# Berechnung der maximalen Stop-Loss-Prämie, wenn die ersten drei Momente der Schadenverteilung gegeben sind

Autor(en): **Mack, Thomas**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **- (1985)**

Heft 1

PDF erstellt am: **06.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967061

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

THOMAS MACK, München

# Berechnung der maximalen Stop-Loss-Prämie, wenn die ersten drei Momente der Schadenverteilung gegeben sind

## Einleitung und Überblick

Bei der Tarifierung von Schadenexzedenten- und Stop-Loss-Verträgen befindet sich der Rückversicherer oft in der Situation, dass nur wenige Schäden der Statistik oberhalb der Priorität liegen (Priorität = Betrag, ab dem die Leistungspflicht des Rückversicherers beginnt). Dann bleibt es fraglich, ob eine an die Schadendaten angepasste Verteilungsfunktion auch in dem für die Tarifierung wichtigen Bereich oberhalb der Priorität als zutreffend betrachtet werden kann. Vielfach enthalten die Quotierungsunterlagen sogar nur die Höhe der Schäden, die mindestens 50% der Priorität überstiegen haben. Dies können so wenige Schäden sein, dass eine sinnvolle Verteilungsanpassung gar nicht möglich ist. Dann muss man in der Praxis die Nettoprämie aus dem Burning Cost (= beobachtete Schadenerfahrung) zuzüglich eines gegriffenen Sicherheitszuschlags berechnen oder versuchen, die Schadenerfahrung anderer Portefeuilles auf das zu tarifierende Portefeuille zu übertragen (Exposure-Quotierung, vgl. dazu *Gerathewohl*, 1976, Seite 328ff., bzw. Credibility-Verfahren von *Bühlmann/Straub*, 1970).

Diese Problematik war auch Thema einer Tagung der schweizerischen ASTIN-Gruppe am 11. Mai 1982 (*Gisler*, 1982). Den Referenten war dabei folgende Aufgabe gestellt worden:

Anhand einer Schadenstatistik mit 41 013 Schäden soll der Erwartungswert $E(X-w)^+$ der die Priorität $w = 1\,000\,000$ übersteigenden Schadenhöhe $X$ geschätzt werden. Nur ein einziger der 41 013 Schäden überstieg diese Priorität; er betrug 1 238 000.

Ein mögliches Verfahren in dieser Situation ist die Anwendung der Theorie der maximalen Stop-Loss-Prämien, was auf der Tagung auch von einem der Referenten (Prof. *Gerber*) vorgeschlagen wurde. Dabei werden gewisse Parameter (z. B. Mittelwert $\bar{x}$ und Streuung $s^2$) aus der Schadenstatistik ermittelt und dann diejenige Schadenverteilung $X$ gesucht, die unter allen Schadenverteilungen mit diesen vorgegebenen Parametern den maximalen Wert für $E(X-w)^+$ – maximale Stop-Loss-(Netto-)Prämie genannt – liefert, also (z. B.)

$$\sup_X \{E(X-w)^+ : X>0,\ E(X)=\bar{x},\ \mathrm{Var}(X)=s^2\}.$$

Dieser spezielle Fall, wo $\bar{x}$ und $s^2$ vorgegeben sind, wurde von *Bowers* (1969) gelöst, der zeigte, dass dann stets

$$E(X-w)^+ \leq (\sqrt{(w-\bar{x})^2+s^2}-w+\bar{x})/2$$

gilt, und dass diese Schranke auch erreicht wird, wenn $X$ eine Zweipunktverteilung ist und $w \geq (s^2+\bar{x}^2)/(2\bar{x})$ gilt. Eine scharfe Schranke im Fall $w<(s^2+\bar{x}^2)/(2\bar{x})$ wurde von *De Vylder/Goovaerts* (1982) angegeben. Bei der genannten Schadenstatistik war $\bar{x}=3\,102$, $s=19\,000$, so dass sich für $w=1\,000\,000$ die Schranke

$$E(X-w)^+ \leq 90{,}5$$

ergab. Eine auf dieser Schranke basierende Schadenexzedenten-Prämie von $90{,}5 \times 41\,013 = 3\,700\,000$ ist jedoch angesichts des Burning Cost von 238 000 in der Praxis kaum plausibel zu machen.

Andererseits ist klar, dass bei zusätzlicher Vorgabe des dritten oder weiterer Nullpunktmomente der Schadenstatistik die maximale Stop-Loss-Prämie den Burning Cost immer mehr annähert. *Taylor* (1977) hat gezeigt, dass bei Vorgabe der $m$ ersten Momente $E(X), \ldots, E(X^m)$ die maximale Stop-Loss-Prämie durch eine $(m+1)$-Punkt-Verteilung geliefert wird (zumindest bei Verteilungen mit beschränktem Wertebereich $[0, M]$). *Heilmann* (1978) zeigte, wie mit Hilfe der linearen Programmierung auch eine obere Schranke für $E(X-w)^+$ ermittelt werden kann. Seither sind sehr viele Arbeiten auf diesem Gebiet erschienen, deren hauptsächliches Ziel es war, unter verschiedenen Annahmen explizite Formeln für diese Schranken anzugeben. Im wesentlichen ist dies gelungen in den Fällen, wo die Annahmen sich neben $E(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$ auch auf den Median, die Überschreitungswahrscheinlichkeit $p(X \geq z)$, die Unimodalität oder die Symmetrie der Verteilung beziehen (vgl. *Goovaerts/De Vylder/Haezendonck*, 1984, S. 290ff.).

Doch für den Fall, dass die ersten drei Momente gegeben sind, ist bis jetzt keine explizite Formel für die maximale Stop-Loss-Prämie veröffentlicht worden. Aber gerade dieser Fall ist angesichts des obigen Beispiels für die Praxis interessant, zumal der Praktiker auch bei sehr ungenügenden statistischen Daten oft aus der Kenntnis ähnlicher Portefeuilles ein gutes Gefühl für die Höhe des

Variationskoeffizienten und der Schiefe hat. Zwar kann jeder einzelne solche Fall mit Hilfe der linearen Programmierung numerisch gelöst werden, doch ist der Vorteil einer direkten Formel unverkennbar. Eine solche Formel wird in dieser Arbeit hergeleitet für den in der Praxis relevanten Fall, dass die Priorität genügend hoch ist. Die Formel ist auch dann anwendbar, wenn die gegebenen drei Momente nicht auf einer vollständigen Schadenstatistik beruhen, sondern nur auf den Schäden oberhalb einer gewissen Grenze, wie das in der Praxis häufig der Fall ist. In der Praxis wird man diese Formel hauptsächlich zur Berechnung des Schwankungszuschlags bei nichtproportionalen Deckungen einsetzen, und zwar insbesondere dann, wenn in der zugehörigen Schadenstatistik mögliche Grosschäden nicht ausreichend repräsentiert erscheinen.

**Lösungsidee**

Gegeben seien also die Priorität $w>0$ und die ersten drei Nullpunktmomente $m_1$, $m_2$, $m_3$ einer (ansonsten unbekannten) Schadenverteilung auf $R=[r,s)$ mit $0\leq r<w<s\leq\infty$. Sei $S_R$ die Menge aller Verteilungsfunktionen $F$ auf $R$ mit

$$\int_r^s t^k dF(t)=m_k \qquad \text{für } k=1,2,3.$$

Gesucht ist die maximale Stop-Loss-Prämie

$$M_{w,R}(m_1,m_2,m_3)=\sup_{F\in S_R}\int_r^s (t-w)^+ dF(t),$$

wobei $(t-w)^+=\max(0,t-w)$. Wenn es ein kubisches Polynom

$$g_{w,R}(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$$

mit

$$g_{w,R}(t)\geq(t-w)^+ \qquad \text{für alle } t\in R$$

gibt, so liefert es wegen

$$\begin{aligned}\int_r^s (t-w)^+ dF(t)&\leq\int_r^s (a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3)dF(t)\\&=a_0+a_1m_1+a_2m_2+a_3m_3 \qquad \text{für alle } F\in S_R\end{aligned}$$

eine (evtl. noch nicht optimale) obere Schranke

$$B(g_{w,R}):=a_0+a_1m_1+a_2m_2+a_3m_3\geq M_{w,R}(m_1,m_2,m_3)$$

für die maximale Stop-Loss-Prämie. Berührt das Polynom $g_{w,R}$ den Stop-Loss-Integranden $(t-w)^+$ in zwei Punkten $x, y \in R$, und gibt es eine Zweipunktverteilung $G \in S_R$ auf diesen beiden Punkten, so gilt

$$g_{w,R}(t) = (t-w)^+ \quad \text{auf } R \; G\text{-fast überall},$$

$$\int_r^s (t-w)^+ \, dG(t) = \int_r^s g_{w,R}(t) \, dG(t),$$

und daher ist

$$M_{w,R}(m_1, m_2, m_3) = B(g_{w,R}).$$

Einen analogen Lösungsansatz verwandte auch schon *Bowers* bei seinem Beweis. In allgemeinerer Form ist dieser Ansatz bei *Heilmann* (1981, Satz 6) angegeben, der dort einen Satz von *Krein* und *Nudelmann* über das Markovsche Momentenproblem zitiert. Jedoch ist die Existenz des geforderten Polynoms $g_{w,R}$ nicht immer gesichert. Zum Beispiel gibt es im Falle von nur zwei gegebenen Momenten für $w < m_2/(2m_1)$ (und $R = [0, \infty)$) kein solches Polynom (Parabel), d.h. die Abschätzung von *Bowers* ist dann nicht mehr scharf. Bei drei vorgegebenen Momenten kommt man ausserdem nur für einen relativ kleinen Bereich von Prioritäten mit einer Zweipunktverteilung aus, wie Satz 1 zeigt. In Satz 2 wird gezeigt, wie man den interessierenden Fall höherer Prioritäten mit einer Dreipunktverteilung lösen kann, deren kleinstes Atom in $r$ liegt (denn das Polynom $g_{w,R}$ kann allenfalls noch einen Randpunkt mit dem Stop-Loss-Integranden $(t-w)^+$ gemeinsam haben, vgl. Figur 1). Dabei ist ein nichtlineares Gleichungssystem mit 9 Unbekannten zu lösen, das letztlich auf eine kubische Gleichung reduziert werden kann. Mittels geometrischer Überlegungen kann dann gezeigt werden, dass stets eine zulässige Lösung existiert. Nachdem kubische Gleichungen mittels der Formel von *Cardano* oder mit Hilfe eines programmierbaren Taschenrechners gelöst werden können, bereitet die Berechnung der maximalen Stop-Loss-Prämie keine grosse Mühe mehr. In Satz 3 wird schliesslich noch gezeigt, wie im Fall, dass der Wertebereich $R$ der zugelassenen Verteilungen endlich ist, das Problem auch für einen Bereich niedriger Prioritäten gelöst werden kann, und zwar mit Dreipunktverteilungen mit grösstem Atom in $s$.

**Resultate**

Bei Formulierung und Beweis der Resultate spielt eine aus den Momenten $m_1$, $m_2$, $m_3$ berechnete Zweipunktverteilung eine wichtige Rolle:

**Satz 0:**
Seien $m_1$, $m_2$, $m_3$ reelle Zahlen mit $b^2 := m_2 - m_1^2 > 0$ und sei $c = (m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3)/b^3$ (sind $m_1, m_2, m_3$ die ersten drei Momente einer Verteilung, so ist $b$ die Standardabweichung und $c$ die Schiefe). Dann gibt es genau eine Zweipunktverteilung $Z$ mit

$$EZ = m_1, \quad EZ^2 = m_2, \quad EZ^3 = m_3.$$

$Z$ hat die Atome

$$u = m_1 - (\sqrt{4+c^2} - c)b/2$$

$$v = m_1 + (\sqrt{4+c^2} + c)b/2$$

und die Wahrscheinlichkeitsgewichte

$$p_1 = (1 + c/\sqrt{4+c^2})/2 \quad \text{auf } u$$

$$p_2 = (1 - c/\sqrt{4+c^2})/2 \quad \text{auf } v.$$

Sind $m_1, m_2, m_3$ die Momente einer Verteilung auf einem Intervall $[r, s]$, so gilt $r \leq u < v \leq s$.
Beweis: Das Gleichungssystem

$$p_1 + p_2 = 1 \tag{1}$$

$$p_1 u + p_2 v = m_1 \tag{2}$$

$$p_1 u^2 + p_2 v^2 = m_2 \tag{3}$$

$$p_1 u^3 + p_2 v^3 = m_3 \tag{4}$$

ist zu lösen. Aus (2) und (3) ergibt sich durch Elimination von $u$ die quadratische Gleichung

$$p_2 v^2 - 2p_2 m_1 v + m_1^2 - p_1 m_2 = 0$$

und daraus

$$v = m_1 \pm \sqrt{(m_2 - m_1^2)p_1/p_2}$$

$$u = m_1 \mp \sqrt{(m_2 - m_1^2)p_2/p_1}.$$

Wegen $u < v$ kann nur das jeweils obere Vorzeichen vor der Wurzel zutreffen. Aus der Definition von $c$ errechnet man

$$c = (p_1 - p_2)/\sqrt{p_1 p_2}.$$

Daraus folgen die im Satz behaupteten Formeln für $p_1$, $p_2$ sowie

$$\sqrt{p_1/p_2}=(\sqrt{4+c^2}+c)/2$$

$$\sqrt{p_2/p_1}=(\sqrt{4+c^2}-c)/2.$$

Für später ist noch folgendes festzuhalten: Man hätte auch aus den Gleichungen (1)–(4) zunächst $p_1$, $p_2$ vollständig eliminieren können. Dann hätte man für $u$ (und ebenso für $v$) die quadratische Gleichung

$$(m_2-m_1^2)u^2+(m_1m_2-m_3)u+m_1m_3-m_2^2=0 \tag{5}$$

erhalten. $u$, $v$ sind also gerade die Nullstellen dieser Gleichung.
Schliesslich ist noch zu zeigen, dass $r\leq u<v\leq s$ gilt, falls $m_1$, $m_2$, $m_3$ die Momente einer Verteilung auf $[r, s]$ sind. Zunächst gilt für jede Verteilung $W$ auf $[0, +\infty)$ die Beziehung $m_1m_3\geq m_2^2$; dies folgt aus der Schwarzschen Ungleichung mit $X=\sqrt{W}$, $Y=X^3$. Weiterhin rechnet man nach, dass diese Beziehung gerade notwendig und hinreichend für $u(W)\geq 0$ ist, wobei $u(W)$ das kleinere Atom der aus den ersten drei Momenten von $W$ berechneten Zweipunktverteilung bezeichnet. Hätte man nun eine Verteilung $T$ auf $[r, s]$ mit $u(T)<r$, so ergäbe sich für die verschobene Verteilung $T-r$ auf $[0,\infty)$ der Widerspruch

$$0\leq u(T-r)=u(T)-r<0.$$

Analog beweist man auch $v\leq s$, denn für jede Verteilung auf $(-\infty, 0]$ gilt ebenfalls $m_1m_3\geq m_2^2$, was gleichbedeutend mit $v\leq 0$ ist.

*Hilfssatz 1:*
Seien $z>y>x\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ gegeben. Der einzige Punkt $w\in\mathbb{R}$ mit $y<w<z$, zu dem es ein kubisches Polynom

$$g_w(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$$

gibt, so dass

(i) $g_w$ die Abszisse in $y$ berührt,

(ii) $g_w$ die Gerade $(t-w)$ in $z$ berührt,

(iii) $g_w(t)\geq(t-w)^+$ genau für alle $t\geq x$ gilt,

ist gegeben durch

$$w=(2z^2-xy-xz)/(3z-y-2x). \tag{6}$$

Beweis: Die Bedingungen (i) ind (ii) sind gleichbedeutend mit dem System

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 = 0 \tag{7}$$

$$a_1 + 2 a_2 y + 3 a_3 y^2 = 0 \tag{8}$$

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 = z - w \tag{9}$$

$$a_1 + 2 a_2 z + 3 a_3 z^2 = 1. \tag{10}$$

Dieses lineare Gleichungssystem für $a_0, a_1, a_2, a_3$ hat eine von Null verschiedene Determinante $(z-y)^4$ und daher die einzige Lösung

$$a_3 = (2w - z - y)/(z-y)^3 \tag{11}$$

$$a_2 = ((z-y)^{-1} - 3 a_3 (y+z))/2 \tag{12}$$

$$a_1 = -2 a_2 y - 3 a_3 y^2 \tag{13}$$

$$a_0 = -a_1 y - a_2 y^2 - a_3 y^3. \tag{14}$$

Der Fall $x = -\infty$, d.h. $a_3 = 0$ (iii), d.h. $w = (y+z)/2$, ist trivial. Für $x > -\infty$ folgt aus Bedingung (iii), dass in $x$ eine dritte (einfache) Nullstelle von $g_w$ liegt, d.h.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0. \tag{15}$$

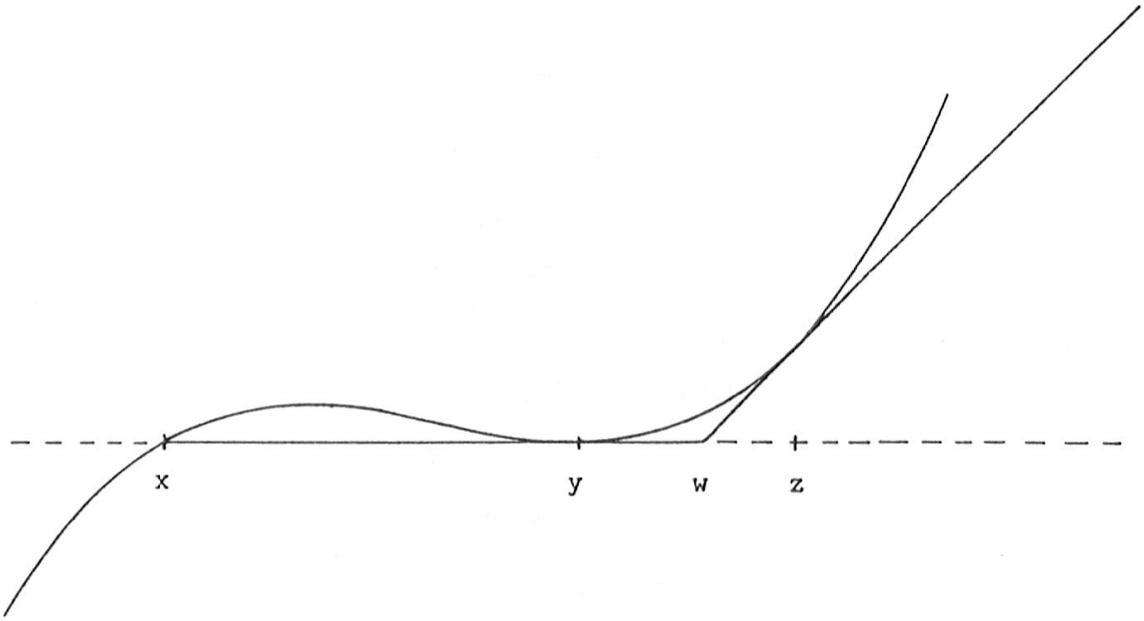
Subtraktion von (7) und Division durch $y - x$ ergibt

$$a_1 + a_2 (x+y) + a_3 (x^2 + xy + y^2) = 0.$$

Einsetzen von (12) und (13) liefert

$$a_3 = (z-y)^{-1} (3z - y - 2x)^{-1}. \tag{16}$$

Aus (11) und (16) folgt (6) als notwendige Bedingung. Umgekehrt sind für $w$ gemäss (6) und $g_w$ gemäss (11)–(14) die Bedingungen (i) und (ii) per definitionem erfüllt. Auch $y < w < z$ ergibt sich direkt aus der Definition (6). Ausserdem gilt (16) und damit (15), also $g_w(x) = 0$, und es ist $a_3 > 0$. $g_w$ muss daher die in Figur 1 dargestellte Lage haben, d.h. auch (iii) ist erfüllt.




Figur 1

*Hilfssatz 2:*
Seien $y<z<x\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ gegeben. Der einzige Punkt $w\in\mathbb{R}$ mit $y<w<z$, zu dem es ein kubisches Polynom

$$g_w(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$$

gibt, so dass

(i) $g_w$ die Abszisse in $y$ berührt,

(ii) $g_w$ die Gerade $(t-w)$ in $z$ berührt,

(iii) $g_w(t)\geq(t-w)^+$ genau für alle $t\leq x$ gilt,

ist gegeben durch

$$w=(xy+xz-2y^2)/(2x+z-3y). \tag{17}$$

Beweis: Analog zu Hilfssatz 1 (Spiegelung an der Ordinate und Drehung um 45° ergibt genau die Situation von Hilfssatz 1): Die Bedingungen (i) und (ii) sind identisch mit denen von Hilfssatz 1 und liefern daher dasselbe Gleichungssystem (7)–(10) mit den Lösungen (11)–(14). Der Fall $x=+\infty$ ist wieder trivial. Für $x<+\infty$ folgt aus (iii) $g_w(x)=x-w$, d.h.

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=x-w. \tag{18}$$

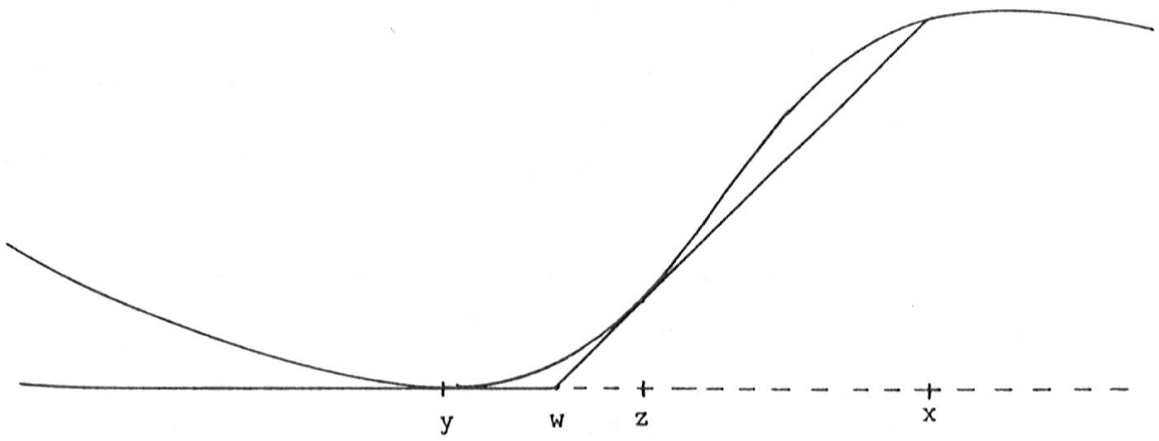
Subtrahiert man hiervon (9) und dividiert durch $x-z$, so erhält man

$$a_1+a_2(x+z)+a_3(x^2+xz+z^2)=1.$$

Einsetzen von (12) und (13) liefert

$$a_3=(z-y)^{-1}(3y-z-2x)^{-1}. \tag{19}$$

Zusammen mit (11) ergibt dies (17).
Umgekehrt sind für $w$ gemäss (17) und $g_w$ gemäss (7)–(10) die Bedingungen (i) und (ii) per definitionem erfüllt. Auch $y<w<z$ ergibt sich direkt aus der Definition (17).
Ausserdem gilt (19) und damit (18), d.h. es ist $g_w(x)=x-w$ und $a_3<0$. Daher muss $g_w$ die in Figur 2 dargestellte Lage haben, d.h. auch (iii) ist erfüllt.




Figur 2

**Satz 1:**
Seien $m_1$, $m_2$, $m_3$ und $u$, $v$, $p_2$ wie in Satz 0. Für $r<u$, $s>v$ und

$$w\in\left[\frac{s(u+v)-2u^2}{2s+v-3u},\frac{2v^2-r(u+v)}{3v-u-2r}\right] \tag{20}$$

ist die maximale Stop-Loss-Prämie auf $R=(r,s)$ zur Priorität $w$ und den Momenten $m_1$, $m_2$, $m_3$ gegeben durch

$$M_{w,R}(m_1,m_2,m_3)=p_2(v-w).$$

Die Werte $r=-\infty$ oder $s=+\infty$ sind zulässig. Im endlichen Fall kann das Intervall $R$ auch halboffen oder geschlossen sein.

Beweis: Es gilt

$$u < \frac{s(u+v)-2u^2}{2s+v-3u} \leq \frac{u+v}{2} \leq \frac{2v^2-r(u+v)}{3v-u-2r} < v,$$

d.h. das Intervall für $w$ ist nichtleer und $p_2(v-w)$ ist die Stop-Loss-Prämie der Zweipunktverteilung auf $u$, $v$ zur Priorität $w$. Dies ist auch die maximale Stop-Loss-Prämie auf $R$, wenn es ein kubisches Polynom $g_w$ gibt mit $g_w(t) \geq (t-w)^+$ für alle $t \in R$ und $g_w(t) = (t-w)^+$ für $t=u$ und $t=v$.
Sei $x \leq r$, so gibt es nach Hilfssatz 1 zu $x<u<v$ ein solches Polynom $g_w$ für $w=(2v^2-xu-xv)/(3v-u-2x)$. Da $w$ hierbei eine strikt wachsende Funktion von $x$ ist, ergibt sich aus den möglichen Werten $[-\infty, r]$ für $x$ entsprechend das Intervall

$$\left[\frac{u+v}{2}, \frac{2v^2-r(u+v)}{3v-u-2r}\right]$$

für $w$. Sei nun noch $z \geq s$, so gibt es nach Hilfssatz 2 zu $u<v<z$ ein Polynom $g_w$ der gewünschten Art, wenn $w=(uz+vz-2u^2)/(2z+v-3u)$ gilt, wobei $w$ ebenfalls eine strikt wachsende Funktion von $z$ ist. Aus den Werten $[s, +\infty]$ für $z$ ergibt sich daher das Intervall

$$\left[\frac{s(u+v)-2u^2}{2s+v-3u}, \frac{u+v}{2}\right]$$

für $w$. Man sieht, dass $r=u$ und/oder $s=v$ sein darf, wenn $R$ und das sich insgesamt ergebende Intervall (20) für $w$ rechts und/oder links offen sind.
Zur numerischen Kontrolle kann die maximale Stop-Loss-Prämie auch mittels

$$B(g_w) = a_0 + a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3$$

berechnet werden, wobei die Koeffizienten $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ gemäss (11)–(14) mit $z=v$ und $y=u$ zu ermitteln sind.

*Hilfssatz 3:*
Seien $m_1, m_2, m_3$ und $u$, $v$ wie in Satz 0. Damit es eine echte Dreipunktverteilung mit den ersten drei Nullpunktmomenten $m_1, m_2, m_3$ gibt, sind für die Atome $x<y<z$ die Bedingungen $x<u$, $z>v$ und

$$y = h(x,z) := \frac{m_2(x+z) - m_1 xz - m_3}{(z-m_1)(m_1-x) - (m_2 - m_1^2)} \tag{21}$$

notwendig und hinreichend. Der Nenner von $h$ ist für $x<u$, $z\geq v$ oder $x\leq u$, $z>v$ ungleich Null und es gilt $h(x,v)=u$ für alle $x<u$ und $h(u,z)=v$ für alle $z>v$ sowie $u<h(x,z)<v$ für alle $x<u$, $z>v$. Für die Gewichte $q_1$, $q_2$, $q_3$, auf $x$, $y$, $z$ gilt

$$q_1=(m_2-m_1(y+z)+yz)/((z-x)(y-x)) \tag{22}$$

$$q_2=(-m_2+m_1(x+z)-xz)/((z-y)(y-x)) \tag{23}$$

$$q_3=(m_2-m_1(x+y)+xy)/((z-y)(z-x)). \tag{24}$$

Beweis: Für die Dreipunktverteilung muss gelten

$$q_1+q_2+q_3=1 \tag{25}$$

$$q_1x+q_2y+q_3z=m_1 \tag{26}$$

$$q_1x^2+q_2y^2+q_3z^2=m_2 \tag{27}$$

$$q_1x^3+q_2y^3+q_3z^3=m_3. \tag{28}$$

Die Gleichungen (25)–(27) sind ein lineares Gleichungssystem für die Gewichte $q_1$, $q_2$, $q_3$. Es hat die Determinante $(z-y)(z-x)(y-x)$ und daher die einzige Lösung (22)–(24). Aus (28) folgt zusammen mit (23)–(25)

$$xyz-m_1(xy+yz+xz)+m_2(x+y+z)-m_3=0. \tag{29}$$

Umgekehrt folgt aus (22)–(24) und (29) auch die Gültigkeit von (25)–(28). $q_1$, $q_2$, $q_3$ sind wegen (25) genau dann Gewichte einer echten Dreipunktverteilung, wenn sie positiv sind, d.h. wenn

$$y>(m_1z-m_2)/(z-m_1) \qquad (q_1>0) \tag{30}$$

$$y<(m_2-m_1x)/(m_1-x) \qquad (q_3>0) \tag{31}$$

$$x<(m_1z-m_2)/(z-m_1) \qquad (q_2>0). \tag{32}$$

(32) ist gleichbedeutend mit

$$z>(m_2-m_1x)/(m_1-x). \tag{33}$$

Wegen der Bedingungen (32) und (33) kann (29) in der Form

$$\begin{aligned} y&=\frac{(m_2-m_1x)z-(m_3-m_2x)}{(m_1-x)z-(m_2-m_1x)}\\ &=\frac{(m_1z-m_2)x-(m_2z-m_3)}{(z-m_1)x-(m_1z-m_2)}\\ &=h(x,z) \end{aligned} \tag{34}$$

geschrieben werden, d.h. bei festem $x$ (bzw. $z$) liegen $z$, $y$ (bzw. $x$, $y$) auf einer Hyperbel $h(x, \ )$ (bzw. $h(\ , z)$), und zwar wegen (31) und (33) in deren rechtem unterem Asymptotenquadranten (bzw. wegen (30) und (32) in deren linkem oberem Asymptotenquadranten). Die Hyperbel hat genau dann in diesem Quadranten einen Ast, wenn ihre Diskriminante $D(x)$ (bzw. $D(z)$) positiv ist, wobei

$$\begin{aligned} D(x) &= -(m_2 - m_1 x)^2 + (m_1 - x)(m_3 - m_2 x) \\ &= (m_2 - m_1^2)x^2 + (m_1 m_2 - m_3)x + m_1 m_3 - m_2^2. \end{aligned}$$

Die Nullstellen von $D$ sind nach der Bemerkung zu (5) im Beweis von Satz 0 gerade $u$ und $v$. Die Diskriminante ist also genau dann positiv, wenn $x < u$ oder $x > v$ gilt (bzw. $z < u$ oder $z > v$).
Der Fall $x > v$ scheidet wegen

$$m_1 = q_1 x + q_2 y + q_3 z > x > v > m_1$$

aus; analog scheidet auch der Fall $z < u$ aus. Die Bedingungen $x < u$ und $z > v$ sind also neben (21) $\equiv$ (34) notwendig.
Umgekehrt ist für $x < u$, $z \geq v$ oder $x \leq u$, $z > v$ die Definition (21) für $y$ sinnvoll, da der Nenner von $h$ wegen (vgl. dazu Satz 0)

$$(z - m_1)(m_1 - x) > (v - m_1)(m_1 - u) = b^2 = m_2 - m_1^2$$

ungleich Null ist. $h$ definiert also Hyperbeln (34), die wie dort eine positive Diskriminante, also strikt wachsende Äste haben. Da man ausserdem mit Hilfe der Schreibweisen (34) und den Momentenbedingungen (Gleichungen (2)–(4) von Satz 0) für $u$ und $v$ nachrechnet, dass $h(x, v) = u$ und $h(u, z) = v$ gilt, folgt aus der Monotonie von $h(x, \ )$ bzw. $h(\ , z)$ schliesslich $u < h(x, z) < v$ für $x < u$, $z > v$, und somit $x < y < z$. Wegen

$$z > v = (m_2 - m_1 u)/(m_1 - u) > (m_2 - m_1 x)/(m_1 - x),$$

$$x < u = (m_1 v - m_2)/(v - m_1) < (m_1 z - m_2)/(z - m_1)$$

folgt, dass $(z, y)$ auf dem rechten unteren Ast von $h(x, \ )$ bzw. dass $(x, y)$ auf dem linken oberen Ast von $h(\ , z)$ liegt. Daher sind die Ungleichungen (30)–(32) erfüllt und die Gleichungen (22)–(24) definieren tatsächlich Gewichte, die (25)–(28) erfüllen.

**Satz 2:**
Seien $m_1, m_2, m_3, u, v$ wie in Satz 0, $h$ wie in Hilfssatz 3 und $r<u$, $s>v$, $\tilde{y}=h(r,s)$. Dann ist für

$$w \in \left( \frac{2v^2 - r(u+v)}{3v-u-2r}, \frac{2s^2 - r(\tilde{y}+s)}{3s-\tilde{y}-2r} \right)$$

die maximale Stop-Loss-Prämie auf $R=[r,s)$ zur Priorität $w$ und den Momenten $m_1$, $m_2$, $m_3$ gegeben durch

$$M_{w,R}(m_1, m_2, m_3) = q_3(z-w),$$

wobei $z$ die grösste (oder einzige) reelle Lösung der kubischen Gleichung

$$A_r z^3 + B_r z^2 + C_r z + D_r = 0 \tag{35}$$

$$A_r = 2(m_1 - r)$$

$$B_r = -2(m_2 - m_1 r) - (r+3w)(m_1 - r)$$

$$C_r = 2w(2m_2 - m_1 r - r^2)$$

$$D_r = -(m_3 - m_2 r)(w-r) - 2rw(m_2 - m_1 r)$$

ist und $q_3$ berechnet wird aus

$$q_3 = (m_2 - m_1(r+y) + ry)/((z-y)(z-r)) \tag{36}$$

$$y = h(r,z) = (-2z^2 + (r+3w)z - 2rw)/(w-r). \tag{37}$$

Der Wert $s=+\infty$ ist zulässig; bei endlichem $s$ gilt der Satz auch für das geschlossene Intervall $[r,s]$, wobei dann auch das Intervall für $w$ rechts geschlossen sein kann.
Beweis: Nach Hilfssatz 3 gibt es auf jedem Tripel $r<y<z$ mit $z>v$ und $y=h(r,z)$ eine echte Dreipunktverteilung zu den Momenten $m_1, m_2, m_3$. Nach Hilfssatz 1 gibt es zu jedem solchen Tripel $r<y<z$ ein $w$ mit $y<w<z$ und ein kubisches Polynom $g_w$ mit $g_w(t) \geq (t-w)^+$ für alle $t \geq r$, $g_w(t) = (t-w)^+$ für $t \in \{r, y, z\}$, wenn

$$w = (2z^2 - ry - rz)/(3z - y - 2r) \tag{38}$$

gilt.
In (38) ist $w$ unter Beachtung von $y=h(r,z)$ eine strikt wachsende Funktion von $z$, da ihre Ableitung nach $z$

$$w' = 2\{3(z-y)^2 + 4(z-y)(y-r) + (y-r)^2 + (z-r)^2 y'\}/(3z-y-2r)^2$$

positiv ist. Aus den möglichen Argumentwerten $(v,s)$ für $z$ ergibt sich daher unter Verwendung von $h(r,v)=u$ das behauptete Intervall für $w$.

Wegen der Existenz des Polynoms $g_w$ ist die maximale Stop-Loss-Prämie zur Priorität $w$ durch die Dreipunktverteilung auf $r$, $y$, $z$ gegeben und beträgt $q_3(z-w)$ mit $q_3$ gemäss (36). Für festes $w$ besagt (38), dass die Atome $z$, $y$ auf der Parabel

$$y=(-2z^2+(r+3w)z-2rw)/(w-r) \tag{39}$$

liegen müssen, und zwar dort, wo sie die Hyperbel $y=h(r,z)$ trifft, auf der $z$, $y$ ja ebenfalls liegen. Dies ergibt die Gleichungen (37) und (35). Dass $z$ die grösste (oder einzige) reelle Nullstelle von (35) ist, folgt daraus, dass $z$, $y$ sowohl bei der Hyperbel $h(r,\ )$ als auch bei der Parabel (39) jeweils auf dem rechten Ast liegen. Letzteres wurde für die Hyperbel in Hilfssatz 3 gezeigt; für die Parabel folgt dies daraus, dass die $z$-Koordinate $(r+3w)/4$ des Scheitels kleiner als $w$ und damit auch kleiner als $z$ ist. Die beiden Äste schneiden sich nur einmal, da der Hyperbelast wachsend, der Parabelast fallend ist.
Zur numerischen Kontrolle kann die maximale Stop-Loss-Prämie auch mittels

$$B(g_w)=a_0+a_1m_1+a_2m_2+a_3m_3$$

berechnet werden, wobei die Koeffizienten $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ gemäss (11)–(14) zu ermitteln sind.

**Satz 3:**
Seien $m_1, m_2, m_3, u, v$ wie in Satz 0, $h$ wie in Hilfssatz 3 und $r<u$, $s>v$, $\tilde{y}=h(r,s)$. Dann ist für

$$w\in\left(\frac{s(r+\tilde{y})-2r^2}{2s+\tilde{y}-3r},\ \frac{s(u+v)-2u^2}{2s+v-3u}\right)$$

die maximale Stop-Loss-Prämie auf $R=(r,s]$ zur Priorität $w$ und den Momenten $m_1$, $m_2$, $m_3$ gegeben durch

$$M_{w,R}(m_1,m_2,m_3)=q_2(y-w)+q_3(s-w)$$

wobei

$$q_2=(-m_2+m_1(x+s)-xs)/((s-y)(y-x)) \tag{40}$$

$$q_3=(m_2-m_1(x+y)+xy)/((s-y)(s-x)) \tag{41}$$

$$y=h(x,s)=(2x^2-(3w+s)x+2sw)/(s-w) \tag{42}$$

und $x$ die kleinste (oder einzige) reelle Lösung der folgenden kubischen Gleichung ist:

$$A_s x^3 + B_s x^2 + C_s x + D_s = 0 \tag{43}$$
$$A_s = -2(s - m_1)$$
$$B_s = 2(m_1 s - m_2) + (s + 3w)(s - m_1)$$
$$C_s = -2w(s^2 + m_1 s - 2m_2)$$
$$D_s = 2ws(m_1 s - m_2) - (m_2 s - m_3)(s - w).$$

Der Satz gilt auch für das geschlossene Intervall $[r, s]$, wobei dann auch das Intervall für $w$ links geschlossen sein kann. Der Wert $r = -\infty$ ist zulässig, nicht aber der Wert $s = +\infty$!

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 2. Nach Hilfssatz 3 gibt es auf jedem Tripel $x < y < s$ mit $x < u$ und $y = h(x, s)$ eine echte Dreipunktverteilung zu den Momenten $m_1, m_2, m_3$. Nach Hilfssatz 2 gibt es zu jedem solchen Tripel $x < y < s$ ein $w$ mit $x < w < y$ und ein kubisches Polynom $g_w$ mit $g_w(t) \geq (t - w)^+$ für alle $t \leq s$, $g_w(\mathrm{t}) = (t - w)^+$ für $t \in \{x, y, s\}$, wenn

$$w = (sx + sy - 2x^2)/(2s + y - 3x) \tag{44}$$

gilt. Genau wie im Beweis von Satz 2 ist $w$ in (44) unter Beachtung von $y = h(x, s)$ eine strikt wachsende Funktion von $x$, so dass sich aus den möglichen Argumentwerten $(r, u)$ für $x$ unter Verwendung von $h(u, s) = v$ das behauptete Intervall für $w$ ergibt. Wegen der Existenz des Polynoms $g_w$ ist die maximale Stop-Loss-Prämie zur Priorität $w$ durch die Dreipunktverteilung auf $x$, $y$, $s$ gegeben und beträgt also $q_2(y - w) + q_3(s - w)$ mit $q_2$, $q_3$ gemäss (40) und (41). Für festes $w$ besagt (44), dass die Atome $x$, $y$ auf der Parabel

$$y = (2x^2 - (3w + s)x + 2sw)/(s - w) \tag{45}$$

liegen, und zwar dort, wo sie die Hyperbel $y = h(x, s)$ trifft, auf der $x$, $y$ ja ebenfalls liegen. Dies ergibt die Gleichungen (42) und (43). Dass $x$ die kleinste (oder einzige) reelle Nullstelle von (43) ist folgt daraus, dass $x$, $y$ sowohl bei der Hyperbel $h(\ \ , s)$ als auch bei der Parabel (45) jeweils auf dem linken Ast liegen. Letzteres wurde für die Hyperbel in Hilfssatz 3 gezeigt; für die Parabel folgt dies daraus, dass die $x$-Koordinate $(3w + s)/4$ des Scheitels grösser als $w$ und damit auch grösser als $x$ ist. Die beiden Äste schneiden sich nur einmal, da der Hyperbelast wachsend, der Parabelast fallend ist.

Zur numerischen Kontrolle kann die maximale Stop-Loss-Prämie auch mittels

$$B(g_w) = a_0 + a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3$$

berechnet werden, wobei die Koeffizienten $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ gemäss (11)–(14) mit $z = y$ und $y = x$ zu ermitteln sind.

**Beispiel**

Die Sätze 1–3 lösen das Problem der maximalen Stop-Loss-Prämie bei den vorgegebenen drei Momenten für praktisch alle vernünftigen Werte der Priorität $w$. Für die in den Sätzen 1–3 nicht behandelten Werte von $w$ ist in Analogie zum Fall mit nur zwei vorgegebenen Momenten $m_1$, $m_2$ (vgl. *De Vylder* und *Goovaerts*, 1982) anzunehmen, dass bei endlichem Intervall $R$ die eindeutig bestimmte Dreipunktverteilung auf $r, h(r, s), s$ zur maximalen Stop-Loss-Prämie führt. Doch kann der Verfasser diese Vermutung gegenwärtig nicht beweisen. Der vergleichsweise einfache Fall von Satz 1 wird in der Praxis eher selten zutreffen; meist wird die Lage von $w$ die Anwendung von Satz 2 erfordern. Dies ist auch bei dem eingangs geschilderten Beispiel der schweizer ASTIN-Gruppe der Fall. Dort erhält man (mit $c = 31{,}5$)

$$u = 2\,500$$

$$v = 602\,200,$$

so dass wegen $r = 0$ die Priorität $w = 1\,000\,000$ für $s > 1\,500\,000$ auf jeden Fall in dem gemäss Satz 2 zulässigen Intervall $(402\,000,\ 2\,s^2/(3\,s - \tilde{y}))$ liegt. Man erhält weiter

$$z = 1\,474\,000$$

$$y = 78\,000$$

$$q_3 = 0{,}000\,063$$

woraus sich $M_w(m_1, m_2, m_3) = 30$ ergibt. Die daraus errechnete Prämienobergrenze 1 230 000 liegt deutlich näher an dem Burning Cost 238 000 als der eingangs genannte Wert 3 700 000 gemäss der Abschätzung von *Bowers*.

**Nachwort**

Ich möchte an dieser Stelle den Herren Prof. *W.-R. Heilmann* und *E. M. Kulessa* meinen herzlichen Dank aussprechen. Aufgrund eines Briefwechsels mit Prof. *Heilmann* über seine Arbeit aus dem Jahr 1981 erschien mir die Durchführbarkeit des Lösungsweges im Fall von drei Momenten technisch möglich. Herr *Kulessa* rechnete während seiner Tätigkeit als Werkstudent in der Münchener Rück meine erste Formel anhand vieler Zahlenbeispiele nach und präsentierte die sich je nach der Lage von $w$ ergebenden Fälle in sehr übersichtlicher Weise in einem Vortrag im Versicherungsmathematischen Kolloquium an der Universi-

tät München. Seine Darstellung bewegte mich dazu, die Grenzen der Gültigkeit von Satz 2 und damit auch die anderen Fälle (Sätze 1 und 3) näher zu untersuchen.

Dr. Thomas Mack
Münchener Rückversicherungs-Gesellschaft
Königinstrasse 107
D-8000 München 40

## Literaturverzeichnis

*Bowers, N.L.* (1969): An Upper Bound on the Stop-Loss Net Premium – Actuarial Note. Transactions of the Society of Actuaries, Vol. XXI, 211–217.

*Bühlmann, H./Straub, E.* (1970): Glaubwürdigkeit für Schadensätze. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 70. Band, 111–133.

*De Vylder, F./Goovaerts, M.* (1982): Upper and Lower Bounds on Stop-Loss Premiums in Case of Known Expectation and Variance of the Risk Variable. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1982, 149–164.

*Gerathewohl, K., u.a.* (1976): Rückversicherung – Grundlagen und Praxis, Band 1. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

*Gisler, A.* (1982): Protokoll der Sitzung vom 11. Mai 1982 der Arbeitsgruppe ASTIN der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker.

*Goovaerts, M.J./De Vylder, F./Haezendonck, J.* (1984): Insurance Premiums. North Holland, Amsterdam.

*Heilmann, W.-R.* (1978): A Duality Theory for Stop-Loss Distributions. Scandinavian Actuarial Journal, 1978, 225–228.

*Heilmann, W.-R.* (1981): Improved Methods for Calculating and Estimating Maximal Stop-Loss Premiums. Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik XV, 29–41.

*Taylor, G.C.* (1977): Upper Bounds on Stop-Loss Premiums under Constraints on Claim Size Distribution. Scandinavian Actuarial Journal, 1977, 93–105.

## Zusammenfassung

Von einer Schadenvariablen $X$ seien nur die ersten drei Momente bekannt. Dann werden Formeln für die unter diesen Bedingungen maximal mögliche Stop-Loss-Netto-Prämie $E(X-w)^+$ bei gegebenem Selbstbehalt $w$ hergeleitet.

## Résumé

La distribution du montant $X$ d'un sinistre n'est connue que par ses trois premiers moments. L'article établit des formules donnant des bornes supérieures pour la prime nette de réassurance en stop-loss $E(X-w)^+$ de plein $w$.

## Summary

An upper bound for the stop loss pure risk premium $E(X-w)^+$ is calculated as a function of the retention $w$ under the condition that only the first three moments of the claims variable $X$ are known.