La ruine et sa contre-utilité

Autor(en): **Amsler, Marc-Henri**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **75 (1975)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967113

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

La ruine et sa contre-utilité

Par Marc-Henri Amsler, Lausanne

1. La question étudiée

Afin d'apprécier la stabilité et la solvabilité d'une compagnie d'assurance, les actuaires utilisent largement la notion de probabilité de ruine. La théorie classique précise que cette probabilité ψ est bornée vers le haut par l'expression e^{-RU}, expression dans laquelle U représente la provision de fluctuation à la date de l'estimation et R un certain coefficient. La valeur de la borne supérieure est calculable encore relativement facilement. L'intérêt des actuaires se porte néanmoins non sur la valeur de cette borne supérieure mais sur celle de la probabilité de ruine ψ. C'est la raison pour laquelle de nombreuses études théoriques ont été entreprises en vue de déterminer l'écart existant entre la probabilité ψ, recherchée, et sa borne supérieure e^{-RU}, calculable.
Dans la pratique, l'actuaire identifie même souvent, dans ses raisonnements et ses calculs, la valeur de la probabilité ψ à celle de sa borne supérieure e^{-RU}.
La notion de probabilité de ruine, sur laquelle se fonde le critère usuel de solvabilité, présente une faiblesse notoire. Elle permet bien de mesurer l'intensité des craintes qu'une direction peut concevoir de se trouver un jour dans une situation «désagréable». Néanmoins, cette mesure du risque reste rudimentaire. Elle ne tient compte, notamment, que de l'alternative du tout ou rien, c.-à.-d. de l'alternative «survivre ou disparaître», sans laisser transparaître la qualité de la survie ou la gravité de la ruine. Selon le critère de la probabilité de ruine, une probabilité de $x\%$, comprise dans ψ, a en effet un poids identique qu'elle soit attachée à l'apparition d'une ruine légère ou à celle d'une ruine catastrophique, ou qu'elle soit liée à une ruine imminente ou à une ruine à long terme seulement. Or les craintes que peut avoir une direction dépendent évidemment et de l'importance de la ruine et de la longueur du différé qui s'écoulera jusqu'au moment fatidique, si la ruine devait se produire.
On peut donc se poser la question de savoir s'il n'est pas possible de faire intervenir, dans le critère de solvabilité, l'importance de la ruine et son différé. Cette question est l'objet des pages qui suivent.

2. Résultats de l'étude

La présente étude se propose de définir un critère de solvabilité plus évolué que celui de la simple probabilité de ruine, capable de tenir compte – au sujet de la ruine – de sa probabilité bien sûr mais également de son importance et de son imminence. Ce critère est celui de la «*contre-utilité*» de la ruine.
La notion de contre-utilité reprend l'idée maîtresse contenue dans celle d'utilité, d'usage courant, à savoir qu'un événement se juge essentiellement à l'effet qu'il provoque, que ce soit un effet objectivement mesurable ou de caractère plutôt subjectif et psychologique. On demandera à la contre-utilité d'être d'autant plus forte que l'événement sera plus redoutable.
Le résultat essentiel de la présente étude est que la valeur attribuée à la contre-utilité Ψ de la ruine est $\Psi = e^{-\varepsilon U}$, c.-à.-d. que la contre-utilité est représentable par une formule semblable à celle de la borne supérieure de la probabilité de ruine.
Sur deux points néanmoins le critère de la contre-utilité se distingue de celui de la probabilité. Premièrement, la formule $\Psi = e^{-\varepsilon U}$ donne la valeur exacte du critère de solvabilité, c.-à.-d. de la contre-utilité, non pas une valeur approchée, comme c'est le cas avec le critère de la probabilité. Secondement, dans l'expression $e^{-\varepsilon U}$ de la contre-utilité, le coefficient ε est variable, en fonction d'un paramètre intervenant dans la définition de la fonction de contre-utilité. La latitude de pouvoir faire varier un paramètre dans l'expression de la contre-utilité, puis de pouvoir calculer l'effet exact de cette variation sur la valeur numérique du critère de solvabilité permet de plus d'estimer la solvabilité sous différentes hypothèses.
Le critère proposé de la contre-utilité justifie en quelque sorte a posteriori la pratique qui consiste à utiliser la valeur de e^{-RU}, c.-à.-d. la borne supérieure de la probabilité de ruine, comme critère de solvabilité à la place de celui de la probabilité elle-même. L'expression e^{-RU} est bien une mesure adéquate du risque: elle ne représente cependant pas la probabilité de la ruine mais sa contre-utilité, dans un cas particulier ($\varepsilon = R$).

3. Définition de la contre-utilité de la ruine

La notion d'utilité ne peut être associée qu'à un événement favorable ou à une décision devant infléchir de façon favorable la suite des événements. La ruine étant un événement défavorable, il faut créer un concept nouveau. Nous avons

retenu la notion de contre-utilité, plutôt que celles d'inutilité, de désutilité ou d'utilité négative.

Voici comment nous définirons la contre-utilité de l'événement appelé communément la ruine, et que l'on devrait appeler en fait la première ruine.

La ruine est caractérisée par la situation qui attribue pour la première fois, au moment T, une valeur négative à la provision de fluctuation X. Pour nos besoins, nous supposerons la variable T entière et la variable X continue. La contre-utilité attachée à la situation élémentaire caractérisée par les valeurs t et x des variables aléatoires T et X, et de probabilité p, sera définie par l'expression

$$e^{-\delta \cdot t} \cdot e^{-\varepsilon \cdot x} \cdot p. \tag{1}$$

Dans cette expression, les paramètres δ et ε représentent,

δ, le taux instantané d'estompage dans le temps. Ce taux sera positif pour nos besoins. Il a une signification semblable à celle du taux instantané d'escompte,

ε, le taux instantané d'aggravation de la situation en cas de ruine. Ce taux sera positif de façon à ce que le facteur $e^{-\varepsilon x}$ croisse en fonction de l'importance $|x|$ de la ruine (x est toujours négatif).

Si, maintenant, ${}_{t-1}|q$ caractérise la probabilité pour que la première ruine intervienne au moment t[1], et $F_t(x)$ la fonction de répartition de la provision de fluctuation devenue subitement négative à ce moment t, la probabilité d'une ruine en t et de montant x est

$${}_{t-1}|q \cdot dF_t(x)$$

et la contre-utilité de cette ruine, selon notre définition (1)

$$e^{-\delta t} \cdot e^{-\varepsilon x} \cdot {}_{t-1}|q \cdot dF_t(x).$$

La contre-utilité de la ruine en un moment quelconque et de montant quelconque sera donc

$$\Psi(\delta, \varepsilon) = \sum_{t=1}^{\infty} {}_{t-1}|q \cdot e^{-\delta t} \int_{-\infty}^{0} e^{-\varepsilon x} \cdot dF_t(x)\,^{2}. \tag{2}$$

[1] Nous adopterons ici l'usage des actuaires vie de représenter par ${}_t|q_x$ la probabilité annuelle de décès différée de t années. Le symbole ${}_{t-1}|q$ sera donc celui de la probabilité de première ruine durant l'année s'écoulant du temps t–1 au temps t.

[2] Sous réserve de son existence. En effet, l'intégrale pourrait ne pas exister, l'intégrant pouvant devenir infiniment grand pour la borne inférieure de l'intégrale (x est négatif).
Pour obtenir la valeur de la contre-utilité de la ruine sur une période limitée, il suffit de limiter la sommation à un nombre fini de termes.

Nous allons montrer que

$$\Psi(\delta, \varepsilon) = e^{-\varepsilon U}, \tag{3}$$

les taux δ et ε de la fonction de contre-utilité étant liés par la relation

$$e^{\delta} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon x}\, dF(x), \tag{4}$$

c.-à.-d.

$$e^{\delta} = E(e^{-\varepsilon x}).$$

La fonction de répartition F (sans indice t) et l'espérance mathématique E intervenant dans ces deux dernières formules se rapportent à la variable aléatoire caractérisant le bénéfice annuel.
De ce résultat, il s'ensuit que l'un des deux paramètres, δ ou ε, peut être choisi arbitrairement. Comme nous le verrons par la suite, le choix portera ordinairement sur le paramètre δ, paramètre déterminant l'intensité du phénomène d'estompage dans le temps. Le paramètre δ étant fixé, la relation (4) détermine à son tour le paramètre ε, ce qui permet enfin de calculer la contre-utilité Ψ, par la formule (3).

4. Démonstration de la relation $\Psi = e^{-\varepsilon \cdot U}$

Cette démonstration fait usage des propriétés de la «transformation intégro-exponentielle», l'une des transformations les plus utilisées en sciences actuarielles, et dont le résultat est connu sous le nom de «fonction génératrice» ou de «fonction caractéristique (réelle)».
Soient
X une variable aléatoire (continue) définie sur un domaine D,
$f(x)$ sa densité de probabilité,
s un paramètre (à choisir convenablement de façon à assurer la convergence de l'intégrale intervenant dans la définition).
La transformation intégro-exponentielle est définie par

$$A(s) = \int_D e^{sx} \cdot f(x) \cdot dx. \tag{5}$$

Elle fait correspondre à la densité $f(x)$ de la variable x une fonction $A(s)$ du paramètre s.
Sous réserve de l'existence de la fonction $A(s)$, la transformation resp. la transformée $A(s)$ ont notamment les propriétés suivantes:

1. Si $f(x) = p \cdot f_1(x) + q \cdot f_2(x)$, $f_1(x)$ et $f_2(x)$ étant des densités de probabilité, $p + q = 1$,
   alors $A(s) = p \cdot A_1(s) + q \cdot A_2(s)$, $A_1(s)$ et $A_2(s)$ étant les transformées de $f_1(x)$ et de $f_2(x)$.
2. Si $f(x) = f_1(x) * f_2(x)$, le symbole * caractérisant la convolution, alors $A(s) = A_1(s) \cdot A_2(s)$.
3. $A(0) = 1$.
4. Sous l'hypothèse d'un paramètre s réel,
   si la variable X est positive, $A(s)$ est une fonction monotone croissante
   si — — — — négative, — — — — — décroissante
   si — — — prend des valeurs positives et négatives, $A(s)$ est une fonction en forme de U (concavité de son graphe tournée vers le haut).

Les propriétés 1 à 3 sont connues de par la théorie des fonctions caractéristiques (s imaginaire pur) ou de par la théorie des transformations de Laplace (s réel négatif). La proposition 4 est élémentaire. Nous renonçons à la démontrer ici.
La démonstration de la relation $\Psi = e^{-\varepsilon U}$ consiste à déterminer la densité de probabilité de la provision de fluctuation en un temps quelconque, puis de transposer cette densité par la transformation intégro-exponentielle, ce qui donnera la formule de la contre-utilité (2). Voici le détail de cette démonstration, qui utilise, sans le dire, les règles du calcul opérationnel de Heaviside.

Soient
X_t la variable aléatoire caractérisant la provision de fluctuation au moment t,
$f_t(x)$ sa densité de probabilité (t entier, x continu),
X la variable aléatoire caractérisant le bénéfice annuel,
$f(x)$ sa densité de probabilité (indépendante du temps, par hypothèse).
A l'origine des temps $t = 0$:
$X_0 = U =$ constante, c.-à.-d. $f_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } X = U \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$ (loi de Dirac).
Aux époques $t = 1, 2, \ldots, n$, on a
$X_1 = X_0 + X$ et $f_1(x) = f_0(x) * f(x)$
$X_2 = X_1 + X$ et $f_2(x) = f_0(x) * f(x)^{*2}$,
etc.

$$X_n = X_{n-1} + X \quad \text{et } f_n(x) = f_0(x) * f(x)^{*n}. \tag{6}$$

Comme on le sait, la densité $f_n(x)$ permet de déterminer, théoriquement du moins, la probabilité pour que la provision de fluctuation soit positive ou soit négative en $t = n$. On ne peut par contre pas tirer de cette grandeur la probabilité de ne jamais se ruiner durant les n années considérées.
Pour obtenir ce renseignement supplémentaire, il y a lieu de séparer les situations qui mènent à la ruine de celles qui évitent la ruine. Considérons, pour ce faire, que la compagnie ne s'est pas ruinée jusqu'au temps t–1. Soient

q_{t-1}, la probabilité de se ruiner (première ruine) dans l'année s'écoulant de t–1 à t [3], et

$f_t^-(x)$ la densité de probabilité de la provision de fluctuation X devenue négative au moment t (cas ayant mené à la ruine dans l'année de rang t),

$p_{t-1} = 1 - q_{t-1}$, la probabilité complémentaire, c.-à.-d. de ne pas se ruiner dans l'année s'écoulant de t–1 à t, et

$f_t^+(x)$ la densité de probabilité de la provision de fluctuation restée positive au moment t (cas de la non-ruine).

La variable aléatoire X_t, décrivant la provision de fluctuation au moment t, possède la densité de probabilité suivante[4]

en $t = 0, f_0$ comme ci-dessus,

en $t = 1, f_1 = f_0 * f = q_0 \cdot f_1^- + p_0 \cdot f_1^+$ si l'on isole les cas menant à la première ruine (1er terme) des autres (second terme),

en $t = 2, f_2 = f_1 * f = q_0 \cdot f_1^- * f + p_0 \cdot f_1^+ * f$
$= q_0 \cdot f_1^- * f + p_0(q_1 f_2^- + p_1 f_2^+)$ si l'on isole à nouveau les cas menant à la ruine des autres, au moment $t = 2$,

etc.

$$\text{en } t = n, f_n = f_{n-1} * f = q_0 f_1^- * f^{*(n-1)} + p_0 q_1 f_2^- * f^{*(n-2)} + p_0 p_1 q_2 f_3^- * f^{*(n-3)} \tag{7}$$
$$+ \ldots + p_0 p_1 \ldots p_{n-2} q_{n-1} f_n^- + p_0 p_1 p_2 \ldots p_{n-1} f_n^+.$$

Chaque terme de cette expression pour f_n a une signification bien précise:

- Le 1er terme est égal à la partie de la densité de probabilité f_n provenant des cas de ruine de 1ère année, de probabilité q_0.
- Le 2e terme est égal à la partie provenant des cas de ruine de 2e année, de probabilité $p_0 q_1$, etc.
- L'expression $p_0 p_1 \cdots p_{n-2} q_{n-1}$ ne représente rien d'autre que la probabilité de 1re ruine durant l'année s'écoulant de n–1 à n. Conformément aux usages de

[3] q_t n'est autre que la «probabilité de décès» de la compagnie, correspondant au q_{x+t} de l'assurance-vie.

[4] Nous laissons tomber le symbole de la variable indépendante x, pour simplifier l'écriture.

l'assurance-vie, nous utiliserons pour cette dernière expression le symbole ${}_{n-1|}q$, comme indiqué plus haut.

– L'expression $p_0 p_1 \cdots p_{n-1}$ représente la probabilité de ne jamais se ruiner durant les n années considérées. Nous utiliserons le symbole ${}_np$ emprunté à l'assurance-vie.

L'identité des expressions de f_n selon (7) et (6) donne ainsi

$$
\begin{aligned}
{}_{0|}q \cdot f_1^- * f^{*(n-1)} + {}_{1|}q \cdot f_2^- * f^{*(n-2)} + {}_{2|}q \cdot f_3^- * f^{*(n-3)} + \cdots + \\
+ {}_{n-1|}q \cdot f_n^- + {}_np \cdot f_n^+ = f_0 * f^{*n}.
\end{aligned}
$$

Transposons maintenant cette relation par la transformation intégro-exponentielle. En utilisant les propriétés 1 et 2 mentionnées à son sujet, nous obtenons:

$$
\begin{aligned}
{}_{0|}q \cdot A_1^- \cdot A^{n-1} + {}_{1|}q \cdot A_2^- \cdot A^{n-2} + {}_{2|}q \cdot A_3^- \cdot A^{n-3} + \ldots + \\
+ {}_{n-1|}q \cdot A_n^- + {}_np \cdot A_n^+ = A_0 \cdot A^n
\end{aligned}
$$

ou, en divisant par A^n

$$
{}_{0|}q \cdot A^{-1} \cdot A_1^- + {}_{1|}q \cdot A^{-2} \cdot A_2^- + \ldots + {}_{n-1|}q \cdot A^{-n} \cdot A_n^- + {}_np \cdot A^{-n} \cdot A_n^+ = A_0,
$$

c.-à.-d., en réintroduisant le symbole s,

$$
\sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q \cdot A^{-t}(s) \cdot A_t^-(s) + {}_np \cdot A^{-n}(s) \cdot A_n^+(s) = A_0(s). \tag{8}
$$

Pour obtenir la formule (2) de la contre-utilité, il suffit de donner aux fonctions A une interprétation conforme au but poursuivi: l'estimation de la contre-utilité de la ruine.

Commençons par $A(s)$.

La fonction $A(s)$ est la transformée de la densité de probabilité du bénéfice annuel. Attachée à une variable aléatoire positive et négative, $A(s)$ possède un graphe en forme de U (fig. 1), selon la propriété 4 ci-dessus. Sa dérivée

$$
A'(s) = \int x \cdot e^{sx} f(x) \cdot dx,
$$

calculée à l'origine

$$
A'(0) = \int x \cdot f(x) \cdot dx
$$

est égale à l'espérance mathématique du bénéfice, c.-à.-d. à la marge de sécurité comprise dans les primes. Cette dérivée est donc positive, d'ou l'existence d'une valeur $-R$ (par suite de la propriété de concavité) donnant à $A(s)$ la valeur 1[5]. La fonction $A(s)$ étant positive, son logarithme, réel, $\delta(s)$ existe. On peut donc poser

$$A(s) = e^{\delta(s)}. \tag{9}$$

Pour $-R < s < 0$, $\delta(s)$ est négatif
ailleurs $\delta(s)$ est positif.

Retournons maintenant à l'expression (8): le terme $A^{-t}(s)$ peut être interprété comme suit

$$A^{-t}(s) = e^{-\delta(s)\cdot t}.$$

Passons à l'interprétation du terme $A_t^-(s)$. Par définition de la transformation intégro-exponentielle, nous avons

$$A_t^-(s) = \int_{-\infty}^{0} e^{sx} \cdot f_t^-(x) \cdot dx.$$

Si l'on prend pour s une valeur négative, $s = -\varepsilon(\varepsilon > 0)$, nous retrouvons l'intégrale figurant dans la définition (2) de la contre-utilité de la ruine.
Le membre de droite de l'équation (8) est la transformée de la fonction $f_0(x)$, soit:

$$A_0(s) = \int_{0}^{\infty} e^{sx} \cdot f_0(x) \cdot dx$$

c.-à.-d. $\qquad = \quad e^{sU}$

puisque $f_0(x)$ ne prend de valeur non-nulle qu'en $x = U$.
Grâce à cette interprétation des fonctions A, l'équation (8) s'écrit, en attribuant à s une valeur négative $-\varepsilon$:

$$\sum_{t=1}^{n} {}_{t-1}q \cdot e^{-\delta(-\varepsilon)\cdot t} \int_{-\infty}^{0} e^{-\varepsilon\cdot x} \cdot f_t^-(x) \cdot dx + {}_np \cdot e^{-\delta(-\varepsilon)\cdot n} \int_{0}^{\infty} e^{-\varepsilon x} \cdot f_n^+(x)\, dx \tag{10}$$
$$= e^{-\varepsilon U}.$$

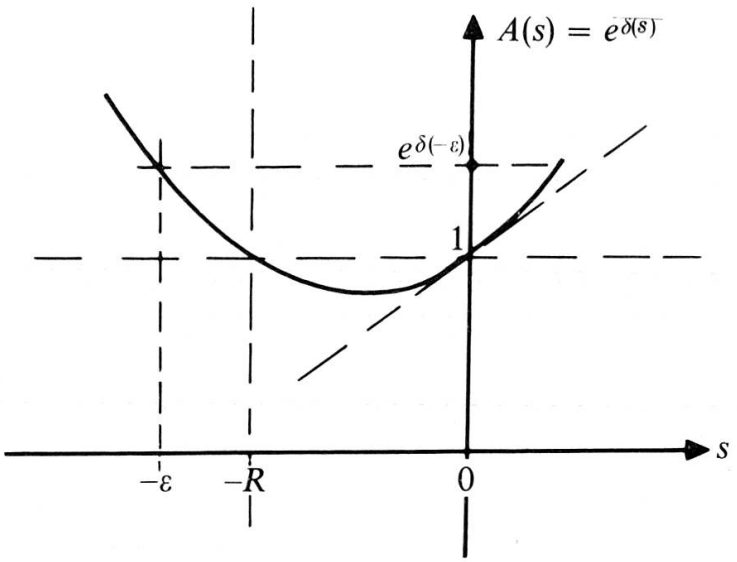
Le premier terme du membre de gauche représente, par définition, la contre-utilité, calculée en $t = 0$, de l'événement «se ruiner durant les n années à venir.»

Lorsque n tend vers l'infini, le second terme du membre de gauche tend vers zéro. En effet, l'intégrant comporte une densité de probabilité d'une variable tendant vers l'infini. Le facteur $e^{-\varepsilon x}$ se charge de rendre l'intégrale aussi petite que possible[5].
On a donc à la limite $n = \infty$,

$$\Psi(\delta, \varepsilon) = e^{-\varepsilon U}.$$

L'expression (9) établie en cours de démonstration fixe la relation qui existe entre les deux paramètres δ et ε de la fonction de contre-utilité, ce qui achève notre démonstration.

Fig. 1



5. Quelques notions apparentées

a) Contre-utilité d'une situation favorable

La notion de contre-utilité a été définie en relation avec un événement ou une situation défavorable: plus l'événement est défavorable, plus sa contre-utilité est forte. Il est évident que l'on peut également définir la contre-utilité d'une

[5] Propriété connue, utilisée pour déterminer la probabilité de ruine.

situation favorable: plus la situation est favorable, plus sa contre-utilité doit alors être faible. On peut réutiliser la définition de la contre-utilité donnée pour une situation défavorable et définir la contre-utilité d'une situation caractérisée par une variable aléatoire positive par

$$\Psi(\varepsilon) = \int_0^\infty e^{-\varepsilon \cdot x} dF$$

Le paramètre ε étant positif, l'intégrant $e^{-\varepsilon \cdot x}$ est d'autant plus petit que x est grand. Ψ mesure en quelque sorte le «degré de marasme» d'une situation qui devrait être favorable.

Par cette définition, l'expression e^{-RU} de la borne supérieure de la probabilité de ruine revêt une signification intuitive: e^{-RU} est la contre-utilité de la situation initiale, calculée au taux d'aggravation R. Plus la provision de fluctuation U est forte, c.-à.-d. plus la situation de la compagnie est favorable, plus sa contre-utilité est faible. Pour des raisons identiques, il est possible de définir la contre-utilité de l'événement futur «ne jamais se ruiner, jusqu'au moment $t = n$». Calculée au moment $t = n$, la contre-utilité de la situation «ne s'être jamais ruiné» sera donnée, au sens défini ci-dessus, par

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon \cdot x} \cdot f_n^+(x) \cdot dx.$$

La contre-utilité de cette situation favorable, calculée non en $t = n$ mais en $t = 0$, sera, selon nos définitions,

$${}_np \cdot e^{-\delta \cdot n} \cdot \int_0^\infty e^{-\varepsilon \cdot x} \cdot f_n^+(x) \cdot dx,$$

c.-à.-d. le second terme du membre de gauche de l'équation (10). L'équation (10) trouve donc l'interprétation actuarielle suivante: «La contre-utilité de se ruiner durant n années, augmentée de la contre-utilité de ne jamais se ruiner durant n années est égale à la contre-utilité de la situation initiale de ne pas être ruiné au départ.» Il est intéressant de constater que cette propriété est indépendante du nombre n d'années considérées.

Inversément on peut dire que la contre-utilité de se ruiner est égale à la chute de contre-utilité de ne pas se ruiner entre le début et la fin de la période considérée.

b) Contre-utilité et probabilité de ruine

Parmi toutes les valeurs que peuvent prendre les paramètres δ et ε, la valeur $\delta = 0$ revêt un intérêt tout particulier. $\delta = 0$ caractérise en effet une contre-utilité sans phénomène d'estompage dans le temps. Si l'on choisit $\delta = 0$, la relation (4) livre pour ε la valeur R donnée par la théorie de la probabilité de la ruine

$$\Psi = \sum_{t=1}^{\infty} {}_{t-1}|q \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{-Rx} \cdot f_t^-(x) \cdot dx = e^{-RU}.$$

R étant positif et x négatif, la valeur de l'intégrale est plus grande que l'unité. La probabilité de la ruine satisfait donc l'inéquation

$$\psi = \sum_{t=1}^{\infty} {}_{t-1}|q < e^{-RU}$$

connue de par la théorie du risque collectif.
Il est évidemment regrettable que la méthode ne permette pas de rendre l'intégrale figurant dans Ψ égale à l'unité, tout en gardant au membre de droite une valeur plus faible que l'unité, ce qui aurait évidemment donné la valeur exacte de la probabilité de ruine.
La formule fondamentale de la contre-utilité de la ruine

$$\Psi = e^{-\varepsilon \cdot U}$$

comporte donc, comme cas particulier $\delta = 0$ et $\varepsilon = R$, celle de la probabilité de la ruine

$$\psi < e^{-RU}.$$

Le paramètre ε de la contre-utilité étant plus grand que R, la contre-utilité est plus faible que la borne supérieure de la probabilité de ruine ψ.

c) Contre-utilité et prime unique de l'assurance en cas de décès

Le choix même des symboles utilisés dans les définitions de la contre-utilité souligne l'analogie des raisonnements et des formules avec ceux de l'assurance sur la vie. Si l'on fait abstraction de la variabilité du montant X_t de la provision de fluctuation au moment t, la définition (2) de la contre-utilité nous donne

$$\Psi = \sum {}_{t-1}|q \cdot e^{-\delta t}.$$

La notion de contre-utilité est donc directement liée à celle de la valeur actuelle du capital payable en cas de décès, c.-à.-d. en cas de «ruine» de l'assuré.
Un article subséquent sera consacré à cette analogie, qui n'est pas uniquement formelle.

6. Exemple numérique

A titre d'exemple, considérons un portefeuille pour lequel le bénéfice annuel X est une variable de Gauss:

Prime de risque annuelle	$P = 1$	(p. ex. 10 millions)
Marge de sécurité dans les primes	$\wedge = 0{,}1$	c.-à.-d. 10% P
Ecart-type	$\sigma = 0{,}1$	– 10% P
Variance	$V = 0{,}01$	
Provision de fluctuation initiale	$U = 0{,}2$	– 20% P.

La transformée intégro-exponentielle $A(s)$ d'une variable de Gauss d'espérance mathématique E et de variance $V = \sigma^2$ est, par définition:

$$A(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} \cdot f(x) \cdot dx,$$

formule dans laquelle

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-E}{\sigma}\right)^2}.$$

En remplaçant $f(x)$ dans l'intégrale et en complétant le carré situé en exposant, on obtient facilement

$$A(s) = e^{Es + \frac{1}{2}Vs^2}.$$

Pour le bénéfice annuel X considéré, d'espérance mathématique $\wedge$ et de variance V, on a donc

$$A(s) = e^{\wedge s + \frac{1}{2}Vs^2}.$$

Dans la fonction de contre-utilité, le paramètre δ est le logarithme de $A(s)$, et le paramètre ε vaut $-s$; ce qui donne à la relation reliant les deux paramètres δ et ε la forme simple

$$\delta = \frac{1}{2} V \varepsilon^2 - \wedge \varepsilon$$

ou, inversément,

$$\varepsilon = \frac{1}{V}(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + 2\,V\delta})$$

c.-à.-d., pour les valeurs numériques choisies dans notre exemple,

$$\varepsilon = 100\,[0{,}1 + \sqrt{0{,}01 + 0{,}02\,\delta}].$$

La contre-utilité a la valeur

$$\Psi = e^{-0{,}2\cdot\varepsilon}.$$

Comme indiqué dans le texte, on choisira tout d'abord le paramètre δ qui fixe le phénomène d'estompage dans le temps, puis on calculera le paramètre ε et enfin la contre-utilité Ψ. Le tableau ci-dessous indique, pour l'exemple choisi, quelques correspondances entre δ, ε et Ψ.

Paramètres et valeurs de la fonction de contre-utilité

δ	ε	Ψ
0%	20,00	0,0183
	$= R$	
5%	20,49	0,0166
10%	20,95	0,0151
20%	21,83	0,0127

Trois remarques éclairciront la signification des chiffres de ce tableau:

a) Le tableau comporte en sa première colonne quelques taux d'estompage δ pouvant entrer en ligne de compte dans une estimation réaliste, soit des taux entre 0 et 20% par an. Malgré la forte variation des taux, entre 0 et 20%, la valeur de la contre-utilité Ψ ne varie que peu, de même le paramètre d'aggravation ε. Cela signifie que l'estompage est sans grand effet sur la valeur de la contre-utilité de la ruine, c.-à.-d. que la ruine intervient essentiellement dans les premières années après l'époque du calcul ($t = 0$). Ce résultat est conforme à ce que l'on sait par ailleurs.

b) La première ligne du tableau correspond à une contre-utilité sans phénomène d'estompage dans le temps ($\delta = 0$). La valeur de 0,0183 obtenue pour la contre-utilité est donc celle de la borne supérieure de la probabilité de ruine. Dans les conditions du portefeuille donné, une ruine de l'ordre de $x = -0{,}1$

est encore imaginable. Dans la valeur de la borne supérieure, la probabilité d'une ruine $x = -0{,}1$ est multipliée par le facteur d'aggravation

$$e^{-\varepsilon x} = e^{-20(-0{,}1)} = e^{2} = 7{,}4,$$

et pour une ruine $x = -0{,}3$, par

$$e^{-\varepsilon x} = e^{-20(-0{,}3)} = e^{6} = 403.$$

Ces facteurs d'aggravation ne sont pas négligeables. La probabilité de ruine doit donc se situer passablement au-dessous de sa borne supérieure (0,0183).

c) Il est encore possible de déterminer numériquement la probabilité de la ruine en première année $({}_0|q)$ et la contre-utilité de la ruine en première année. En effet, en $t = 1$, la provision de fluctuation X_1 est gaussienne, de moyenne $E = U + \wedge = 0{,}3$, d'écart-type $\sigma = 0{,}1$, c.-à.-d. de densité

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-E}{\sigma}\right)^2}.$$

La probabilité de ruine est

$${}_0|q = \int_{-\infty}^{0} f_1(x) \cdot dx.$$

Cette intégrale se ramène à la fonction de Gauss $\Phi(x)$, et on trouve

$${}_0|q = \Phi\left(\frac{-E}{\sigma}\right) = \Phi(-3) = 0{,}00135.$$

La contre-utilité de la ruine en première année est

$${}_0|q \cdot e^{-\delta} \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{-\varepsilon x} \cdot f_{\bar{1}}(x) \cdot dx.$$

expression dans laquelle

$$f_{\bar{1}}(x) = \frac{1}{{}_0|q} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-E}{\sigma}\right)^2}.$$

Cette expression peut également se ramener à la fonction de Gauss. On trouve

$$e^{-\delta} \cdot e^{-E\varepsilon + \frac{1}{2}\sigma^2\varepsilon^2} \cdot \Phi\left(\sigma\varepsilon - \frac{E}{\sigma}\right).$$

Sans phénomène d'estompage ($\delta = 0$ et $\varepsilon = 20$), la contre-utilité de la ruine en première année devient

$$e^{-4} \cdot \Phi(-1) = 0{,}01832 \cdot 0{,}15866 = 0{,}00291.$$

La probabilité de ruine en première année (0,00135) est moins de la moitié de sa contre-utilité (0,00291). Ici aussi, on arrive à la conclusion que, dans l'exemple considéré, la probabilité de ruine ψ se situe passablement au-dessous de sa borne supérieure (0,0183).

Marc-Henri Amsler
Professeur à l'Université
de Lausanne
3, chemin des Prouges
1009 Pully

Zusammenfassung

Das Kriterium der Ruinwahrscheinlichkeit ist zur Messung der Solvabilität einer Versicherungsgesellschaft konzipiert worden. Indessen ist bei der Schätzung des Risikos die Wahrscheinlichkeit der gefürchteten Situation nicht allein massgebend: die Länge der Zeitspanne bis zum fatalen Ereignisse oder der Betrag des allfälligen Ruines spielen ebensosicher eine Rolle. Um diesem Tatbestand Rechnung zu tragen, schlägt der Verfasser vor, zusätzlich zum üblichen Kriterium der Ruinwahrscheinlichkeit dasjenige des «Gegennutzens» der Ruinsituation mitzuberücksichtigen. Der Gegennutzen wird um so grösser, je näher die Ruinsituation liegt oder je grösser der Ruinbetrag zu stehen kommen wird. In der vorgeschlagenen Form kann der Gegennutzen durch eine mathematische Formel ausgedrückt werden, die sehr ähnlich wie diejenige der oberen Schranke der Ruinwahrscheinlichkeit aussieht. Durch Veränderung eines in der Definition des Gegennutzens auftretenden Parameters ist es schliesslich möglich, die Solvabilität einer Versicherungsgesellschaft von verschiedenen Seiten her zu beleuchten.

Résumé

Le critère de la probabilité de ruine a été conçu pour mesurer la solvabilité des compagnies d'assurance. Néanmoins, dans l'estimation du risque, la probabilité de l'événement craint n'est pas seule déterminante: la longueur du laps de temps notamment qui s'écoulera jusqu'au moment fatidique, de même que l'importance financière de la ruine interviennent également. Pour tenir compte de ce fait, l'auteur propose, en plus du critère classique de la probabilité, d'utiliser celui de la contre-utilité de la ruine. La contre-utilité est d'autant plus forte que la ruine est proche ou que la ruine sera importante. Dans la forme proposée, la contre-utilité de la ruine est exprimable par une formule semblable à celle de la borne supérieure de la probabilité de ruine. Par une action sur un paramètre intervenant dans la définition de la contre-utilité, il est possible enfin de juger de la solvabilité d'une compagnie d'assurance sous diverses hypothèses.

Riassunto

Il criterio della probabilità di rovina è stato concepito per misurare la solvibilità delle compagnie di assicurazioni. Nondimeno, la probabilità di un evento temuto non rappresenta l'unico fattore nella valutazione del rischio: intervengono pure, tra altri elementi, il tempo che trascorrerà fino al momento fatidico, così come l'importanza economica della rovina. Al fine di tenere conto di questo fatto, l'attore propone oltre al classico criterio della probabilità, quelle della «contro-utilità» della rovina. La contro-utilità è tanto maggiore, quanto più prossima è la rovina, e quanto più importante sarà la stessa. Come ci viene proposta, la contro-utilità della rovina può essere espressa mediante una formula simile a quella del limite superiore della probabilità di rovina. Modificando i parametri utilizzati nella definizione della contro-utilità si ha infine la possibilità di valutare la solvibilità di una impresa d'assicurazioni sotto aspetti distinti.

Summary

The criterion of the ruin probability has been conceived to measure the solvency of the insurance companies. Nevertheless, in the valuation of the risk, the mere probability of the dreaded event is not alone decisive: the length of the time interval till the fatidic moment as well as the importance of the eventual financial crash must be considered too. In order to take into account this fact, the author proposes in extension to the classical criterion of the ruin probability, to make use of the criterion of the counter-utility: the counter-utility is so much the greater when the ruin situation is near or the financial crash important. In the proposed formulation, the counter-utility of the ruin situation can be expressed in a formula, which is very similar to the one of the upper boundary of the ruin probability. By varying a parameter which occurs in the definition of the counter-utility, it is finaly possible to value the solvency of an insurance company under various conditions.