# La croissance plafonnée

Autor(en): **Hort, Michel**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **- (1981)**

Heft 1

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-550883

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

MICHEL HORT, Yverdon

# La croissance plafonnée

Considérons la fonction

$$y(x) = N \times e^{\frac{x-a}{b}} \tag{1}$$

Cette expression mathématique permet de décrire plusieurs *phénomènes de croissance*. En voici deux exemples typiques:

## 1 Croissance d'un capital placé à intérêts composés

Dans ce cas, $y(x)$ représente, comme on sait, le montant atteint par le capital à l'instant $x$, sachant qu'il valait $N$ à l'instant $a$ et que le taux instantané de l'intérêt, supposé invariable, est $\delta = \frac{1}{b}$ ou, si l'on préfère, que le taux annuel de l'intérêt est $i = e^{\frac{1}{b}} - 1$.

## 2 Croissance d'une population

La fonction (1) exprime alors ce qu'il est convenu d'appeler la *loi d'Euler*. $y(x)$ représente l'effectif d'une population à l'instant $x$ sachant que celle-ci comptait $N$ individus à l'instant $a$.

* * *

Si la quantité $x-a$ ne varie qu'entre des limites relativement étroites (de l'ordre de 20 à 30 ans dans les exemples ci-dessus), la fonction $y(x)$ donne une bonne description des phénomènes de croissance qu'elle entend représenter. En revanche, si l'on fait varier $x-a$ très largement, le fait que:

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty \tag{2}$$

est un obstacle à une bonne représentation du phénomène de croissance.
A la longue, en effet, il apparaît immanquablement des manifestations secondaires qui perturbent et, pour finir, freinent la croissance observée.
C'est pourquoi certains auteurs ont établi des *modèles de croissance plafonnée*.

La limite mentionnée sous (2) est remplacée, dans ces modèles, par la limite:

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = M \tag{3}$$

où $M$ est un nombre fini.
Historiquement, il semble que ce soit le mathématicien belge P. F. Verhulst qui, dans les années 1840–1850, a été le premier à proposer un modèle de croissance plafonnée pour les besoins de la démographie.
Le modèle de Verhulst, nommé aussi *modèle logistique*, a permis une bonne représentation mathématique de l'accroissement de la population en France de 1817 à 1831, en Belgique de 1815 à 1833 et dans le Comté d'Essex de 1811 à 1831. Encore, faut-il noter que, dans ces trois cas, les périodes en cause étaient relativement courtes pour justifier une croissance plafonnée.

* * *

Pour l'actuaire, l'étude des croissances plafonnées n'est pas sans doute dénuée d'intérêt. Notamment, dans les modèles de financement des caisses d'assurances sociales autres que celles travaillant en stricte capitalisation, il faut faire une hypothèse sur le renouvellement des assurés. Il est très fréquemment admis que le nombre des nouveaux assurés s'exprime par l'expression (1) citée plus haut. $y(x)$ est alors le nombre des entrées dans l'assurance pendant l'année $x$. Compte tenu des longues durées en jeu dans ce genre d'application, une telle hypothèse ne serait-elle pas, avec profit, remplacée par une croissance plafonnée? Nous nous sentons d'autant plus en droit de poser cette question qu'elle rejoint une préoccupation exprimée dans ce bulletin en 1929 déjà par E. Zwinggi. (cf. Beiträge zu einer Theorie des Bevölkerungswachstums mit einer Anwendung auf Sozialversicherungskassen, BAAS, cahier 24, août 1929, p. 95 et suivantes).

* * *

Ayant donc en vue, dans ce qui suit, essentiellement l'application aux caisses d'assurances sociales, nous nous limiterons au cas où la fonction $y(x)$ est strictement croissante, c'est-à-dire aux cas où:

$$x_1 < x_2 \quad \text{entraîne} \quad y(x_1) < y(x_2)$$

Nous donnons en annexe sept fonctions jouissant de cette propriété. Elles sont, à notre connaissance, les plus connues et les plus utilisées pour décrire les phénomènes présentant une croissance stricte.
Ces sept fonctions sont dérivables. On remarque de plus que ce sont des applications bijectives de

$$[x_0;\ +\infty]^{1} \quad \text{dans} \quad [0;\ M].$$

Elles dépendent toutes les sept des trois paramètres $M$, $a$ et $b$ qui y apparaissent chaque fois de manière analogue.

* * *

Si $T_1$, $T_2$ et $T_3$ sont les effectifs en croissance observés aux instants $x_1$, $x_2$ et $x_3$, les trois paramètres $M$, $a$ et $b$ mentionnés ci-dessus peuvent être obtenus théoriquement en résolvant le système de trois équations:

$$\begin{cases} y(x_1)=T_1 \\ y(x_2)=T_2 \\ y(x_3)=T_3. \end{cases}$$

Une telle résolution est cependant en général longue et laborieuse. C'est pourquoi nous exposons ci-après une méthode plus rapide, fondée sur une variable et une fonction auxiliaires. Naturellement cette méthode s'applique aussi à d'autres fonctions que celles citées, pour autant qu'elles jouissent des propriétés requises.

* * *

Introduisons d'abord la variable auxiliaire, soit $u$ telle que:

$$u=\frac{x-a}{b} \tag{4}$$

Cette variable auxiliaire apparaît comme le temps spécifique du phénomène, la formule (4) reliant ce temps spécifique au temps du calendrier. Ainsi:

1. $u$ est compté à partir d'une origine propre ($u=0$) située quand $x=a$.
2. $u$ a une vitesse d'écoulement propre. En effet:

   $b>1$ entraîne que le temps $u$ s'écoule $b$ fois plus lentement que le temps $x$,
   $b=1$ entraîne que les temps $u$ et $x$ s'écoulent à la même vitesse,
   $0<b<1$ entraîne que le temps $u$ s'écoule plus rapidement que le temps $x$,
   $b<0$ entraîne que le temps $u$ s'écoule «à l'envers» par rapport au temps «normal» $x$.

   Notons enfin que $b=0$ n'a pas de sens pour les développements qui nous intéressent.

* * *

[1] L'ensemble de départ peut être toute la droite numérique.

Introduisons maintenant la fonction auxiliaire $r(u)$ telle que:

$$y(x) = M \times r(u) \tag{5}$$

$r(u)$ représente, à l'instant $u$, l'effectif en croissance exprimé proportionnellement à la limite $M$.

Quatre remarques peuvent être faites au sujet de $r(u)$:

1. On observe facilement que:

$$\frac{dy(x)}{y(x)\,dx} = \frac{dr(u)}{r(u)\,du} \times \frac{du}{dx} = \frac{dr(u)}{r(u)\,du} \times \frac{1}{b} \tag{6}$$

   Autrement dit, les dérivées logarithmiques des fonctions $y(x)$ et $r(u)$ sont égales à une constante multiplicative près. Cette constante est l'inverse du paramètre $b$.

2. On remarque en outre que:

$$\frac{y(x_1)}{y(x_2)} = \frac{r(u_1)}{r(u_2)} \tag{7}$$

   Ce fait découle immédiatement de (5)

3. Par ailleurs, $r(u)$ est une application bijective de $[u_0;\ +\infty]$[1] dans $[0;\ 1]$; on peut donc écrire:

$$u = f(r) \tag{8}$$

4. De par ce qui précède, la dérivée logarithmique de $r(u)$ peut s'exprimer en fonction de $r$, soit donc:

$$\frac{dr(u)}{r(u)\,du} = v(r) \tag{9}$$

Finalement, les relations suivantes étant posées:

$$u_1 = \frac{x_1 - a}{b} = f(r_1) \qquad \mathrm{r}_1 = \frac{y(x_1)}{M} = \mathrm{r}_2\,\frac{y(x_1)}{y(x_2)}$$

$$u_2 = \frac{x_2 - a}{b} = f(r_2) \qquad r_2 = \frac{y(x_2)}{M}$$

On peut en tirer:

$$(u_2 - u_1) \times b = x_2 - x_1$$

[1] L'ensemble de départ peut être toute la droite numérique.

puis en raison des relations (6) à (9) mentionnées ci-dessus:

$$\left[f(r_2)-f\left(r_2\,\frac{y(x_1)}{y(x_2)}\right)\right]\frac{v(r_2)}{\dfrac{dy(x_2)}{y(x_2)\,dx}}=x_2-x_1 \tag{10}$$

Le modèle de croissance étant choisi, la forme des fonctions $f(r)$ et $v(r)$ est connue.
Si, en outre, les valeurs numériques $x_1$, $x_2$, $y(x_1)$, $y(x_2)$ et $\dfrac{dy(x_2)}{y(x_2)\,dx}$ sont données par l'observation du phénomène de croissance, la relation (10) est une équation où $r_2$ est l'inconnue.
La solution de cette équation est assez facile par essais successifs, et cela d'autant plus si l'on dispose de valeurs tabullées selon la présentation de l'annexe 2.
*Exemple: Croissance logistique ou de Verhulst.*
Les annexes 1 et 2 fournissent respectivement la forme des fonctions $f(r)$ et $v(r)$ et leurs valeurs numériques.

$$\textit{Données:}\ x_2-x_1=5 \text{ ans} \quad \frac{y(x_1)}{y(x_2)}=80\% \quad \frac{dy(x_2)}{y(x_2)\,dx}=4\%$$

Le 2e membre de la relation (10) vaut donc 5.

*1er essai:* $r_2=30\%$
$r_1=24\%$ $\quad u_1=f(r_1)=-1{,}152\,7$
$v(r_2)=70\%$ $\quad u_2=f(r_2)=-0{,}847\,3$

$$(-0{,}847\,3+1{,}152\,7)\times\frac{0{,}70}{0{,}04}=5{,}344\,5$$

$r_2=30\%$ ne convient donc pas.

*2e essai:* $r_2=50\%$
$r_1=40\%$ $\quad u_1=f(r_1)=-0{,}405\,5$
$v(r_2)=50\%$ $\quad u_2=f(r_2)=0$

$$(0+0{,}405\,5)\times\frac{0{,}50}{0{,}04}=5{,}07$$

$r_2=50\%$ convient à peu près; ce résultat pouvant naturellement être encore amélioré.

On peut donc dire qu'à l'instant $x_2$, la croissance avait atteint un peu plus que la moitié de sa valeur maximum, soit $M \cong 2 \times y(x_2)$.
La méthode permet encore de répondre à des questions telles que celle-ci:
Combien de temps faut-il pour que la croissance atteigne les 3/4 de sa valeur maximale $M$?
*Réponse:* On pose: $r_3 = 0{,}75$,
on a: $u_3 = f(0{,}75) = 1{,}098\,6$.
Le temps nécessaire sera donc de:

$$\frac{0{,}50}{0{,}04} \times (u_3 - u_2) = \textit{13 ans 9 mois}$$

L'auteur remercie M. Marc Chuard, assistant à l'Université de Lausanne, qui a collaboré à l'étude que l'on vient de lire.

*Michel Hort*
Jordils 13 bis
CH-1400 Yverdon

**Annexe 1**

1. *Croissance logistique ou de Verhulst*

$$y(x) = \frac{M}{1 + e^{-\frac{x-a}{b}}}$$

$$r(u) = \frac{1}{1 + e^{-u}} \qquad f(r) = \ln \frac{r}{1-r}$$

$$v(r) = 1 - r$$

2. *Croissance de Mitscherlich*

$$y(x) = M\left(1 - e^{-\frac{x-a}{b}}\right)$$

$$r(u) = 1 - e^{-u} \qquad f(r) = \ln \frac{1}{1-r}$$

$$v(r) = \frac{1-r}{r}$$

3. *Croissance de Johnson–Schumacher*

$$y(x) = M e^{-\frac{b}{x-a}}$$

$$r(u) = e^{-\frac{1}{u}} \qquad f(r) = -\frac{1}{\ln r}$$

$$v(r) = \left(\ln \frac{1}{r}\right)^2$$

4. *Croissance de Gompertz*

$$y(x) = M e^{-e^{-\frac{x-a}{b}}}$$

$$\mathrm{r}(u) = e^{-e^{-u}} \qquad f(r) = \ln \frac{1}{\ln \frac{1}{r}}$$

$$v(r) = \ln \frac{1}{r}$$

5. *Croissance «Gauss modifié»*

$$y(x) = M \left(1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}\right)$$

$$r(u) = 1 - e^{-u^2} \qquad f(r) = \left(\ln \frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v(r) = 2\,\frac{1-r}{r} \times [-\ln(1-r)]^{\frac{1}{2}}$$

6. *Croissance «Arc tangente»*

$$y(x) = \frac{M}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \text{arc } tg\, \frac{x-a}{b}\right)$$

$$r(u) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \text{arc } tg\, u\right) \qquad f(r) = tg\,\pi\left(r - \frac{1}{2}\right)$$

$$v(r) = \frac{1}{\pi r}\,\frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{\pi r}\,\frac{1}{1 + \left[tg\,\pi\left(r - \frac{1}{2}\right)\right]^2}$$

7. *Croissance «Amplitude hyperbolique»*

$$y(x)=\frac{M}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\text{arc sin}\left(tgh\,\frac{x-a}{b}\right)\right]$$

$$r(u)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\text{arc sin}\,(tgh\,u)\right]$$

$$f(r)=\text{Arg tgh}\left(\sin\pi\left(r-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$v(r)=\frac{1}{\pi r}\,\text{sech}\left(\text{Arg tgh}\left(\sin\pi\left(r-\frac{1}{2}\right)\right)\right)^{*}$$

**Annexe 2**

*Exemple de table de valeurs de $f(r)$ et de $v(r)$*

| Croissance logistique ou de Verhulst | | | Croissance de Mitscherlich | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | $f(r)$ | $v(r)$ | $r$ | $f(r)$ | $v(r)$ |
| 0.01 | −4.5951 | 0.9900 | 0.01 | 0.0101 | 99.0000 |
| .... | .... | .... | .... | .... | .... |
| 0.24 | −1.1527 | 0.7600 | 0.24 | 0.2744 | 3.1667 |
| .... | .... | .... | .... | .... | .... |
| 0.30 | −0.8473 | 0.7000 | 0.30 | 0.3567 | 2.3333 |
| .... | .... | .... | .... | .... | .... |
| 0.40 | −0.4055 | 0.6000 | 0.40 | 0.5108 | 1.5000 |
| .... | .... | .... | .... | .... | .... |
| 0.50 | 0.0000 | 0.5000 | 0.50 | 0.6931 | 1.0000 |
| .... | .... | .... | .... | .... | .... |
| 0.75 | 1.0986 | 0.2500 | 0.75 | 1.3863 | 0.3333 |
| .... | .... | .... | .... | .... | .... |
| 0.99 | 4.5951 | 0.0100 | 0.99 | 4.6052 | 0.0101 |

Pour les sept types de croissance, des tables donnant $f(r)$ et $v(r)$ pour $r$ variant de 0 à 1 par accroissements de 0.01 ont été établies par M. Marc Chuard. Des photocopies peuvent en être adressées à tout intéressé.

* $\text{sech}\,t=\dfrac{1}{\cosh t}$.

## Résumé

Lorsqu'une quantité croît en fonction du temps avec la condition de tendre, après une durée infiniment longue, vers une valeur finie $M$, il se pose la question d'estimer cette valeur $M$ à partir de données obtenues pendant une durée d'observation finie. L'article étudie ce problème lorsque certaines conditions auxiliaires sont remplies.

## Zusammenfassung

Falls eine Grösse mit der Zeit wächst, und zwar so, dass sie schliesslich gegen einen endlichen Grenzwert $M$ strebt, dann stellt sich das Problem der Schätzung von $M$ aufgrund der bis dato beobachteten Werte. Die vorliegende Arbeit behandelt diese Frage unter der Voraussetzung, dass gewisse zusätzliche Bedingungen erfüllt sind.

## Summary

If a quantity increases in time such that it finally converges to a finite limit $M$, we are confronted with the problem of estimating $M$ on the basis of observed values of the said function. The paper studies this question for cases where some additional auxiliary conditions are fulfilled.