Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: - (1986)

Heft: 1

Artikel: Prämienberechnung für Schadenexzedenten

Autor: Gisler, Alois / Hofmann, Susanne / Schnieper, René

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967045

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Alois Gisler, Susanne Hofmann, René Schnieper, Winterthur*

Prämienberechnung für Schadenexzedenten**

1 Einführung

In verschiedenen Branchen (e.g. Motorfahrzeughaftplicht, Allgemeine Haftplicht) werden neben einer Grunddeckung mit einer vorgegebenen Höchstleistung pro Ereignis auch Deckungen mit höheren Garantiesummen angeboten. Die Prämie für die Deckung eines höheren Layer (im folgenden Excess-Layer genannt) berechnet sich in der Regel durch einen prozentualen Zuschlag Z auf der Prämie der Grunddeckung.
Im Gegensatz zur Rückversicherung werden in der Erstversicherung die Deckungslimiten nicht periodisch (z.B. jährlich) der Teuerung angepasst, sondern bleiben oft über eine größere Zeitperiode konstant. Zudem stehen dem Erstversicherer als statistische Basis für die Berechnungen meist nur summarische Daten in Form von Gesellschafts- oder Gemeinschaftsstatistiken zur Verfügung. Insbesondere sind die individuellen Schadenhöhen der einzelnen Schäden für den Erstversicherer oft nicht verfügbar.
Bei der Bestimmung des Zuschlags Z für die Excess-Layer Deckung stehen drei Probleme im Vordergrund:

a) Abwicklung des auf den Excess-Layer entfallenden Aufwands (Exzedentenaufwand)
   Die Erfahrung zeigt, daß der in den Statistiken ausgewiesene Exzedentenaufwand zu Beginn in der Regel unterschätzt wird.

b) Teuerung
   Die Teuerung spielt insofern eine wesentliche Rolle, daß bei gleichbleibender Limite für die Grunddeckung infolge Teuerung immer mehr Schäden in den Excess-Layer hineinwachsen.

* Wir möchten F. Bichsel, P. Diethelm und A. Dubey für ihre Anregungen und Diskussionen bestens danken. Insbesondere hat uns A. Dubey auf die mathematische Begründung für das beobachtete Abwicklungsbild des Exzedentenaufwandes aufmerksam gemacht.
** Die vorliegende Methode wurde am XVIII. ASTIN-Kolloquium in Biarritz (Oktober 1985) vorgestellt.

c) Stochastische Schwankung
Die Anzahl der Schadenfälle, deren Aufwand die Grunddeckungslimite übersteigt (Exzedentenfälle), ist auch bei einem großen Portefeuille relativ klein. Die Schadenhöhen dieser Fälle können aber sehr verschieden sein, so daß der Exzedentenaufwand insgesamt großen stochastischen Schwankungen ausgesetzt ist.

In Abschnitt 3 wird eine mathematische Begründung für die beobachtete systematische Unterschätzung des Exzedentenaufwands gegeben. In den nachfolgenden zwei Abschnitten wird der Exzedentenaufwand, aufgeteilt in die Komponenten Exzedentenaufwand pro Exzedentenfall (Exzedentendurchschnitt) und Exzedentenanzahl, analysiert. In Abschnitt 4 wird kurz auf den Exzedentendurchschnitt eingegangen. Der Hauptabschnitt 5 ist der Exzedentenanzahl gewidmet. Vorerst wird gezeigt, daß unter gewissen Annahmen und bei unveränderter gesetzlicher Minimalgarantie die Exzedentenanzahl im Laufe der Zeit exponentiell ansteigt. Anschließend werden zwei Modelle zur Beschreibung der Exzedentenanzahl vorgestellt. Aufgrund dieser Modelle können Voraussagen für die zukünftige Entwicklung der Exzedentenanzahl gemacht werden. Aufgrund dieser Resultate kann schließlich in Abschnitt 6 ein Schätzer des Zuschlags für die Excess-Layer Deckung angegeben werden. Die Modelle erlauben, auch eine Angabe über die Genauigkeit des verwendeten Schätzers zu machen.
Um nicht im Abstrakten verharren und einen unnötig komplizierten Formelapparat aufziehen zu müssen, werden im folgenden sowohl die Problemstellung wie auch die mathematischen Methoden und Modelle an konkretem Zahlenmaterial aus der Motorfahrzeug-Haftpflichtversicherung (MH) vorgeführt. Die mathematischen Methoden sind indessen von allgemeinem Interesse und dürften sich auch auf andere Branchen anwenden lassen.

2 Ausgangslage und Begriffe

In der Motorfahrzeug-Haftpflichtversicherung der Schweiz, auf die wir uns im folgenden beziehen, ist die Grunddeckung durch den Gesetzgeber vorgegeben. Bei den Personenwagen beträgt die Deckungslimite (gesetzliche Minimalgarantie) 1 Mio. sFr. Neben dieser Grunddeckung wird auch unbegrenzte Deckung angeboten. Der Excess-Layer besteht somit aus dem Intervall (1 Mio, ∞).

Pro Statistikjahr j werden wir die folgenden Größen und Notationen benutzen:

T_j = gesamter Schadenaufwand (nach erfolgter Abwicklung)

T_j^{xs} = gesamter Schadenaufwand im Excess-Layer (Exzedentenaufwand)

V_j = Volumenmaß gemessen in Anzahl Jahresrisiken

V_j^{xs} = Anzahl Jahresrisiken mit Exzedentendeckung

$$B_j = \frac{T_j - T_j^{xs}}{V_j} = \text{Schadenbedarf für die Grunddeckung}$$

$B_j^{xs} = T_j^{xs} / V_j^{xs}$ = Exzedentenbedarf

N_j = Schadenanzahl

N_j^{xs} = Exzedentenanzahl

$F_j = N_j / V_j$ = Schadenfrequenz

$F_j^{xs} = N_j^{xs} / V_j^{xs}$ = Exzedentenfrequenz

$$D_j = \frac{T_j - T_j^{xs}}{N_j} = \text{Schadendurchschnitt (für die Grunddeckung)}$$

$D_j^{xs} = T_j^{xs} / N_j^{xs}$ = Exzedentendurchschnitt

Bemerkung
Ein gutes Volumenmaß in der Motorfahrzeug-Haftplichtversicherung ist die Anzahl Jahresrisiken. In andern Branchen können an diese Stelle andere Volumina (e.g. Lohnsumme, Umsatz) treten.
Die reine Risikoprämie für die Grunddeckung ist gleich dem Erwartungswert $E[B_j]$. Der notwendige Zuschlag für die Exzedentendeckung ist gegeben durch den Quotienten $Z = E[B_j^{xs}]/E[B_j]$. Die Tarifprämie berechnet sich aus der reinen Risikoprämie durch Hinzufügung anderer Zuschläge wie z.B. Kosten, Sicherheitszuschläge usw. Wir werden uns auf die reine Risikoprämie konzentrieren und das Problem anderer Zuschläge nicht diskutieren.

Zum Zeitpunkt der Berechnung des im Jahre k gültigen Tarifs liegen als statistische Grundlage die Daten der MH-Gemeinschaftsstatistik per Ende des Jahres $k-2$ vor. Diese Gemeinschaftsstatistik, welche über 95% des gesamtschweizerischen Marktes umfaßt, enthält pro Statistikposition die entsprechenden aufkumulierten Daten wie Prämien, Schadenaufwand usw. Es stehen somit nur Summendaten zur Verfügung.
Bei der Berechnung des Tarifs für das Jahr $j=11$ ergab sich für den Exzedenten- und den Schadenbedarf gemäß der neuesten Information per Ende des Statistikjahres $j=9$ bei den Personenwagen, auf die sich die nachfolgenden Daten immer beziehen, folgendes Bild:

Statistikjahr	Anzahl Jahresrisiken total	mit Exzedenten-Deckung	Schadenbedarf	Exzedenten-bedarf	Quotient
	in 1000	in 1000	in Fr.	in Fr.	d/c in %
j	a	b	c	d	e
0	1'388	821	277	5.70	2,06
1	1'546	958	267	1.—	0,37
2	1'613	1'068	272	2.60	0,96
3	1'677	1'185	302	3.80	1,26
4	1'739	1'318	320	4.60	1,44
5	1'836	1'475	315	5.40	1,71
6	1'913	1'607	318	6.—	1,89
7	1'993	1'733	313	7.30	2,33
8	2'064	1'850	324	4.50	1,39
9	2'141	1'959	336	6.70	1,99

Während der ganzen obigen Periode betrug der Zuschlag für die Excess-Layer-Deckung 1,9%. Ein Blick auf die Kolonne e läßt vermuten, daß für $j=11$ eine leichte Anhebung des bisherigen Zuschlags angezeigt ist. Die Notwendigkeit einer markanten Erhöhung scheint aber nicht gegeben zu sein. Doch der Schein trügt, wie aus den folgenden Abschnitten ersichtlich sein wird.

3 Abwicklung des Exzedentenaufwands und der Exzedentenanzahl

Für die Exzedentenanzahl liegen folgende Beobachtungen vor:

Tabelle 1
Exzedentenanzahl

Statistikjahr j:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Abwicklungsjahr i										
0	3	3	2	4	7	11	9	19	21	30
1	6	3	3	7	9	14	13	26	22	
2	7	3	3	8	12	17	17	29		
3	8	4	7	8	15	21	24			
4	7	4	9	7	20	20				

Die Exzedentenanzahl wird also am Ende des jeweiligen Statistikjahres unterschätzt und wächst im Laufe der Abwicklung. Eine analoge Entwicklung läßt sich beim Exzedentenaufwand beobachten.

Tabelle 2
Exzedentenaufwand in Mio sFr.

Statistikjahr j:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Abwicklungsjahr i										
0	1.4	0.8	0	0.7	2.9	2.8	2.6	8.0	8.0	13.1
1	3.5	0.8	0	2.0	3.7	3.7	6.2	9.4	8.2	
2	4.3	0.8	0.3	2.9	3.2	3.0	6.7	12.7		
3	4.3	1.1	1.8	3.0	4.8	4.4	9.6			
4	4.3	1.2	2.4	2.2	6.1	7.9				

Der Exzedentenaufwand wird ebenfalls zu Beginn unterschätzt und das wahre Ausmaß erst im Laufe der Abwicklung sichtbar; die zufälligen Schwankungen sind jedoch größer als bei der Exzedentenanzahl.
Es gibt eine einfache mathematische Erklärung für das beobachtete Abwicklungsbild der Exzedenten. In den Branchenstatistiken gilt das Prinzip der bedarfsgerechten Reservierung, d.h. die zukünftigen Aufwendungen für bereits eingetretene, aber noch nicht erledigte Schäden werden erwartungs-

treu geschätzt. In der Motorfahrzeug-Haftplichtversicherung ist dieses Prinzip sogar gesetzlich verankert. Wohl bei allen Gesellschaften werden große Schadenfälle individuell reserviert. Es bezeichne Y die Schadenhöhe eines einzelnen Schadens (eine Zufallsvariable), P eine vorgegebene Priorität (eine Konstante), und es habe Y positive Wahrscheinlichkeitsmaße sowohl in $(-\infty, P]$ wie in (P, ∞). Dann gilt wegen der Ungleichung von Jensen, daß

$$E[(Y-P)^+] > (E[Y]-P)^+.$$

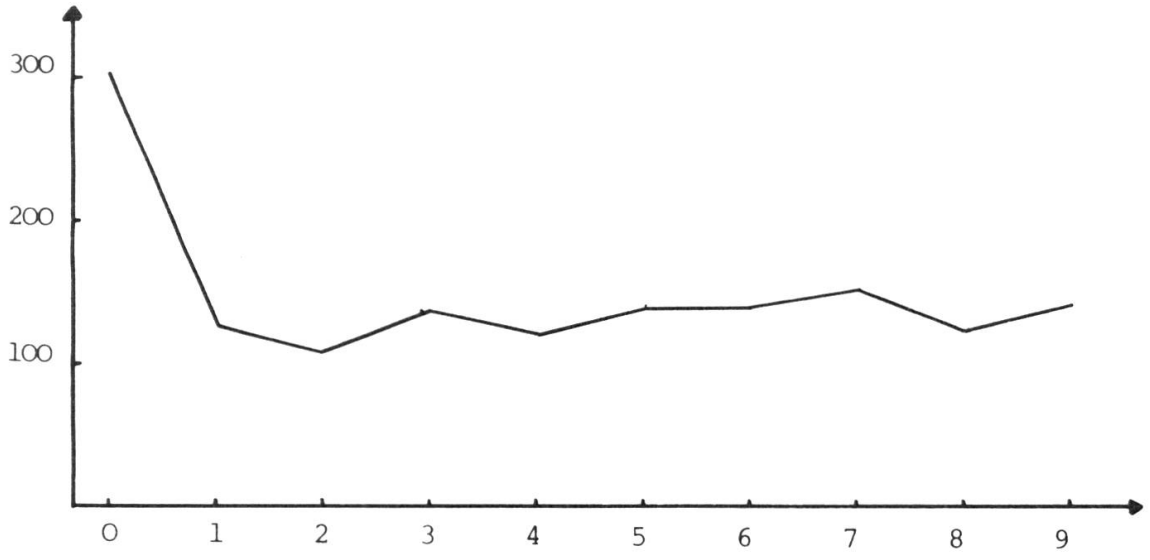
Dies bedeutet aber, daß im Falle, wo die Gesellschaften die potentiellen Exzedentenfälle erwartungstreu schätzen, der Exzedentenaufwand unterschätzt wird.

4 Exzedentendurchschnitt

Annahme:
Der Quotient $E[D_j^{xs}]/E[D_j]$ ist konstant für $j=0, 1, \ldots$ und wird mit Q bezeichnet.
Bemerkung:
Diese Annahme besagt, daß abgesehen von stochastischen Schwankungen der Exzedentendurchschnitt ein Vielfaches des Schadendurchschnitts ist. Es ist im Einzelfall zu überprüfen, ob diese Annahme sinnvoll ist und sich aufgrund der Daten bestätigt.
Per Ende des Statistikjahres $j=9$ ergaben sich folgende Werte:

Stat. Jahr	Exzedenten-aufwand in Fr. 1000 a	Exzedenten-anzahl b	Exzedenten-durchschnitt in Fr. $c=a/b$	Schadendurch-schnitt in Fr. d	Exzedenten-durchschnitt/ Schadendurch-schnitt $e=c/d$
0	4'657	6	776'000	2571	302
1	951	3	317'000	2517	126
2	2'768	10	277'000	2565	108
3	4'452	12	371'000	2735	136
4	6'094	18	339'000	2828	120
5	7'910	20	396'000	2867	138
6	9'607	24	400'000	2900	138
7	12'680	29	437'000	2868	152
8	8'245	22	375'000	3025	124
9	13'135	30	438'000	3092	142
0–9	mit der Exzedentenanzahl gewichtetes Mittel				141

Figur 1
Exzedentendurchschnitt dividiert durch Schadendurchschnitt



Die Graphik zeigt, daß unsere Annahme im vorliegenden Fall als erfüllt betrachtet werden kann.
Um Q zu bestimmen, betrachten wir die Zufallsgrößen $X_j = D_j^{xs}/D_j$ und verwenden die folgenden Schätzer

$$\hat{Q} = \frac{1}{N_{\cdot}^{xs}} \sum_{j=0}^{k} N_j^{xs} X_j \tag{1}$$

$$\widehat{\mathrm{Var}(\hat{Q})} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{N_{\cdot}^{xs}} \sum_{j=0}^{k} N_j^{xs} (X_j - \hat{Q})^2 \tag{2}$$

wobei $N_{\cdot}^{xs} = \sum_{j=0}^{k} N_j^{xs}$ totale Anzahl Exzedentenschäden in den Jahren 0 bis k.
Aufgrund unserer Daten erhalten wir als numerische Werte

$$\hat{Q} = 141 \quad \widehat{\mathrm{Var}[\hat{Q}]} = 119$$

Bemerkung

– D_j^{xs}/D_j ist im allgemeinen keine erwartungstreue Schätzung für $E[D_j^{xs}]/E[D_j]$. Somit sind auch die obigen Schätzer nicht erwartungstreu. Im vorliegenden Fall ist das Statistikvolumen mit einer Schaden-

anzahl von mehr als 200 000 pro Jahr sehr groß, so daß die Streuung von D_j sehr klein ist. Der Bias in den obigen Schätzern dürfte daher nicht ins Gewicht fallen. Aus demselben Grund kann auch davon ausgegangen werden, daß $\mathrm{Var}[D_j^{xs}/D_j|N_j^{xs}]$ umgekehrt proportional zur Exzedentenanzahl N_j^{xs} ist. Daher wurde bei den obigen Schätzern mit der Exzedentenanzahl gewichtet.

– Werden mehrere verschiedene Excess-Layer-Deckungen angeboten, so ist es oft angebracht, parametrische Annahmen über die Schadenhöhenverteilung der großen Schäden zu machen. In diesem Fall können anstelle von (1) und (2) auch andere Schätzer verwendet werden.

Im folgenden wird stets von den üblichen Annahmen ausgegangen, daß Zufallsvariablen zu verschiedenen Statistikjahren sowie Schadenanzahl und Schadenhöhen unabhängig sind. Dann gilt:

$$Z_j = \frac{E[B_j^{xs}]}{E[B_j]} = \frac{E[D_j^{xs}]}{E[D_j]} \cdot \frac{E[F_j^{xs}]}{E[F_j]} \tag{3}$$

$$Cov(D_j^{xs}, N_j^{xs}) = 0 \quad Cov(D_j^{xs}, N_j) = 0 \tag{4}$$

Da die Streuung der D_j sehr klein ist, so daß sie annähernd als identisch mit ihrem Erwartungswert betrachtet werden können, gilt approximativ

$$Cov(\hat{Q}, N_j^{xs}) \approx 0 \quad Cov(\hat{Q}, N_j) \approx 0 \tag{5}$$

Dieses Resultat werden wir in Abschnitt 6 benützen.
Bezeichnen wir mit $R_j = E[F_j^{xs}]/E[F_j]$, so wird (3) zu

$$Z_j = Q \cdot R_j \tag{6}$$

Im folgenden Kapitel werden wir uns dem Faktor R_j zuwenden und die Exzedentenfrequenz bzw. die Exzedentenanzahl näher analysieren.

5 Exzedentenanzahl

5.1 Grundannahme

Wir treffen folgende Grundannahme bezüglich der Exzedentenanzahl:

$$E[N_j^{xs} | N_j] = N_j \cdot \frac{V_j^{xs}}{V_j} \cdot p_j \tag{7}$$

Interpretation:

- p_j ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, daß bei gegebener Exzedentendeckung die Höhe eines Schadens größer ist als die Grunddeckung.
- $(N_j \cdot V_j^{xs})/V_j$ ist ein Maß für die Anzahl Schäden, bei denen risikoseitig Exzedentendeckung vereinbart ist.

Die Beziehung (7) läßt sich auch wie folgt schreiben:

$$E[N_j^{xs} | N_j] = F_j \cdot V_j^{xs} \cdot p_j = A_j p_j \tag{8}$$

wobei $A_j = F_j \cdot V_j^{xs}$ maßgebendes Volumen für die Exzedentenanzahl im Jahr j.
Unser Datenmaterial ergibt folgende Werte für das Volumen A_j:

Statistikjahr j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
V_j^{xs} in 1000	821	958	1068	1185	1318	1475	1607	1733	1850	1959
Frequenz F_j	.108	.106	.106	.110	.113	.110	.110	.109	.107	.109
$A_j = F_j \cdot V_j^{xs}$ in 1000	89	102	113	130	149	162	177	189	198	214

5.2 Einfluß der Teuerung auf die Exzedentenanzahl

Bei unveränderter Limite für die Grunddeckung überschreiten infolge Teuerung immer mehr Schäden diese Limite. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Schaden zu einem Exzedentenfall wird, nimmt infolge Teuerung ständig zu.

Das folgende Resultat läßt sich durch elementare Rechnung leicht zeigen:
Sind die großen Schäden (potentielle Exzedentenschäden) Pareto-verteilt, so wächst die Wahrscheinlichkeit, daß ein Schaden in den Excess-Layer hinein-

wächst, exponentiell an. Die Wachstumsrate hängt ab von der Teuerung und von den Parametern der Pareto-Verteilung. Nehmen wir zusätzlich an, daß die Teuerung ziemlich konstant ist im Laufe der Zeit und daß die Parameter der Pareto-Verteilung (für die teuerungsbereinigten Schadenhöhen der großen Schäden) sich nicht ändern, so ist auch die jährliche Wachstumsrate konstant.
In den folgenden zwei Modellen werden wir daher annehmen, daß die Folge $\{p_j\colon\ j = 0,1, \ldots\}$ exponentiell ansteigt mit konstanter jährlicher Wachstumsrate. Wenn auch die obigen Voraussetzungen nicht exakt erfüllt sind, so geben unsere Modelle doch eine sehr gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen.

Bemerkung:
Teuerung ist hier in einem umfassenden Sinne zu verstehen. Darunter ist insbesondere auch Teuerung infolge Änderung in der Umwelt (e.g Änderung der Gerichtspraxis, Schadenerledigungspraxis, Änderungen in den Vertragsbestimmungen usw.) zu subsummieren.

5.3 Ein additives Modell zur Beschreibung der Exzedentenanzahl

5.3.1 Bezeichnungen

N_{ij}^{xs} Anzahl Exzedenten aus dem Statistikjahr j am Ende des Abwicklungsjahres i $(i = 0, 1, \ldots, k - j)$

Δ_{ij}^{xs} $= N_{ij}^{xs} - N_{i-1,j}^{xs}$ $(i = 1, 2, \ldots, i_0)$
Zuwachs der Exzedentenanzahl aus dem Statistikjahr j im Abwicklungsjahr i

N_j^{xs} Anzahl Exzedenten aus dem Statistikjahr j nach vollständiger Abwicklung

Δ_j^{xs} $= N_j^{xs} - N_{i_0 j}^{xs}$
Zuwachs der Exzedentenanzahl aus dem Statistikjahr j nach Abwicklungsjahr i_0 bis Ende der Abwicklung

5.3.2 Modellannahmen

Es wird angenommen, daß bedingt, d.h. gegeben die Frequenz F_j (bzw. die totale Schadenanzahl N_j) folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

i) N_{0j}^{xs} ist Poisson verteilt mit $\lambda_{0j} = a_0 \cdot v^j \cdot A_j$

ii) Δ_{ij}^{xs} ist Poisson verteilt mit $\lambda_{ij} = a_i \cdot v^j \cdot A_j \quad (i = 1, 2, \ldots, i_0)$

iii) $E[\Delta_j^{xs}] = 0$

IV) Die Zufallsvariablen N_{0j}^{xs}, Δ_{ij}^{xs} und Δ_j^{xs} sind unabhängig.

Bemerkungen

- Die Annahmen i) und ii) (exponentielles Wachstum) wurden bereits in Abschnitt 5.2 diskutiert.
- Annahme iii) besagt, daß nach Abwicklungsjahr i_0 keine Veränderung der Exzedentenanzahl mehr zu erwarten ist.

Das uns zur Verfügung stehende Datenmaterial zeigte nach Abwicklungsjahr 3 nur noch eine ganz geringfügige positive Veränderung der Exzedentenanzahl, die vernachlässigt werden kann. In den nachfolgenden numerischen Beispielen wird daher jeweils $i_0 = 3$ gesetzt.

5.3.3 Schätzung der Parameter

Die Maximum-Likelihood-Schätzer sind gegeben durch folgende Gleichungen:

$$a_0 = \sum_{j=0}^{k} N_{0j}^{xs} \Big/ \sum_{j=0}^{k} A_j \cdot v^j \tag{9a}$$

$$a_i = \sum_{j=0}^{k-i} \Delta_{ij}^{xs} \Big/ \sum_{j=0}^{k-i} A_j \cdot v^j \quad i = 1, 2, \ldots, i_0 \tag{9b}$$

$$\sum_{j=0}^{k} j \cdot N_j^{xs} = \sum_{j=0}^{k} N_{0j}^{xs} \cdot \frac{\sum_{j=0}^{k} j \cdot A_j \cdot v^j}{\sum_{j=0}^{k} A_j \cdot v^j} + \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=0}^{k-i} \Delta_{ij} \frac{\sum_{j=0}^{k-i} j \cdot A_j \cdot v^j}{\sum_{j=0}^{k-i} A_j \cdot v^j} \tag{9c}$$

Der Parameter v läßt sich leicht mit der Methode von Newton berechnen. Mit den Beobachtungen gemäß Tabelle 1 (siehe Abschnitt 3) erhält man folgende numerischen Werte:

$$\hat{a}_0 = 24.18 \cdot 10^{-3} \qquad \hat{a}_1 = 7.08 \cdot 10^{-3}$$

$$\hat{a}_2 = 5.93 \cdot 10^{-3} \qquad \hat{a}_3 = 10.82 \cdot 10^{-3}$$

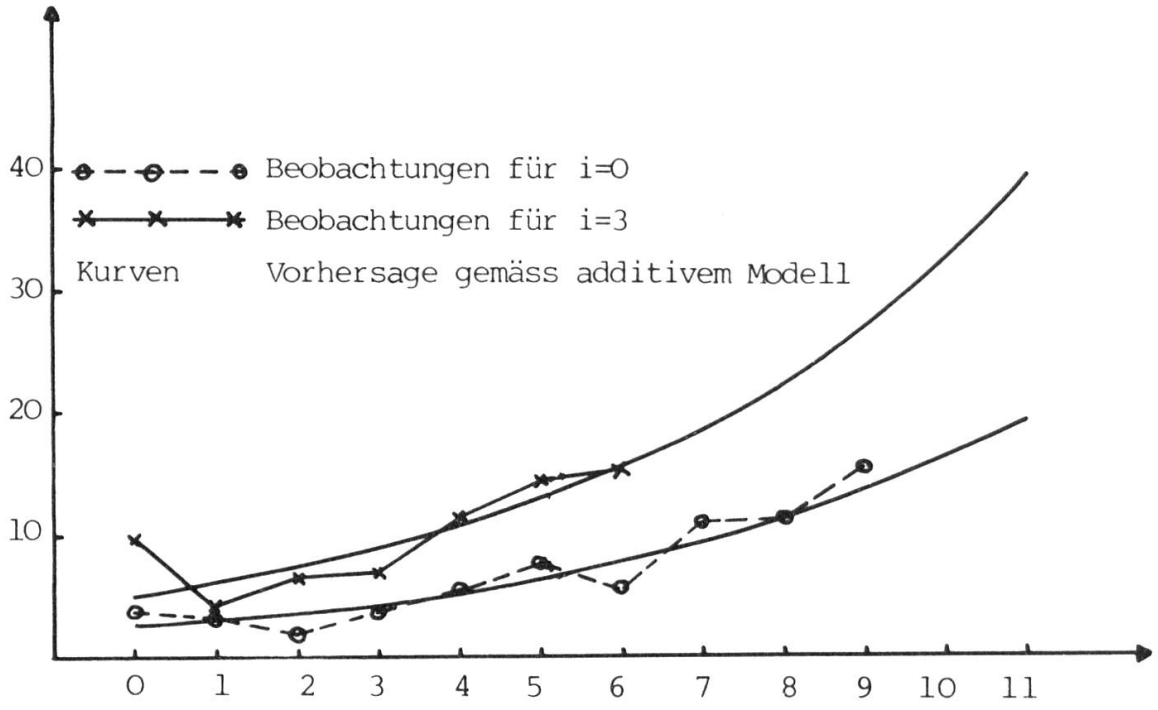
$$\hat{a}_0 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 = 48.01 \cdot 10^{-3} \qquad \hat{v} = 1.20$$

Diese Parameterwerte ergeben die folgenden Schätzungen für den Erwartungswert der Exzedentenanzahl:

Tabelle 3
Erwartungswerte der N_{ij}^{xs} gemäß additivem Modell

Statistikjahr j:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Abwicklungsjahr i										
0	2	3	4	5	8	10	13	17	21	27
1	3	4	5	7	10	13	17	21	27	
2	3	5	6	8	12	15	20	25		
3	4	6	8	11	15	19	26			

Figur 2
Anzahl Exzedenten pro Million Jahresrisiken (additives Modell)



Bemerkungen zu den numerischen Resultaten:

- Ein Vergleich der Tabelle 3 mit Tabelle 1 sowie Figur 2 zeigen, daß die Anpassung des Modells gegenüber den Beobachtungen gut ist.
- Es ist mit einem Wachstum der Exzedentenanzahl pro Jahresrisiko von jährlich 20% zu rechnen.
- In Figur 2 wurde für die Vorhersage angenommen, daß die Frequenz in den Jahren 10 und 11 ebenfalls .109 beträgt wie im Jahre 9. Diese Annahme hat aber bei der späteren Berechnung des Zuschlages keine Bedeutung.

5.3.4 Kovarianzmatrix der Parameter-Schätzer

Es sei $\underset{\sim}{\vartheta} = (v, a_0, a_1, \ldots, a_{i_0})$ der zu schätzende Parameter-Vektor und $f(\underset{\sim}{\vartheta})$ die zugehörige Likelihood-Funktion.
Unter sehr allgemeinen Regularitätsbedingungen, die im vorliegenden Fall erfüllt sind, gilt asymptotisch für Maximum-Likelihood-Schätzer (siehe z.B. *Lehmann* [1983])

$$\underset{\sim}{\vartheta} - \underset{\sim}{\hat{\vartheta}} \underset{as}{\sim} \mathcal{N}(\underset{\sim}{0}, I(\underset{\sim}{\vartheta})^{-1}),$$

wobei

$$I(\underset{\sim}{\vartheta})_{ij} = -E\left[\frac{\partial^2 \ln[f(\underset{\sim}{\vartheta})]}{\partial\vartheta_i \partial\vartheta_j}\right] \quad \text{(Fischer-Informationsmatrix)}$$

In unserem Modell hat $I(\underset{\sim}{\vartheta})$ die folgende Form:

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{v^2}\sum_{i=0}^{i_0}\left(a_i \sum_{j=0}^{k-i} j^2 A_j v^j\right) & \frac{1}{v}\sum_{j=0}^{k} j A_j v^j & \frac{1}{v}\sum_{j=0}^{k-1} j A_j v^j & \ldots & \frac{1}{v}\sum_{j=0}^{k-i_0} j A_j v^j \\
\frac{1}{v}\sum_{j=0}^{k} j A_j v^j & \frac{1}{a_0}\sum_{j=0}^{k} A_j v^j & 0 & \ldots & 0 \\
\frac{1}{v}\sum_{j=0}^{k-1} j A_j v^j & 0 & \frac{1}{a_1}\sum_{j=0}^{k-1} A_j v^j & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & & \cdot \\
\frac{1}{v}\sum_{j=0}^{k-i_0} j A_j v^j & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{a_{i_0}}\sum_{j=0}^{k-i_0} A_j v^j
\end{bmatrix} \tag{10}$$

Durch Ersetzen von $\underset{\sim}{\vartheta}$ durch $\underset{\sim}{\hat{\vartheta}}$ erhalten wir folgende Schätzung für die Kovarianzmatrix:

$$I(\underset{\sim}{\hat{\vartheta}})^{-1} = 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} 1681.45 & -219.97 & -56.22 & -40.52 & -62.17 \\ -219.97 & 34.14 & 7.35 & 5.30 & 8.13 \\ -56.22 & 7.35 & 3.96 & 1.35 & 2.07 \\ -40.52 & 5.30 & 1.35 & 3.31 & 1.49 \\ -62.17 & 8.13 & 2.07 & 1.49 & 8.15 \end{bmatrix}$$

5.4 Ein multiplikatives Modell zur Beschreibung der Exzedentenanzahl

5.4.1 Modellannahmen und Bezeichnungen

Es wird angenommen, daß bedingt, d.h. gegeben F_j (bzw. N_j), die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

i) $N_{0j}^{xs} = A_j \cdot a_0 \cdot v^j \cdot \varepsilon_{oj} \qquad (j = 0, 1, \ldots, k)$

ii) $N_{ij}^{xs} = a_i \cdot N_{i-1,j}^{xs} \cdot \varepsilon_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, i_0)$

iii) Für $\delta_{ij} = \log(\varepsilon_{ij})$ gilt: die δ_{ij} sind unkorreliert mit

$$E[\delta_{ij}] = 0, \quad Var[\delta_{ij}] = \frac{\sigma_i^2}{A_j} > 0$$

iv) $E[N_{ij}^{xs}] = E[N_{i_0 j}^{xs}] \qquad$ für $i > i_0$

Dabei sind a_i $(i = 0, 1, \ldots, i_0)$ und v unbekannte, zu schätzende Parameter und ε_{ij} zufällige Abweichungen. N_{ij}^{xs} und A_j wurden in Abschnitt 5.3 definiert.

Anstelle der Originaldaten werden wir die folgenden transformierten Größen betrachten:

$$y_{0j} = \ln(N_{0j}^{xs}/A_j) = \alpha_0 + j \cdot \nu + \delta_{0j} \quad (j = 0, 1, \ldots, k) \tag{11a}$$

$$y_{ij} = \ln(N_{ij}^{xs}/N_{i-1,j}^{xs}) = \alpha_i + \delta_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, i_0; j = 0, \ldots, k - i) \tag{11b}$$

wobei $\alpha_i = \ln(a_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, i_0)$, $\quad \nu = \ln(v)$.

Bemerkungen

- Annahme i) (exponentielles Wachstum) wurde bereits in Abschnitt 5.2 kommentiert.
- Die transformierten Daten erfüllen ein lineares Modell, d.h. für den Vektor $\underset{\sim}{y}$ der Beobachtungen (in lexikographischer Ordnung) gilt:

  $\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\vartheta} + \underset{\sim}{\delta}$

  wobei X entsprechende Design Matrix

  $\underset{\sim}{\vartheta}' = (\nu, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i_0})$

  $\underset{\sim}{\delta}$ = Vektor der Abweichungen (in lexikographischer Ordnung)

  Zur Schätzung von $\underset{\sim}{\vartheta}$ und der entsprechenden Kovarianzmatrix kann daher die allgemeine Theorie für lineare Modelle benützt werden.

5.4.2 Schätzung der Parameter

Wir werden vorerst den Parametervektor $\underset{\sim}{\vartheta}$ des transformierten Modells schätzen und die Parameter ν, a_i $(i = 0, \ldots, i_0)$ durch Rücktransformation aus $\underset{\sim}{\vartheta}$ bestimmen.
Der lineare erwartungstreue Schätzer mit kleinster Varianz für die einzelnen Komponenten von $\underset{\sim}{\vartheta}$ läßt sich aufgrund des Satzes von Gauß-Markov mit der Methode der gewichteten kleinsten Quadrate bestimmen. Die im obigen Sinne optimalen Schätzer sind also dadurch charakterisiert, daß sie den folgenden Ausdruck minimieren:

$$\underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{A_j}{\sigma_0^2}(y_{0j} - \alpha_0 - j\nu)^2}_{B_0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=0}^{k-i} \frac{A_j}{\sigma_i^2}(y_{ij} - \alpha_i)^2}_{B_i \quad (i=1, \ldots, i_0)} \tag{12}$$

Die Komponenten B_i $(i = 0, \ldots, i_0)$ werden einzeln minimiert. Als Lösung erhält man:

$$\hat{\nu} = \frac{\sum_{j=0}^{k} y_{oj} \cdot j \cdot q_j^{(0)} - \left(\sum_{j=0}^{k} y_{0j} \cdot q_j^{(0)} \right) \left(\sum_{j=0}^{k} j \cdot q_j^{(0)} \right)}{\sum_{j=0}^{k} j^2 \cdot q_j^{(0)} - \left(\sum_{j=0}^{k} j \cdot q_j^{(0)} \right)^2} \tag{13a}$$

$$\hat{\alpha}_0 = \sum_{j=0}^{k} y_{0j} \cdot q_j^{(0)} - \hat{\nu} \sum_{j=0}^{k} j \cdot q_j^{(0)} \tag{13b}$$

$$\hat{\alpha}_i = \sum_{j=0}^{k-i} q_j^{(i)} \cdot y_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, i_0) \tag{13c}$$

wobei $q_j^{(i)} = A_j / \sum_{l=0}^{k-i} A_l$

Bemerkung
In Matrixnotation läßt sich (13) schreiben als

$$\underset{\sim}{\hat{\vartheta}} = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} \underset{\sim}{y} \tag{14}$$

wobei V = Kovarianzmatrix von $\underset{\sim}{\delta}$
= Diagonalmatrix mit den Elementen σ_i^2 / A_j in der Diagonale
Durch Rücktransformation erhalten wir

$$\hat{a}_i = \prod_{j=0}^{k-i} \left(\frac{N_{ij}^{xs}}{N_{i-1,j}^{xs}} \right)^{q_j^{(i)}} \tag{15}$$

d.h. die $\hat{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, i_0)$ sind ein gewichtetes *geometrisches* Mittel der Veränderungsraten.
Mit den Beobachtungen gemäß Tabelle 1 erhalten wir

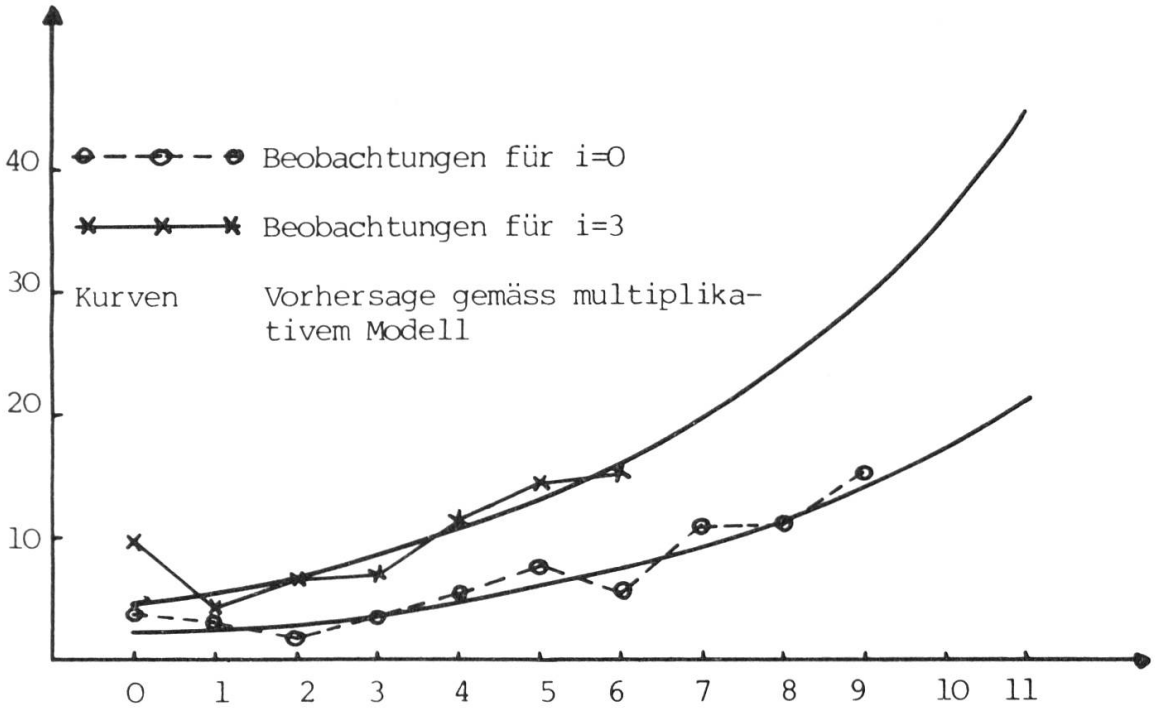
$$\begin{aligned}
\hat{\nu} &= 0.208 & \hat{v} &= e^{\hat{\nu}} = 1.231 \\
\hat{\alpha}_0 &= -3.908 & \hat{a}_0 &= e^{\hat{\alpha}_0} = 0.020 \\
\hat{\alpha}_1 &= 0.298 & \hat{a}_1 &= e^{\hat{\alpha}_1} = 1.347 \\
\hat{\alpha}_2 &= 0.156 & \hat{a}_2 &= e^{\hat{\alpha}_2} = 1.169 \\
\hat{\alpha}_3 &= 0.288 & \hat{a}_3 &= e^{\hat{\alpha}_3} = 1.333
\end{aligned}$$

Mit diesen Parametern ergibt sich folgende Tabelle der geschätzten Exzedentenanzahl:

Tabelle 4
Schätzung der Exzedentenanzahl N_{ij} gemäß multiplikativem Modell

Statistikjahr j:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Abwicklungsjahr i										
0	2	3	3	5	7	9	12	16	21	28
1	2	3	5	7	9	12	17	22	28	
2	3	4	5	8	11	14	19	26		
3	4	5	7	10	14	19	26			

Figur 3
Anzahl Exzedenten pro Million Jahresrisiken (multiplikatives Modell)



Bemerkung

- Figur 3 sowie ein Vergleich der Tabelle 4 mit Tabelle 1 zeigen, daß die Anpassung an die Beobachtungen gut ist.
- Die jährliche Wachstumsrate der Exzedentenanzahl pro Jahresrisiko wird auf 23% geschätzt.
- In Figur 3 wurde bei der Vorhersage wiederum angenommen, daß die Frequenz in den Jahren 10 und 11 gleich ist wie im Jahre 9.

5.4.3 Kovarianzmatrix der Schätzer

Aus (14) folgt unmittelbar

$$Cov(\hat{\underset{\sim}{\vartheta}}) = (X^T V^{-1} X)^{-1} \tag{15}$$

Um (15) zu berechnen, benötigen wir die in der Diagonale von V auftretenden σ_i^2. Da diese nicht bekannt sind, ersetzen wir sie durch folgende erwartungstreuen Schätzer:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{k-i} A_j (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2 \quad (i = 0, 1, \ldots, i_0) \tag{16}$$

wobei $n_i = \begin{cases} k-2 & i=0 \\ k-i-1 & i=1, 2, \ldots, i_0 \end{cases}$

Mit unseren Daten erhalten wir

$$\hat{\sigma}_0^2 = 11.754 \qquad \hat{\sigma}_1^2 = 5.929$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = 1.537 \qquad \hat{\sigma}_3^2 = 8.401$$

und

$$\widehat{Cov(\hat{\underset{\sim}{\vartheta}})} = \begin{bmatrix} 0.0010 & -0.0053 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0053 & 0.0359 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0045 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0014 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0091 \end{bmatrix}$$

6 Zuschlag für unbegrenzte Deckung

6.1 Punktschätzung

Gemäß (3) ist der Zuschlag im Jahre j gegeben durch

$$Z_j = \frac{E[D_j^{xs}]}{E[D_j]} \frac{E[F_j^{xs}]}{E[F_j]} = Q \cdot R_j$$

Aufgrund von (8) und den Modellannahmen erhält man:

im additiven Modell

$$R_j(\underset{\sim}{\vartheta}) = 10^{-3}(a_0 + a_1 + \cdots + a_{i_0})\, v^j \tag{17}$$

im multiplikativen Modell

$$R_j(\underset{\sim}{\vartheta}) = 10^{-3}(a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_i)\, v^j \cdot E[\varepsilon_j] \tag{18}$$

wobei $\varepsilon_j = \prod_{l=0}^{i_0} \varepsilon_{ij}$ = zufälliger Fehler mit $E[\ln(\varepsilon_j)] = 0$.

Wir verwenden deshalb als Schätzer:
im additiven Modell:

$$R_j = R_j(\hat{\underset{\sim}{\vartheta}}) = 10^{-3}(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 + \cdots + \hat{a}_{i_0})\, \hat{v}^j \tag{19}$$

im multiplikativen Modell

$$R_j = R_j(\hat{\underset{\sim}{\vartheta}}) = 10^{-3}(\hat{a}_0 \cdot \hat{a}_1 \cdot \ldots \cdot \hat{a}_{i_0})\, \hat{v}^j \tag{20}$$

Bemerkung
Im multiplikativen Modell ist der Schätzer R_j im allgemeinen nicht erwartungstreu. Aufgrund der Ungleichung von Jensen ist einerseits $E[\varepsilon_j] > 1$ und andererseits $E[\prod_i \hat{a}_i] > \prod_i a_i$. Die beiden Bias kompensieren sich somit teilweise.
Mit unseren Daten und den zugehörigen numerischen Schätzwerten für die Parameter gemäß Abschnitt 5 erhält man als Zuschlag für das Jahr $j = 11$:

Zuschlag gemäß additivem Modell:	5,1%
Zuschlag gemäß multiplikativem Modell:	5,8%

6.2 *Mittlerer quadratischer Fehler*

Neben den Punktschätzungen erlauben die Modelle, auch eine Angabe über die Genauigkeit der verwendeten Schätzer zu machen.
Sei $\underset{\sim}{\alpha} = (Q, \underset{\sim}{\vartheta})$ (Parametervektor und

$$Z_j(\underset{\sim}{\alpha}) = Q \cdot R_j(\underset{\sim}{\vartheta}) \quad \text{(Zuschlag im Jahre } j\text{)} \tag{21}$$

Durch eine Taylorentwicklung erster Ordnung erhalten wir

$$Z_j(\hat{\underset{\sim}{\alpha}}) - Z_j(\underset{\sim}{\alpha}) \simeq \sum_i \frac{\partial Z_j(\underset{\sim}{\alpha})}{\partial \alpha_i} (\hat{\alpha}_i - \alpha_i) \tag{22}$$

woraus

$$E[(Z_j(\hat{\underset{\sim}{\alpha}}) - Z_j(\underset{\sim}{\alpha}))^2] \approx \sum_{i,\,l} \frac{\partial Z_j(\underset{\sim}{\alpha})}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial Z_j(\underset{\sim}{\alpha})}{\partial \alpha_l} \cdot Cov(\alpha_i, \alpha_l) \tag{23}$$

Ersetzen wir $\partial Z_j(\underset{\sim}{\alpha})/\partial \alpha_k$ durch $\partial Z_j(\hat{\underset{\sim}{\alpha}})/\partial \alpha_k$, so erhalten wir eine Approximation für den mittleren quadratischen Fehler (m.q.F.).
Wegen (5) gilt für die Kovarianzmatrix

$$\sum_{\hat{\underset{\sim}{\alpha}}} \approx \begin{bmatrix} \mathrm{Var}[\hat{Q}] & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \Sigma_{\hat{\underset{\sim}{\vartheta}}} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \tag{24}$$

Aufgrund der numerischen Ergebnisse in den Abschnitten 4 und 5 ergeben sich somit für den Zuschlag im Jahre $j = 11$ folgende Werte:

	$Z_{11}(\hat{\underset{\sim}{\alpha}})$	$(m.q.F.)^{1/2}$
additives Modell	5,1%	1,1%
multiplikatives Modell	5,8%	1,4%

Literatur

Lehmann, E.L. (1983): Theory of point estimation, S. 429. John Wiley&Sons, New York.

Alois Gisler
Susanne Hofmann
René Schnieper

"Winterthur"
Schweizerische Versicherungs-Gesellschaft
General-Guisan-Straße 40
Winterthur

Zusammenfassung

In verschiedenen Branchen werden neben einer Grunddeckung mit vorgegebener Höchstleistung pro Ereignis auch Deckungen mit höheren Garantiesummen angeboten. Die Prämie für die Deckung eines höheren Layer berechnet sich in der Regel durch einen prozentualen Zuschlag Z auf den Prämien der Grunddeckung.
Als Probleme stehen insbesondere das Abwicklungsbild der Exzedenten sowie die Teuerung im Vordergrund. Es läßt sich mathematisch zeigen, daß zu Beginn der Abwicklung der Exzedentenaufwand in den Statistiken systematisch unterschätzt wird. Was die Teuerung betrifft, so bewirkt sie bei unveränderter Limite für die Grunddeckung ein stetiges Anwachsen der Exzedentenanzahl.
Wir schlagen zwei statistische Modelle vor, die erlauben, sowohl eine Punktschätzung für den Zuschlag Z eines kommenden Tarifjahres anzugeben wie auch eine Angabe über die Genauigkeit des Schätzers zu machen.

Résumé

Dans plusieurs branches de l'assurance, l'assuré a le choix entre une couverture minimale et une couverture avec une garantie plus elevée. La prime pour la tranche supérieure est généralement exprimé en pourcentage de la prime de la couverture de base.
Pour calculer la prime de l'excédent de sinistre il faut tenir compte du développement des sinistres en excédent ainsi que de l'inflation. On démontra que les sinistres et la charge de l'excédent sont systématiquement sous-estimés dans les statistiques, au début de leur développement. L'inflation quant à elle a pour conséquence une augmentation continue du nombre des sinistres à la charge de l'excédent lorsque la priorité reste constante.
Nous proposons deux modèles statistiques qui permettent de délivrer un estimateur pour la prime de l'excédent ainsi qu'une approximation de la précision de cet estimateur.

Summary

In many classes of insurance, the insured can choose between a minimum cover and a cover with a higher limit per event. The premium for the higher layer is usually a percentage of the premium for the minimum cover.
To compute this percentage we have to cope with two problems: the development of excess claims and inflation. We show that the amount of excess claims is systematically underestimated in the statistics at the beginning of the development. As a consequence of inflation, the number of excess claims grows when the priority remains constant.
We suggest two statistical models which give an estimate for the premium of the excess layer as well as a measure of the precision of this estimate.