}\, {}_1F_1\left(\tfrac{3}{2};\, 3;\, 4\sqrt{tax}\right) . \tag{9}$$

Mit I_1 ist in üblicher Bezeichnung eine Besselfunktion, mit ${}_1F_1$ eine konfluente hypergeometrische Funktion gemeint.

Für grosse Werte von x lässt sich die folgende asymptotische Entwicklung der Funktion ${}_1F_1$ verwenden:

$$ {}_1F_1(m;\, n;\, x) = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(m)}\, e^x\, x^{m-n}\left[1 + 0\,(|x|^{-1})\right]. $$

Damit lässt sich die Formel (9) approximativ folgendermassen schreiben:

$$ f(x,t) \approx \frac{ta}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-(\sqrt{t}-\sqrt{ax})^2}\,(tax)^{-3/4}\,. \tag{10} $$

Da die Korrekturglieder allesamt negativ sind, erhalten wir auf diese Art eine obere Schranke für die Werte der Verteilungsdichte $f(x,t)$.

Trotz ihrer Einfachheit vermag die Schadensummenverteilung (4) in manchen Fällen zur Darstellung des Sachverhaltes zu genügen. Es wurde denn auch (natürlich ist dies vor allem auch eine Folge der mathematischen Eigenschaften) in der Literatur davon reger Gebrauch gemacht (u.a. [2], [12], [18], [26]).

4. Grenzwertbetrachtungen

4.1. *Direkte Methoden*

A. Normalverteilung

Standardisiert man die Variable x, d.h. bildet man

$$ y = \frac{x-\mu_F}{\sigma_F} = \frac{x - t s_1}{\sqrt{t\, s_2}}\,, $$

so ist eine Folgerung des zentralen Grenzwertsatzes, dass für $t \to \infty$

$$ F(x,t) \to \Phi(y)\,, \tag{11} $$

wobei mit $\Phi(y)$ die standardisierte Normalverteilung

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-z^2/2} dz$$

bezeichnet ist.

Die normale Approximation hat sich für praktische Zwecke, insbesondere wenn t gross ist oder der zu berechnende Wert in der Umgebung des Mittelwertes der Verteilung liegt, als gut verwendbar erwiesen. Eine gewisse Vorsicht ist jedoch stets angebracht, ob nicht ein genaueres Verfahren zu Hilfe gezogen werden muss.

B. Edgeworth-Entwicklung

Die Formel (11) bedeutet eigentlich nur das erste Glied in einer Entwicklung, die nach Edgeworth benannt ist und

$$F(x,t) = \Phi(y) - \frac{1}{3!} \frac{f_3 - 3\mu_F \sigma_F^2 - \mu_F^3}{\sigma_F^3} \Phi'''(y) + \dots$$

$$= \Phi(y) - \frac{1}{3!} \frac{s_3}{s_2^{3/2}} t^{-1/2} \Phi'''(y) + 0(t^{-1}) \tag{12}$$

lautet, mit andern Worten eine Entwicklung, in der die Ableitungen der standardisierten Normalverteilung auftreten. Der Term $\frac{s_3 \, t^{-1/2}}{s_2^{\,3/2}}$ stellt übrigens die Schiefe ${}_F\gamma_1$ der Totalschadenverteilung dar.

Es muss allerdings im Hinblick auf den semikonvergenten Charakter der Reihe (an und für sich divergiert zwar die Reihe, sie konvergiert jedoch, falls t gegen ∞ strebt) nicht unbedingt so sein, dass (12) mit dem ersten Korrekturglied eine bessere Approximation als (11) liefert. Zudem erfordert die Formel (12) die Kenntnis des dritten Momentes der Schadensummenverteilung. Die Schätzung höherer Momente ist vielfach sehr ungewiss und nicht dazu angetan, das Vertrauen in die Richtigkeit der Lösung zu verstärken.

C. NP-Entwicklung

Die NP-Entwicklung (NP steht für «Normal Power» – wir haben diese Abkürzung, die in der englischen Literatur verwendet wird, übernommen) ist ein Verfahren, das unseres Wissens erstmals in der Arbeit von *Kauppi* und *Ojantakanen* [20] erwähnt wurde und dort dem Finnen *Loimaranta* zugeschrieben wird. Es ist im Grunde genommen eine Kombination von A und B. Eine genaue Beschreibung des Vorgehens findet man in [6]. Die Methode beruht darin, dass man den durch die Edgeworth-Entwicklung (12) gefundenen Wert für die standardisierte Variable $\frac{x-\mu_F}{\sigma_F} = y$ nach der durch die Gleichung $F(x,t) = \Phi(y_0)$ gegebenen Variablen y_0 entwickelt. Diese Idee führt zur Beziehung

$$y = y_0 + \frac{1}{3!}\,{}_F\gamma_1\,(y_0^2-1) + 0(t^{-1})\,. \tag{13}$$

Vernachlässigt man die Glieder mit t^{-1}, so errechnet sich demnach y_0 aus y gemäss der Gleichung

$$y_0 = -\frac{3}{{}_F\gamma_1} + \sqrt{\frac{9}{{}_F\gamma_1^2} + \frac{6y}{{}_F\gamma_1} + 1}$$

oder anders ausgedrückt, da y_0 normal verteilt ist, gilt angenähert die Relation

$$F(x,t) \approx \Phi\left(\frac{-3}{{}_F\gamma_1} + \sqrt{\frac{9}{{}_F\gamma_1^2} + \frac{6y}{{}_F\gamma_1} + 1}\right), \tag{14}$$

wobei wie zuvor $\quad y = \dfrac{x-\mu_F}{\sigma_F}\,.$

Lässt man in (13) schon das erste Korrekturglied weg, so gelangt man wieder zur normalen Approximation (11).

Das Verfahren wird noch etwas genauer, wenn man auch die Glieder von der Grössenordnung t^{-1} miteinbezieht. Diese lauten

$$\frac{{}_F\gamma_2}{24}(y_0^3-3y_0)+\frac{{}_F\gamma_1^2}{36}(2y_0^3-5y_0)\,,$$

wobei ${}_F\gamma_2=\dfrac{ts_4}{(ts_2)^2}$ den Exzess der Totalschadenverteilung darstellt. y_0 ist dann aus dieser Gleichung dritten Grades zu bestimmen, und darnach kann der Wert der Funktion $F(x,t)$ aus den Tabellen der Normalverteilung entnommen werden.

Besonders einfach werden die Formeln im Falle der Verteilungsfunktion (4) als Schadensummenverteilung. Zu beachten ist, dass in diesem Fall

$${}_F\gamma_1=\frac{3}{\sqrt{2t}}\,,\qquad {}_F\gamma_2^2=\frac{6}{t}\qquad\text{und}\qquad y=\frac{ax-t}{\sqrt{2t}}\,.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (14) ein, so erhält man

$$F(x,t)\approx\Phi(-\sqrt{2t}+\sqrt{2ax+1})\,. \tag{14'}$$

Auch die Mitberücksichtigung der Ausdrücke der Ordnung t^{-1} gestaltet sich hier mühelos. Auf Grund der Beziehung

$${}_F\gamma_2=\frac{4}{3}\,{}_F\gamma_1^2$$

fallen nämlich die Glieder mit y_0^3 gerade weg, so dass sich anstelle von (14′) die auch sehr einfach zu berechnende Beziehung

$$F(x,t)\approx\Phi\left(-\sqrt{2t}\left(1-\frac{1}{8t}\right)+\sqrt{2ax+\frac{1}{2}+\frac{1}{32t}}\right) \tag{14''}$$

ergibt.

Es ist interessant, dass der «Trick» mit der NP-Entwicklung erstaunlich gute Resultate zu liefern scheint. Nach den vorgenommenen Untersuchungen (es sei dazu auch auf [24] verwiesen) ist die Genauigkeit viel grösser als bei den Methoden A und B, sie liegt ungefähr im Rahmen der im folgenden besprochenen Esscher-Transformation, ohne anderseits so rechenaufwendig wie diese zu sein.

4.2. *Indirekte Methoden*

A. Esscher-Transformation

Um die Konvergenz der Methode 4.1 B zu verbessern, ist man schon frühzeitig auf den Gedanken gekommen, die Verteilungsfunktion $F(x, t)$ nicht direkt zu entwickeln, sondern vorerst eine gewisse Transformation vorzunehmen. In der schon zitierten Arbeit von Esscher [14] ist der Poisson-Fall, mit dem wir uns hier vor allem auseinandersetzen, bereits enthalten. *Ammeter* hat in [1] erstmals die Erweiterung auf die negative Binomialverteilung als Schadenzahlverteilung vorgenommen, und 1963 hat der Schöpfer der Methode den Anwendungsbereich noch viel weiter gefasst [15].

Die Transformationsgleichung von Esscher führt allgemein mittels

$$d\overline{F}(x, t) = \frac{e^{cx}}{\bar{f}_0} dF(x, t) \tag{15}$$

die Verteilungsfunktion F in die Verteilungsfunktion $\overline{F}$ über. $\bar{f}_0$ ist dabei als $\int_0^\infty e^{cx} dF(x, t)$ definiert, über den Transformationsparameter c wird später entschieden. Setzt man $C(x, c) = \bar{f}_0 e^{-cx}$, so folgt

$$1 - F(x, t) = C(x, c) \int_x^\infty e^{-c(z-x)} d\overline{F}(z, t) . \tag{16}$$

Die Verteilungsfunktion F soll im Punkt x berechnet werden. Es scheint nun intuitiv vernünftig zu sein, den noch freien Parameter c so zu wählen, dass der Mittelwert der transformierten Verteilung $\overline{F}$ in den Punkt x fällt. Da die Funktion $\overline{F}$ nachher mit Hilfe direkter Methode weiter ausgewertet werden soll, bietet das für die Genauigkeit der

Approximation grosse Vorteile, denn die Edgeworth-Entwicklung liefert in der Umgebung des Erwartungswertes besonders gute Resultate. Die genannte Wahl von c kann aber auch theoretisch so begründet werden, dass sie die Forderung

$$\frac{\partial C(x, c)}{\partial c} = 0$$

als Lösung erfüllt.

Definiert man die Momente einer entsprechend transformierten Schadensummenverteilung

$$d\overline{S}(x) = \frac{e^{cx}}{\bar{s}_0} dS(x)$$

mit

$$\bar{s}_j = \int_0^\infty x^j e^{cx} dS(x) ,$$

so führt die Bedingung $x = \mu_{\overline{F}}$ im Poisson-Fall auf die Beziehung

$$x = t\bar{s}_1 = t \int_0^\infty u e^{cu} dS(u) . \tag{17}$$

Die Bestimmungsgleichung (17) für c ist im allgemeinen nicht explizit nach der Unbekannten auflösbar, man muss dann zu inverser Interpolation seine Zuflucht nehmen. Bei gammaverteilten Schadensummen kann die Lösung jedoch direkt angeschrieben werden, speziell gilt für (4):

$$x = \frac{ta}{(c-a)^2} , \tag{18}$$

wobei $c < a$ gewählt werden muss, weil sonst die Momente $\bar{s}_j$ nicht existieren.

Für $c = 0$ ist $d\overline{F} = dF$ und anderseits $x = ts_1 = \mu_F$, d.h. in diesem Spezialfall ist eine Transformation überflüssig (ausgearteter Esscher). Für $c \gtrless 0$ ist hingegen stets $x \gtrless ts_1$.

Das weitere Vorgehen entspricht jenem in 4.1. B. Man standardisiert in (16) die Variable z mittels

$$\xi = \frac{z - \mu_{\overline{F}}}{\sigma_{\overline{F}}},$$

wobei man bereits weiss, dass $\mu_{\overline{F}} = x$ ist ($\sigma_{\overline{F}} = \sqrt{t\bar{s}_2}$), und entwickelt die standardisierte Verteilung $\overline{F}$ in eine Edgeworth-Reihe.

Im Falle von $c \geqq 0$ bzw. $x \geqq ts_1$ ergibt sich dann die Beziehung

$$1 - F(x, t) = e^{-cx + t(\bar{s}_0 - 1)} \int_0^\infty e^{-c\sqrt{t\bar{s}_2}\,\xi}\, d\left[\Phi(\xi) - \frac{1}{3!}\,\frac{\bar{s}_3}{\bar{s}_2^{3/2}}\, t^{-1/2}\, \Phi'''(\xi) + \ldots\right]. \tag{19}$$

Für $c < 0$ bzw. $x < ts_1$ lässt sich eine analoge Formel für $F(x, t)$ herleiten, worin sich die Integration von $-\infty$ bis 0 erstreckt. Der grosse Vorteil der Esscher-Transformation liegt in der Konvergenzbeschleunigung durch die Faktoren $e^{-c\sigma_{\overline{F}}\xi}$.

Die Berechnung von (19) erfolgt mit Hilfe der sog. Esscher-Funktionen, die durch

$$E_{rs}(u) = \int_0^\infty e^{-vu}\, v^r\, \Phi^{(s+1)}(v)\, dv$$

definiert sind und aus Tabellen (siehe z.B. [2]) entnommen werden können. Als Endresultat erfolgt schliesslich

$$1 - F(x, t) = e^{-cx + t(\bar{s}_0 - 1)}\left[E_{00}(\sqrt{t\bar{s}_2}) - \frac{1}{3!}\,\frac{\bar{s}_3}{\bar{s}_2^{3/2}}\, t^{-1/2}\, E_{03}(\sqrt{t\bar{s}_2}) + \ldots\right] \tag{20}$$

$$\text{für} \quad x \geqq ts_1 .$$

Mit der Verteilungsfunktion (4) lässt sich, da hier für die Momente $\bar{s}_j$ die einfache Formel

$$\bar{s}_j = \frac{a\,j!}{(a-c)^{j+1}}, \qquad c < a \tag{21}$$

gilt, die Darstellung noch etwas vereinfachen. Es ist dann

$$\left(\text{mit der Abkürzung } \sqrt{\frac{2\,at}{a-c}} = T\right)$$

$$1-F(x,t) = e^{-t\left(\frac{c}{a-c}\right)^2}\left[E_{00}\left(\frac{T}{a-c}\right)-\frac{1}{2T}\,E_{03}\left(\frac{T}{a-c}\right)+\dots\right],$$

wobei c und x durch die Formel (18) verknüpft sind.

Die Esscher-Transformation ist zwar in der Handhabung nicht ganz so einfach, der Aufwand in der Regel aber doch noch mit relativ geringen Hilfsmitteln bewältigbar, und die Resultate, falls der zu berechnende Wert x wesentlich vom Mittelwert ts_1 abweicht, viel besser als bei den Methoden (11) und (12).

B. Pesonen-Modifikation

Aus der Konstruktion der Esscher-Transformation geht hervor, dass in der Umgebung des zu berechnenden Wertes x die Approximation besonders gut ist. Ist man nun jedoch nicht nur an einem speziellen Wert interessiert, sondern soll die ganze Verteilungsfunktion $F(x,t)$ berechnet werden, so sind in der Regel eine Reihe von Netzpunkten notwendig, für die die Berechnung jeweils separat mit einem neuen Transformationsparameter durchzuführen ist. Um dieser Komplikation aus dem Wege zu gehen, hat *Pesonen* [23] vorgeschlagen, nicht einen konstanten Parameter c zu benützen. Dieser soll vielmehr über das ganze Integrationsintervall stetig variieren, und zwar derart, dass in jedem Punkt des Intervalls stets die Bedingung $z = \mu_{\bar{F}} = t\bar{s}_1$ erfüllt ist.

Betrachtet man allgemein das Intervall (x_1, x_2), so lässt sich die Beziehung

$$F(x_2,t)-F(x_1,t) = e^{-t}\int_{x_1}^{x_2} e^{t\bar{s}_0-cz}\,d\left[\Phi\left(\frac{z-t\bar{s}_1}{\sqrt{t\bar{s}_2}}\right)-\frac{1}{3\,!}\,\frac{\bar{s}_3}{\bar{s}_2^{3/2}}\,t^{-1/2}\,\Phi'''\left(\frac{z-t\bar{s}_1}{\sqrt{t\bar{s}_2}}\right)+\dots\right],$$

eine Vorstufe von Formel (19), durch die Substitution

$$z = t\bar{s}_1(c) \quad \text{mit} \quad dz = t\bar{s}_2(c)\,dc$$

unter Berücksichtigung von $\Phi'(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ und $\Phi^{(IV)}(0) = 0$

überführen in

$$F(x_2, t) - F(x_1, t) = \frac{e^{-t}\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{c_1}^{c_2} e^{t\bar{s}_0(c) - ct\bar{s}_1(c)} \sqrt{\bar{s}_2(c)}\, dc\,, \tag{22}$$

wobei $x_1 = t\bar{s}_1(c_1)$ und $x_2 = t\bar{s}_1(c_2)$ gegeben sind.

Benützt man speziell die Momente (21), d.h. eine Exponentialverteilung als Schadensummenverteilung, so lässt sich die Formel (22) in die Formel (10) überführen.

4.3. *Sonderfall Reliability*

Es ist das Verdienst von *Straub* [27], darauf hingewiesen zu haben, wie gewisse Resultate aus der «Reliability Theory» dazu verwendet werden können, die Verteilungsfunktion des Totalschadens zwar nicht genau zu berechnen, aber immerhin Schranken für ihre Werte anzugeben.

In der «Reliability Theory» hat der Begriff der Verlustrate

$$r(x) = \frac{F'(x)}{1 - F(x)}$$

einer Verteilungsfunktion F eine zentrale Bedeutung. Die Verteilungsfunktionen werden denn auch nach IFR (increasing failure rate) und DFR (decreasing failure rate) eingeteilt. *Barlow* und *Marshall* [3] haben nun für IFR-Verteilungen Abschätzungen angegeben, die, wenn man zudem beachtet, dass jede Faltung von zwei IFR-Verteilungen wieder IFR ist, auch für die gefaltete Schadensummenverteilung $S^{*r}(x)$, vorausgesetzt die Grundverteilung $S(x)$ sei wirklich IFR, Anwendung finden können.

Es gilt dann das Resultat

$$1 - F(x, t) \leqq \sum_{r=0}^{\infty} e^{-t} \frac{t^r}{r!}\, U\left(\frac{x}{rs_1}, \frac{s_2}{rs_1^2} + 1 - \frac{1}{r}\right), \tag{23}$$

wobei die erwähnte obere (tabellierte) Schranke für die Funktion $1-S(x)$, welche IFR und für welche $s_1=1$, mit $U(x, s_2)$ bezeichnet wurde.

Falls über $S(x)$ noch etwas mehr bekannt ist als die FR-Klasse, kann auch die folgende Ungleichung über die Faltungspotenz der Schadensummenverteilung wertvoll sein (für IFR-Verteilungen, sonst gilt das «$\geqq$»-Zeichen):

$$\overline{P}_r\left[rR\left(\frac{x}{r}\right)\right] \leqq S^{*r}(x) \leqq \overline{P}_r[R(x)] \tag{24}$$

wobei
$$R(x) = \int_0^x r(u)\,du$$

und
$$\overline{P}_r(t) = 1-e^{-t}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{t^j}{j!}$$

Die Verteilung (4) ist bekanntlich dadurch ausgezeichnet, dass sie sowohl IFR wie DFR ist, d.h. es gilt $r(x)\equiv a$. Die beiden Grenzen in (24) fallen dann zusammen, und es ist exakt

$$S^{*r}(x) = \overline{P}_r(ax) = 1-e^{-ax}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{(ax)^j}{j!}\,,$$

was den früheren Ausführungen in 3 B entspricht.

Mit den in (24) gegebenen Schranken können nun wiederum Näherungswerte für die Verteilungsfunktion $F(x, t)$ berechnet werden. In [27] findet sich ein numerisches Beispiel, wo von der Annahme ausgegangen wird, die Verteilungsfunktion $S(x)$ folge einer Pareto-Verteilung.

5. Computerverfahren

Die Fortschritte in der Computertechnik haben es mit sich gebracht, dass vermehrt versucht wurde, Methoden zu entwickeln, die dem Computer angepasst sind. Um den enormen maschinellen Aufwand auf ein erträgliches Mass zu reduzieren, geht es allerdings auch hier nicht ohne gewisse Vereinfachungen ab.

5.1. *Direkte Methoden*

A. Treppenfunktionen – Idee von Benktander

In der bereits erwähnten Arbeit [8] ist vorgeschlagen worden, die Schadensummenverteilung $S(x)$ durch eine Treppenfunktion zu ersetzen, die in N Punkten $x_1, x_3, \ldots, x_{2N-1}$ Sprungstellen aufweisen soll. Die Höhe des Zuwachses im Punkte x_{2j-1} sei durch die Zunahme der Verteilungsfunktion $S(x)$ zwischen zwei Zwischenpunkten, d.h. durch $S(x_{2j}) - S(x_{2j-2})$, gegeben. Als Randbedingungen wurden $x_0 = 0$ und $x_{2N} = M$ (= grösster in Betracht kommender x-Wert) gesetzt. Für die Wahl der Stellen x_i, $i = 1, 2, \ldots$, die «möglichst gut» gewählt werden sollten, hat Benktander den Vorschlag gemacht, als Kriterium die Erfüllung der Bedingung

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} |x - x_{2j-1}| \, dS(x) = \min$$

zu verlangen.

Die Idee ist an und für sich bestechend. Durch die Zerlegung der Schadensummenverteilung in eine Treppenfunktion, also in eine diskrete Verteilung, wird die Faltung sehr einfach und computerkonform. Dadurch wird auch die Berechnung von $F(x, t)$ erleichtert. Leider erwiesen sich numerische Versuche mit der Verteilungsfunktion (4) als nicht ganz befriedigend.

In ähnlicher Richtung geht ein Programm, das vor kurzem unter der Leitung von Prof. Amsler in Lausanne entwickelt worden ist. Die Schadensummenverteilung ist auch hier eine Treppenfunktion, nur wird angenommen, diese sei in 32 äquidistanten Stützwerten empirisch gegeben.

B. Treppenfunktionen – Idee von Pesonen

Das unter A geschilderte Verfahren kann man sich so verwirklicht denken, dass das Intervall $(0, \infty)$ vertikal in Abschnitte gegliedert wird, innerhalb deren die Schadensummenverteilung als konstant angenommen wird. Durch den Übergang auf eine solche Treppenfunktion wird das Faltungsprozedere zwar, wie schon erwähnt, wesentlich vereinfacht, im Grunde genommen sind aber weiterhin unendlich viele Faltungen durchzuführen.

Pesonen hat nun in [23] darauf hingewiesen, dass man sich die Zerlegung statt vertikal auch horizontal vorgenommen denken kann. Das läuft darauf hinaus, die Funktion S in eine endliche Zahl ausgearteter Verteilungsfunktionen $S_j(x)$ zu zerlegen, wobei

$$S(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j S_j(x) \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^{N} a_j = 1 \tag{25}$$

gilt. Nach den Angaben, welche in Abschnitt 3 A gemacht worden sind, ist es einfach, die einzelnen Komponenten $F_j(x)$, welche auf Grund der entsprechenden $S_j(x)$ gebildet werden können, zu berechnen. Die Gesamtschadenverteilung entsteht dann, wie auf Grund der folgenden Ausführungen hervorgeht, mittels einiger weniger Faltungen von diskreten Verteilungsfunktionen.

Sei die Sprungstelle der Verteilungsfunktion $S_j(x)$ mit x_j bezeichnet, so erhält man für die charakteristische Funktion der Schadensummenverteilung unter der Voraussetzung (25) den Wert

$$\varphi_S(z) = \sum_{j=1}^{N} a_j e^{izx_j}.$$

Beim Poisson-Modell – und dies ist gerade eine der wichtigen Eigenschaften dieses Modells – folgt nun

$$\varphi_F(z,t) = e^{t[\varphi_S(z)-1]} = e^{t\left[\sum_{j=1}^{N} a_j e^{izx_j}-1\right]}$$

oder

$$\varphi_F(z,t) = \prod_{j=1}^{N} e^{ta_j(e^{izx_j}-1)} \tag{26}$$

$$= \prod_{j=1}^{N} \varphi_{F_j}(z, ta_j).$$

Das heisst mit anderen Worten, dass sich die Verteilungsfunktion F darstellen lässt als

$$F(x,t) = \prod_j{}^{*} F_j(x, ta_j), \tag{27}$$

wobei die F_j analog zu (8) aufgebaut sind, nämlich

$$F_j(x, ta_j) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{x}{x_j}\right]} e^{-ta_j} \frac{(ta_j)^r}{r!} .$$

Von wesentlicher Bedeutung für die Anwendung ist es natürlich, ob man mit möglichst wenig Stufen auskommen kann, so dass das Faltungsprodukt (27) nicht allzu viele Glieder enthält.

Ergänzend mag noch erwähnt werden, dass man natürlich die Approximation durch eine Treppenfunktion stets so einrichten kann, dass man eine Majorante bzw. eine Minorante für die Verteilungsfunktion F erhält. Das kann zum Zwecke der Abschätzung der Genauigkeit von Vorteil sein.

C. Exponentialformen

Schon in 3 B wurde auf die Tatsache aufmerksam gemacht, dass die Darstellung der Schadensummenverteilung durch eine Exponentialverteilung grosse Rechenvorteile bietet. Leider ist die Anpassung durch eine so einfache Kurve im allgemeinen kaum befriedigend. Es hat sich aber herausgestellt, dass man mit einer Linearform von Exponentialausdrücken in vielen Fällen recht gute Resultate erzielt, vielleicht mit Ausnahme von hohen x-Werten, wo noch eine spezielle Korrektur vorzunehmen ist. Ein Ansatz für $S(x)$ in dieser Richtung wäre

$$S(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j (1 - e^{-\alpha_j x}) + \sum_{j=m+1}^{n} a_j \, \varepsilon(x - \alpha_j) \tag{28}$$

mit

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$$

Der springende Punkt der Betrachtung liegt auch hier in der Eigenschaft des Poisson-Modells, welche durch die Beziehungen (26) bzw. (27) verdeutlicht wird.

Bezeichnet man die charakteristischen Funktionen der einzelnen in (28) aufgeführten Verteilungen mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_n$, so folgt analog

$$\varphi_S(z) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \varphi_j(z)$$

$$\varphi_F(z, t) = \prod_{j=1}^{n} e^{ta_j[\varphi_j(z)-1]}$$

und

$$F(x, t) = \prod_j{}^* F_j(x, ta_j) \,. \tag{29}$$

Gilt beispielsweise $m = 2$ und $n = 3$, so muss praktisch, da die Faltung mit F_3 sehr einfach ist, nur mehr eine einzige wesentliche Faltung $F_1 * F_2$ durchgeführt werden. Man kann dazu ein Programm für numerische Integration verwenden.

Wichtig ist in diesem Zusammenhang die Tatsache, dass die Verteilungen F_j $(j = 1, \ldots, m)$ computerkonform mit Hilfe einfacher Rekursionsformeln ermittelt werden können. Es lässt sich zeigen [8] dass, ausgehend von den Randbedingungen

$$D_0 = 0, \quad K_0 = e^{-(ta_j + \alpha_j x)} \,,$$

mit Hilfe der Relationen

$$K_r = \frac{ta_j \, \alpha_j \, x}{r^2} K_{r-1}, \qquad D_{r+1} = \frac{ta_j}{r+1} (D_r + K_r)$$

die Verteilungsfunktion F_j als

$$F_j(x, ta_j) = 1 - \sum_{r=0}^{\infty} D_r \tag{30}$$

hergeleitet werden kann.

Man beachte, dass bei negativen Binomialverteilungen als Schadenzahlverteilungen die eben beschriebenen Methoden versagen.

5.2. *Indirekte Methoden*

Es ist schon aus den Erwägungen, die im letzten Abschnitt angestellt wurden, hervorgegangen, dass gewisse Probleme viel durchsichtiger werden, wenn man sie nicht im Originalraum, sondern im Bildraum der charakteristischen Funktionen betrachtet. Es ist daher nicht verwunderlich, dass verschiedene Autoren sich dieses Verhalten zunutze zu machen suchten. Im Grunde genommen handelt es sich nur um eine Verlagerung der Schwierigkeiten, denn schliesslich muss man, will man die Verteilung $F(x, t)$ berechnen, eine Rücktransformation mit Hilfe der Inversionsformel vornehmen, und diese erweist sich (uneigentliches Integral!) in der Regel auch nicht als ein Kinderspiel.

A. Idee von Filon

Es liegt nahe, den Versuch zu machen, die charakteristische Funktion von $F(x, t)$ im Bildraum so zu approximieren, dass die Rücktransformation explizit und exakt möglich ist. Das einfachste wäre, hiezu eine Schar von Geraden zu verwenden, Filon hat in seiner Arbeit [16] mit Parabeln zweiten Grades gearbeitet. Das Verfahren hat insofern seine Bedenken, als es sehr schwierig ist, etwas über die Genauigkeit der Abschätzung auszusagen.

B. Methode von Bohman

Eine der Schwächen, die dem Umweg über die charakteristische Funktion anhaften, liegt wie gesagt darin, dass die Umkehrformel ein Integral ist, dessen Integrationsbereich sich von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt. Um eine numerische Integration durchführen zu können, hat Bohman [7] folgende aussergewöhnlich interessante Idee entwickelt:

Die charakteristische Funktion der Totalschadenverteilung soll mit einer gewissen Funktion multipliziert werden, welche ausserhalb eines endlichen Intervalls identisch verschwindet. Dadurch wird erreicht, dass der unendliche Integrationsbereich durch einen endlichen ersetzt werden kann. Um die Genauigkeit der Methode unter Kontrolle zu halten, wird die Funktion einmal so gewählt, dass die zum Produkt gehörige «Verteilungsfunktion» für alle x durchwegs grösser, dann für alle x durchwegs kleiner ausfällt als die wahre Verteilungsfunktion $F(x, t)$.

Bohman hat in seiner Arbeit gezeigt, dass eine Verteilung mit der Dichte

$$c(x) = 2\pi \frac{1+\cos x}{(x^2-\pi^2)^2} \tag{31}$$

sich für den beabsichtigten Zweck als besonders günstig erweist. Diese Verteilung hat die charakteristische Funktion

$$\varphi_C(z) = \begin{cases} (1-|z|)\cos\pi z + \dfrac{1}{\pi}\sin|\pi z|\,, & |z| \leqq 1\,, \\ 0 & |z| > 1 \end{cases} \tag{32}$$

welche ausserhalb des Intervalls $|z| \leqq 1$ identisch verschwindet. Es ist nun so, dass sich die Funktion (32) unter den charakteristischen Funktionen, welche in $|z|>1$ verschwinden, dadurch auszeichnet, dass die zugehörige Verteilung die kleinstmögliche Varianz aufweist. Mit $\varphi_C'(z)/_{z=0} = 0$ und $\varphi_C''(z)/_{z=0} = -\pi^2$ hat diese minimale Varianz den Wert $\sigma_C^2 = \pi^2$. Die getroffene Wahl kann daher in dem Sinne als optimal angesprochen werden, als sie die Abweichungen von der gesuchten Verteilungsfunktion möglichst klein zu halten erlaubt.

Thorin hat erst kürzlich bewiesen [28], dass einzig die zu (31) gehörige Verteilungsfunktion die von *Bohman* geforderte Minimaleigenschaft erfüllt.

Mit Hilfe der charakteristischen Funktion (32) definiert *Bohman* die beiden Funktionen

$$\psi_1(z) = \varphi_C(z) - 0{,}42\,i\,\varphi_C'(z)$$

$$\psi_2(z) = \varphi_C(z) + 0{,}42\,i\,\varphi_C'(z)\,,$$

die derart beschaffen sind, dass für die Rücktransformation des Produktes

$$\varphi_F(z)\,\psi_j\left(\frac{z}{\theta}\right), \qquad j = 1, 2$$

$$F_j(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{+\theta} \varphi_F(z,t)\;\psi_j\left(\frac{z}{\theta}\right)\frac{e^{-ixz}}{iz}\,dz\,, \qquad j = 1, 2 \tag{33}$$

die Näherungsbeziehungen

$$F_1(x,t) \leqq F(x,t) \leqq F_2(x,t) \tag{34}$$

für alle Werte von x gelten. Zur Berechnung der Integrale (33) dienen wiederum numerische Integrationsmethoden (Simpson!). Je grösser θ gewählt wird, desto kleiner wird die Differenz zwischen F_1 und F_2.

Die Ergebnisse, welche mit der Methode von Bohman erzielt worden sind, dürfen als sehr befriedigend bezeichnet werden.

C. Modifikation von Seal

In seiner Arbeit [25], die dem ASTIN-Kolloquium in Randers 1970 eingereicht worden war, behandelt der Verfasser ebenfalls das Problem, das unendliche Integrationsintervall der Inversionsformel

$$F(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-izx}}{iz} \varphi_F(z,t)\, dz \tag{35}$$

durch ein endliches Intervall zu ersetzen. Mit der Zerlegung

$$\varphi_F(z,t) = A(z)\, e^{iB(z)},$$

wobei $A(z)$ und $B(z)$ reellwertige Funktionen sind [im Poisson-Modell gilt $A(z) = e^{t[a(z)-1]}$, $B(z) = tb(z)$ und $\varphi_S(z) = a(z) + ib(z)$], geht Formel (35) über in

$$F(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(z)\ \sin[zx - B(z)]\ \frac{dz}{z}\,. \tag{36}$$

Der Autor versucht nun eine obere Grenze $T < \infty$ des Integrationsintervalls derart zu bestimmen, dass $|\int_T^{\infty}|$ gegenüber dem Restintegral $\int_0^T$ vernachlässigbar klein wird.

Im Falle der Verteilungsfunktion (4) haben die in (36) eingehenden Funktionen $A(z)$ und $B(z)$ die Gestalt

$$A(z) = e^{-\frac{tz^2}{a^2+z^2}}$$

$$B(z) = \frac{taz}{a^2+z^2}\,.$$

$A(z)$ ist monoton fallend und strebt für $z \to \infty$ gegen e^{-t}; $B(z)$ steigt vorerst von Null bis zu einem Maximum (hier bei $z = a$) an und strebt danach für $z \to \infty$ gegen 0. Dieses Verhalten der Funktionen A und B gilt nicht nur in diesem Spezialfall.

Seal wählt nun den Wert von T so, dass $B'(z)$ im verbleibenden Intervall (T, ∞) dauernd negativ bleibt. Die Anwendung gewisser Mittelwertsätze der Integralrechnung erlaubt es ihm dann zu zeigen, dass eine Abschätzung von der Form

$$\frac{1}{\pi} \int_T^\infty A(z) \sin\left[zx - B(z)\right] \frac{dz}{z} < \frac{2\,A(T)}{\pi} \left| \frac{\pi}{2} - Si(\xi_0) \right| \tag{37}$$

gilt, wobei $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u}\, du$ den Integralsinus darstellt und ξ_0 als Vielfaches von π geeignet zu wählen ist, was allerdings praktische Schwierigkeiten bietet.

Im Poisson-Fall bei grossem t wird $A(z)$ sehr klein, lange bevor $B(z)$ den maximalen Wert überschreitet. Man kann dann eine Grenze T' wählen, so dass bereits das Integral $\left| \int_{T'}^{T} \right|$ vernachlässigbar klein wird.

Die Berechnung von $F(x, t)$ erfolgt anschliessend mit Hilfe der Formel (36) mit oberer Integralgrenze T bzw. T' auf numerischem Wege (Trapezoidregel/Verfahren von Romberg).

Die Methode, welche Seal vorschlägt, ist in der Handhabung doch etwas einfacher als jene von Bohman. Sie scheint bezüglich der Genauigkeit ebenso gute Resultate zu liefern, doch sind für eine exakte Abschätzung weitere Untersuchungen notwendig.

5.3. *Sonderfall Monte Carlo*

Die Simulationsmethoden, welche unter dem Namen Monte-Carlo-Methoden bekannt wurden, haben mit den Fortschritten der Computertechnik in verschiedenen Wissenszweigen Einzug gehalten. In unserem Fall geht es darum, mit Hilfe von Zufallszahlen eine genügend grosse Stichprobe für eine stochastische Variable mit der Verteilungsfunktion $F(x, t)$ zu simulieren. Aus dieser Stichprobe lässt sich dann die gesuchte Funktion schätzen.

Das Verfahren ist in der Arbeit von *Personen* [23] für das ASTIN-Kolloquium in Luzern beschrieben worden. Weitere Einzelheiten, insbesondere auch bezüglich der praktischen Anwendung, hat *Hovinen* [19] beim selben Anlass mitgeteilt. Als erstes werden für die Verteilungsfunktion der Poisson-Verteilung (2)

$$\sum_{r=0}^{N} P_r(t) = e^{-t} \sum_{r=0}^{N} \frac{t^r}{r!} \tag{38}$$

Zufallszahlen erzeugt, welche zu einer Folge stochastischer Zahlenwerte N_j führen.

Zur Vereinfachung des folgenden Schrittes ist es üblich, vorerst die Faltungspotenzen der Verteilungsfunktion $S(x)$ für Zweierpotenzen 2^k, $k = 0, 1, 2 \ldots$ zu bilden. Die N_j werden nun in Binärschreibweise

$$N_j = \sum_k a_k 2^k \qquad (a_k = 0 \text{ oder } 1)$$

geschrieben, und Zufallszahlen für die S^{*2^k}, $k = 0, 1, 2, \ldots, \sum a_k$, gebildet.

Da $S^{*N_j} = \prod_{a_k=1}^{*} S^{*2^k}$ gilt, ergeben die Summen der auf diese Weise gefundenen Lösungen x_{jk}

$$x_j = \sum_{a^2_l=1} x_{jk} \tag{39}$$

Stichprobenwerte der gesuchten Totalschadenverteilung $F(x, t)$. Damit eine relativ genaue Schätzung erfolgen kann, muss das Prozedere sehr oft durchgespielt werden, d.h. j läuft in der Regel von 1 bis 10^4 oder 10^5.

6. «Modellfreie» Versuche

Die Schwierigkeiten, die sich in der Berechnung der Verteilungsfunktion (5) stellen, lassen sich am einfachsten überwinden, indem man sich von der darin zum Ausdruck kommenden Modellvorstellung formelmässig befreit. Dieser naturgegebenermassen ziemlich «rabiate» Schritt kann, wie praktische Beispiele gezeigt haben, in vielen Fällen zu durchaus nützlichen Ergebnissen führen.

A. Momentenmethode

Schon in Abschnitt 1 ist auf die einfachen Zusammenhänge hingewiesen worden, die zwischen den Momenten der zugrunde liegenden Verteilungen existieren. Die Idee, sich bei Untersuchungen irgendwelcher Art vor allem dieser Beziehungen zu bedienen, liegt deshalb nicht besonders ferne. Bühlmann hat auf diese Möglichkeit in seiner Arbeit [10] aufmerksam gemacht. Eine praktische Anwendung der Methode findet sich in [5]; allerdings wurde hier die Schadensummenverteilung $S(x)$ vorerst durch eine analytische Verteilungsfunktion (logarithmische Normalverteilung) ausgeglichen, was im Sinne dieser Ausführungen nicht unbedingt notwendig ist.

Unter der Poisson-Hypothese ergeben sich für Schiefe und Exzess der Totalschadenverteilung (siehe auch Abschnitt 4.1) die einfachen Ausdrücke

$$\begin{aligned} {}_F\gamma_1 &= \sqrt{{}_F\beta_1} = \frac{t\,s_3}{(t\,s_2)^{3/2}} \\ {}_F\gamma_2 &= {}_F\beta_2 - 3 = \frac{t\,s_4}{(t\,s_2)^2}\,. \end{aligned} \tag{40}$$

Will man eine Verteilungsfunktion nach ihrem Typus gemäss dem Pearson-System klassifizieren, so kann dazu (siehe z.B. [13]) die Grösse

$$\varkappa = \frac{\beta_1(\beta_2+3)^2}{4(4\,\beta_2-3\,\beta_1)\,(2\beta_2-3\,\beta_1-6)} \tag{41}$$

dienen. Je nachdem, was $\varkappa$ für einen Wert annimmt, können daraus Rückschlüsse für die zugrunde liegende Verteilungsfunktion gezogen werden. So gilt

$\varkappa<0$	Typus I	Beta-Verteilung 1. Art.
$\varkappa=0$ $(\beta_1=0,\ \beta_2\neq 3)$	Typus II	
$\varkappa=0$ $(\beta_1=0,\ \beta_2=3)$	Typus VII	Normalverteilung
$0<\varkappa<1$	Typus IV	
$\varkappa=1$	Typus V	
$1<\varkappa<\infty$	Typus VI	Beta-Verteilung 2. Art
$\varkappa=\infty$	Typus III	Gamma-Verteilung

Auf Grund der mit (41) berechneten Masszahl $\varkappa$ kann daher die Art der Verteilungsfunktion des Totalschadens gefunden werden. Das tönt sehr schön, in der Praxis dürfte es aber trotz solcher Regeln nicht immer einfach sein, auf Grund der empirischen Daten einen vertretbaren Entscheid zu fällen.

Man muss im Prinzip nicht so weit gehen, dass man das dritte und vierte Moment zu Hilfe zieht, sondern man kann versuchen, bereits auf Grund der ersten beiden Momente Schlüsse zu ziehen und die Form der Verteilung des Totalschadens festzulegen.

Eine solche Möglichkeit, welche theoretisch wohl begründet ist – die Normalverteilung –, wurde unter 4.1. A erwähnt. Verschiedene Autoren benützen zur Darstellung der Totalschadenverteilung eine unvollständige Gammafunktion (als Beispiel siehe [4]). Diese Wahl ist ebenfalls nicht völlig willkürlich, sondern hat ihren theoretischen Hintergrund, der dann zum Vorschein kommt, wenn man nicht das Poisson-Modell sondern das allgemeinere Modell (3) den Untersuchungen zugrunde legt. Als Stichwort sei nur an den Satz von Lundberg [22] erinnert, der besagt, dass für $t \to \infty$ bei endlichem α die Verteilungsfunktion $F(kt, t)$ gegen die Strukturfunktion $U(k)$ strebt.

B. Verfahren von Bowers

Bowers hat in [9] die soeben erwähnte Möglichkeit insofern verfeinert, als er für die Totalschadenverteilung neben der unvollständigen Gammafunktion eine Summe von Gammadichten ansetzt. Dies erlaubt ihm hinwiederum, beliebig viele Momente der empirischen Verteilung des Totalschadens mit seinem Modell in Übereinstimmung zu bringen.

Die Herleitung, welche ohne Bezug auf das Modell (5) erfolgt und nur die Kenntnis der Momente der Verteilung F erfordert, beruht auf einer Eigenschaft der Laguerre-Polynome. Diese, üblicherweise definiert durch

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n \, x^{1-\alpha} \, e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha-1} \, e^{-x}) \, , \tag{42}$$

stehen bezüglich der Gammadichte

$$g(x, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \, x^{\alpha-1} \, e^{-x}$$

auf der reellen positiven Achse orthogonal, d.h. es gilt die Beziehung

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} L_n^{(\alpha)}(u)\, L_m^{(\alpha)}(u)\, du = \begin{cases} 0 & , \; m \neq n \\ n!\, \dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} & , \; m = n \end{cases} . \tag{43}$$

Nimmt man nun für die Verteilungsdichte des Totalschadens eine Entwicklung der Form

$$f(x,t) = g(x,\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} A_j\, L_j^{(\alpha)}(x) \tag{44}$$

an, so lassen sich die Koeffizienten A_j mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen (43) bestimmen. Geht man weiter davon aus, Mittelwert und Varianz dieser Verteilung seien gleich, und zwar gleich α, so folgt

$$A_0 = 1; \quad A_1 = A_2 = 0; \quad A_3 = \frac{\Gamma(\alpha)}{3!\,\Gamma(\alpha+3)} ({}_F\mu_3 - 2\alpha)$$

usw., wobei ${}_F\mu_3$ das entsprechend transformierte dritte Zentralmoment der Verteilung F bezeichnet.

Setzt man die Polynome (42) sowie die berechneten Koeffizienten A_j in die Formel (44) ein, so erhält man, wenn noch der Einfachheit halber $B_j = \dfrac{\Gamma(\alpha+j)}{\Gamma(\alpha)} A_j$ postuliert wird, eine Summe von Gammadichten von der Form

$$\begin{aligned} f(x,t) &= g(x,\alpha)\,[1 - B_3 + B_4 - \ldots] + g(x,\alpha+1)\,[3B_3 - 4B_4 + \ldots] \\ &\quad + g(x,\alpha+2)\,[-3B_3 + 6B_4 - \ldots] + \ldots \end{aligned}$$

Für die Verteilungsfunktion F ergibt sich somit unter Benützung der Rekursionsformel für die unvollständige Gammafunktion

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x u^\alpha e^{-u}\, du = \Gamma(x, \alpha+1) = \Gamma(x,\alpha) - g(x, \alpha+1)$$

die Beziehung

$$F(x,t) = \Gamma(x,\alpha) - B_3\,[g(x,\alpha+1) - 2g(x,\alpha+2) + g(x,\alpha+3)]$$
$$+ B_4[g(x,\alpha+1) - 3g(x,\alpha+2) + 3g(x,\alpha+3) + g(x,\alpha+4)]$$
$$- \ldots \tag{45}$$

Beim Poisson-Modell, wo bekanntlich nach (7) die Relationen $\mu_F = ts_1$ und $\sigma_F^2 = ts_2$ gelten, muss, um die für die Berechnung der A_j erwähnte Bedingung zu erfüllen, die Variablentransformation $X = \frac{s_1}{s_2} Y$ (Y = ursprüngliche Totalschadenvariable) durchgeführt werden. Dann ergibt sich

$$\mu_F = \sigma_F^2 = \frac{s_1^2}{s_2} t = \alpha$$

und für die Koeffizienten B_j:

$$B_3 = \frac{\alpha}{6}\left(\frac{s_1 s_3}{s_2^2} - 2\right)$$

$$B_4 = \frac{\alpha}{24}\left(\frac{s_1^2 s_4}{s_2^3} - 12\,\frac{s_1 s_3}{s_2^2} + 18\right), \quad \text{usw.}$$

Nimmt man zur Darstellung der Schadensummenverteilung die Exponentialverteilung (4) zu Hilfe, so erhält man die einfachen Beziehungen

$$\alpha = t/2, \quad B_3 = -t/24, \quad B_4 = t/16, \ \ldots$$

was die Auswertung von (45) noch wesentlich leichter gestaltet.

Die numerischen Beispiele, die Bowers gerechnet hat, erweisen sich im Vergleich zu anderen Verfahren nicht in allen Teilen als befriedigend.

Anhang: Einige numerische Werte

Um die Grössenordnung der Abweichungen der verschiedenen Verfahren voneinander doch noch etwas plastischer zu machen, seien im folgenden für ein einfaches Beispiel die numerischen Zahlenwerte einiger wichtiger Methoden zusammengestellt. Dabei verzichten wir praktisch auf die in Abschnitt 5 erwähnten Computerverfahren, zahlenmässige Beispiele hierfür findet man beispielsweise in [8] und [25].

Die Berechnungen beruhen auf der einfachen Verteilungsfunktion (4) mit $a = 1$ als Schadensummenverteilung. Die mittlere zu erwartende Schadenanzahl t wurde gleich 16 gesetzt. Dies erlaubte, die in den Arbeiten von *Cramér* [12] und *Bowers* [9] publizierten numerischen Angaben über die Methoden 4.1. A – Normalverteilung, 4.1. B – *Edgeworth*, 4.2. A – *Esscher*, 5.1. C – für den exakten Wert, 6 A – Gammaverteilung und 6 B – *Bowers* zu übernehmen. Für die NP-Entwicklung wurden die Formeln (14′) und (14″) verwendet.

In der folgenden Tabelle 1 ist der absolute Wert der Funktion $F(x, t)$ an verschiedenen Stellen der x-Achse aufgeführt. Die beiden weiteren Tabellen 2 und 3 geben einmal die Zunahme der Verteilungsfunktion von Intervall zu Intervall an, anderseits die Grössenrelation dieser Zunahmen, wenn der exakte Wert auf 100 normiert wird.

Aus den wiedergegebenen Zahlenwerten geht eindeutig hervor, wie weitgehend die Esscher-Transformation, vorausgesetzt, man berücksichtigt eine genügende Anzahl Terme (schon zwei dürften vielfach genügen), den exakten Werten nahekommt. Man sieht aber auch, wie gut die erst vor kurzem vorgeschlagene NP-Entwicklung die gesuchten Funktionswerte wiedergibt.

Tabelle 1

Numerische Werte der Verteilungsfunktion $10^5\, F(x, t)$ für $t = 16$

x	Exakt	Normal	*Edgeworth* (4 Terme)	NP (14′)	NP (14″)	*Esscher* (1 Term)	*Esscher* (4 Terme)	Gamma	*Bowers* (inkl. B_5)
0	0	234	−64	0	0	0	0	0	0
4	342	1 696	264	393	353	308	341	110	216
8	6 039	7 868	6 165	6 254	6 055	5 470	6 033	5 110	6 255
12	25 385	23 979	25 375	25 559	25 370	23 125	25 370	25 589	25 518
16	53 540	50 000	53 526	53 498	53 526	50 000	53 526	54 687	53 166
20	77 387	76 021	77 373	77 226	77 382	75 350	77 376	77 990	77 324
24	91 172	92 132	91 241	91 040	91 176	90 440	91 168	91 054	91 338
28	97 150	98 304	97 134	97 080	97 151	96 944	97 150	96 839	97 234
32	99 218	99 766	99 160	99 191	99 217	99 169	99 218	99 000	99 204
36	99 814	99 980	99 991	99 807	99 812	99 803	99 814	99 711	99 782
40	99 961	99 999	100 010	99 960	99 960	99 959	99 960	99 922	99 944

Tabelle 2

Zunahmen der Verteilungsfunktion $10^5 F(x, t)$ in aufeinanderfolgenden Intervallen der x-Achse

Intervall	Exakt	Normal	*Edgeworth* (4 Terme)	NP (14′)	NP (14″)	*Esscher* (1 Term)	*Esscher* (4 Terme)	Gamma	*Bowers* (inkl. B_5)
0– 4	342	1 462	328	393	353	308	341	110	216
4– 8	5 697	6 172	5 901	5 861	5 702	5 162	5 692	5 000	6 039
8–12	19 346	16 111	19 210	19 305	19 315	17 655	19 337	20 479	19 263
12–16	28 155	26 021	28 151	27 939	28 156	26 875	28 156	29 098	27 648
16–20	23 847	26 021	23 847	23 728	23 856	25 350	23 850	23 303	24 158
20–24	13 785	16 111	13 868	13 814	13 794	15 090	13 792	13 064	14 014
24–28	5 978	6 172	5 893	6 040	5 975	6 504	5 982	5 785	5 896
28–32	2 068	1 462	2 026	2 111	2 066	2 225	2 068	2 161	1 970
32–36	596	214	831	616	595	634	596	711	578
36–40	147	19	19	153	148	156	146	211	162
40–∞	39	1	—10	40	40	41	40	78	56

Tabelle 3

Prozentuale Abweichung der Zunahmen in den einzelnen Intervallen vom exakten Wert (= 100)

Intervall	Exakt	Normal	*Edgeworth* (4 Terme)	NP (14′)	NP (14″)	*Esscher* (1 Term)	*Esscher* (4 Terme)	Gamma	*Bowers* (inkl. B_5)
0– 4	100	427,5	95,9	114,9	103,2	90,0	99,7	32,2	63,2
4– 8	100	108,3	103,6	102,9	100,1	90,6	99,9	87,8	106,0
8–12	100	83,3	99,3	99,8	99,8	91,3	100,0	105,9	99,6
12–16	100	92,4	100,0	99,2	100,0	95,5	100,0	103,3	98,2
16–20	100	109,1	100,0	99,5	100,0	106,3	100,0	97,7	101,3
20–24	100	116,9	100,6	100,2	100,1	109,5	100,1	94,8	101,7
24–28	100	103,2	98,6	101,0	99,9	108,8	100,1	96,8	98,6
28–32	100	70,7	98,0	102,1	99,9	107,6	100,0	104,5	95,3
32–36	100	35,9	139,4	103,4	99,8	106,4	100,0	119,3	97,0
36–40	100	12,9	12,9	104,1	100,7	106,1	99,3	143,5	110,2
40–∞	100	2,6	—25,6	102,6	102,6	105,1	102,6	200,0	143,6

Literaturverzeichnis

[1] *Ammeter H.*, A generalization of the collective theory of risk in regard to fluctuating basic probabilities. Skand. Aktuarietidskrift *31* (1948).

[2] – Die Ermittlung der Risikogewinne im Versicherungswesen auf risikotheoretischer Grundlage. Mitt. Ver. schweiz. Vers.-Math. *57* (1957).

[3] *Barlow R.* and *van Zwet W.*, Asymptotic properties of isotonic estimators for the generalized failure rate. Part I, Berkeley 1969.

[4] *Bartlett Dwight K.*, Excess ratio distribution in risk theory. Trans. Soc. Act. *17* (1965).

[5] *Beard R.E.*, Some statistical aspects of non-life insurance. Journ. Inst. Act. Stud. Soc. *13* (1954).

[6] *Beard R.E.*, *Pentikäinen T.* and *Pesonen E.*, Risk theory. Methuen's Monographs on Applied Probability and Statistics, London 1969.

[7] *Bohman H.*, To compute the distribution function, when the characteristic function is known. Skand. Aktuarietidskrift *46* (1963).

[8] *Bohman H.* and *Esscher F.*, Studies in risk theory with numerical illustrations concerning distribution functions and stop loss premiums, I–II. Skand. Aktuarietidskrift *46/47* (1963/64).

[9] *Bowers N.L.*, Expansion of probability density functions as a sum of gamma densities with applications in risk theory. Trans. Soc. Act. *18* (1966).

[10] *Bühlmann H.*, A distribution-free method for general risk problems. ASTIN Bull. *3* (1964).

[11] – Mathematical methods in risk theory. Springer, Berlin 1970.

[12] *Cramér H.*, Collective risk theory. A survey from the point of view of the theory of stocastic processes. Skandia Jubilee Volume, Stockholm 1955.

[13] *Elderton W.P.*, Systems of frequency curves. Cambridge University Press, 1969.

[14] *Esscher F.*, On the probability function in the collective theory of risk. Skand. Aktuarietidskrift *15* (1932).

[15] – On approximate computation of distribution functions, when the corresponding characteristic functions are known. Skand. Aktuarietidskrift *46* (1963).

[16] *Filon L.N.G.*, On a quadrature formula for trigonometric integrals. Proc. Royal Soc. Edinburgh *49* (1928).

[17] *Franckx E.*, Les routines d'avant-projet en assurances de risques divers. Bull. Royal Act. Belges *64* (1968).

[18] *Hofmann M.*, Über zusammengesetzte Poisson-Prozesse und ihre Anwendungen in der Unfallversicherung. Mitt. Ver. schweiz. Vers.-Math. *55* (1955).

[19] *Hovinen E.*, A procedure to compute values of the generalized Poisson function. ASTIN Bull. *4* (1967).

[20] *Kauppi L.* and *Ojantakanen P.*, Approximations of the generalized Poisson function. ASTIN Bull. *5* (1969).

[21] *Kupper J.*, Wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle in der Schadenversicherung, I–II. Blätter Deutsche Ges. Vers.-Math. *5/6* (1962).

[22] *Lundberg O.*, On random processes and their application to sickness and accident statistics. Almquist and Wiksells, Uppsala 1964.

[23] *Pesonen E.*, On the calculation of the generalized Poisson function. ASTIN Bull. *4* (1967).

[24] – NP-approximation of risk processes. Skand. Aktuarietidskrift *51* (1968).

[25] *Seal H.L.*, Numerical calculation of the Bohman-Esscher family of convolution-mixed negative binomial distribution functions. Mitt. Ver. schweiz. Vers.-Math. *71* (1971).

[26] *Segerdahl C.-O.*, If a risk business goes bankrupt, when does it occur? A basis for fixing net retention. Trans. XVth Intern. Congr. Act., New York 1957.

[27] *Straub E.*, Application of reliability theory to insurance. ASTIN Coll. Randers 1970, to be published in ASTIN Bull.

[28] *Thorin O.*, Proof of the uniqueness of the Bohman function $C(t)$. Skand. Aktuarietidskrift *52* (1969).

Zusammenfassung

In den vergangenen Jahren sind viele Verfahren entwickelt worden, die die Berechnung der Verteilungsfunktion des Totalschadens, eines der zentralen Probleme der kollektiven Risikotheorie, zum Ziele haben. Der Autor versucht, einen systematischen Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten zu geben und diese in ihren wesentlichen Belangen kurz zu charakterisieren.

Summary

In the past, several procedures have been developped to solve one of the main problems of the collective theory of risk: The evaluation of the distribution function of the accumulated claims. The author gives a systematic survey of the various methods and describes their essential properties.

Résumé

Au cours des années écoulées, plusieurs procédés ont été développés ayant tous pour but le calcul de la fonction de distribution du sinistre total – un des problèmes cruciaux de la théorie collective du risque. L'intention de l'auteur est de donner un aperçu systématique des diverses possibilités et d'en relever succinctement les principales caractéristiques.

Riassunto

Negli anni trascorsi sono stati sviluppati molti procedimenti che hanno come meta il calcolo della funzione di ripartizione del sinistro totale, uno dei problemi centrali della teoria collettiva di rischio. L'autore cerca di fare un'esposizione sistematica delle diverse possibilità e di caratterizzare brevemente le stesse secondo la loro importanza essenziale.