# Équilibre financier à court terme des caisses de pensions : modèles et réalité

Autor(en): **Kuhn, Ernest**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **- (1986)**

Heft 2

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967054

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

ERNEST KUHN, Apples

# Equilibre financier à court terme des caisses de pensions – Modèles et réalité

## Introduction

La prévoyance professionnelle vieillesse, survivants et invalidité helvétique ou deuxième pilier est caractérisée par un grand nombre d'institutions de prévoyance (18 400 au 1er janvier 1986) qui sont, au même titre que toute autre institution d'assurance, soumises à un ensemble d'aléas dont la reconnaissance, la maîtrise et la mesure garantissent la réalisation harmonieuse de leur but.

L'idée gouvernant le principe d'assurance visant à la réunion des risques pour les compenser en vertu de la loi des grands nombres a tout naturellement conduit l'actuaire préoccupé par la résolution du problème de l'équilibre financier des institutions de prévoyance à appliquer et à développer dans ce contexte les résultats du *modèle déterministe* propre à l'assurance-vie au vu de la similitude des risques couverts.

Alors même que le couple d'hypothèses propre au modèle déterministe, à savoir loi des grands nombres associé à la relative stabilité des risques de décès et d'invalidité, autorise l'actuaire à utiliser ce modèle pour garantir l'*équilibre financier à long terme* de l'institution de prévoyance, il n'en demeure pas moins vrai que cet équilibre financier ne peut exister en réalité que si les fluctuations propres aux aléas naturels de l'institution (cas réels de décès et d'invalidité) demeurent dans des marges acceptables par rapport aux valeurs espérées à long terme. Si tel n'est pas le cas, l'équilibre financier de l'institution de prévoyance peut être mis en péril, même si les bases techniques retenues sont parfaitement correctes et correspondent à la réalité "moyenne" de l'institution concernée.

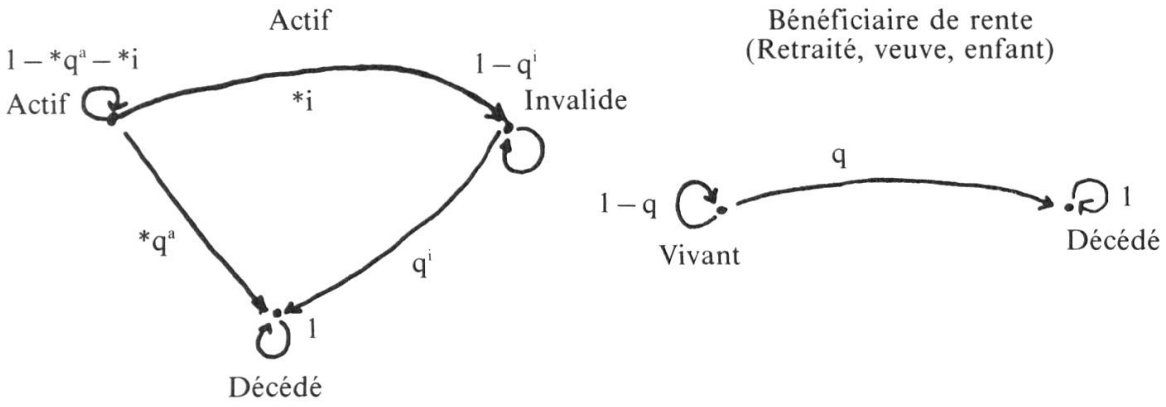
Cette remise en cause de l'équilibre financier à court terme de l'institution s'avère d'autant plus nécessaire que l'institution réunit un nombre restreint d'assurés et s'écarte de ce fait d'autant plus des hypothèses du modèle déterministe.

La maîtrise des aléas de l'institution de prévoyance propre à garantir également l'*équilibre financier à court terme* requiert la connaissance supplémentaire de la variation possible des charges annuelles en lieu et place de sa seule

valeur moyenne délivrée par le modèle déterministe. Le *modèle de la théorie du risque collectif* fournit à ce problème les réponses souhaitées.
L'application répétée du modèle de la théorie du risque collectif à un certain nombre d'institutions de prévoyance permet également de constater et de confirmer la très grande diversité de la charge annuelle, découlant de la réalisation des risques, d'une caisse de pensions à l'autre.
Cette diversité qui apparaît au travers des exemples concrets de caisses de pensions présentés justifie dès lors d'autant plus le recours au modèle de la théorie du risque collectif pour garantir, au travers de solutions optimales, le respect de l'équilibre financier à court terme.
La mesure des écarts enregistrés en réalité par rapport aux modèles développés peut être mise en évidence au moyen de simulations appropriées à défaut de données pratiques suffisantes. Les simulations peuvent aussi servir de révélateur quant à la validité des modèles élaborés.
Notons encore que la nouvelle loi qui régit le deuxième pilier obligatoire depuis le 1er janvier 1985 (LPP) confirme, au travers de dispositions spécifiques, la nécessité d'un équilibre financier tant à long terme qu'à court terme!

## 1 Les apports du modèle déterministe

Soit une institution de prévoyance quelconque *ALPHA* réunissant un nombre $L$ d'assurés actifs et de bénéficiaires de rentes.
L'ensemble des *probabilités* et des *valeurs actuelles* délivrées par les bases techniques, qui correspondent à des valeurs moyennes, permettent en premier lieu d'établir les modalités de financement du plan de prévoyance garantissant à long terme l'équilibre financier de l'institution, puis ultérieurement, de vérifier, à intervalles réguliers au moyen du Bilan technique, si cet équilibre financier à long terme est toujours garanti.
Considérons, dès lors, le processus à 3 états pour l'assuré actif et à deux états pour le bénéficiaire de rente qui caractérisent l'ensemble des états dans lequel peut se trouver l'assuré à la fin d'une période annuelle donnée qui peuvent être schématisés comme il suit:




Puis associons aux probabilités de passage d'un état à un autre, délivrées par les bases techniques, la mesure de l'effet financier liée à ces passages, soit pour l'assuré actif $j$:

$S_j^{(D)}$: Somme risquée liée au passage de l'état d'actif à l'état de décédé

$S_j^{(I)}$: Somme risquée liée au passage de l'état d'actif à l'état d'invalide

0: La valeur 0 étant associée au maintien dans le même état étant entendu que le maintien dans le même état relève d'un processus d'épargne et non des aléas propres aux cas de décès et d'invalidité.

Précisons que ces sommes risquées individuelles traduisent la synthèse de l'ensemble des caractéristiques structurelles de l'institution de prévoyance découlant directement du plan de prévoyance mis en place (nombre d'assurés; structure des sexes, des salaires, matrimoniales et familiales et autres éventuelles).

Le *modèle déterministe* fondé sur l'hypothèse que l'équilibre financier à long terme est acquis et que de ce fait la loi des grands nombres est vérifiée fournit, dans le cadre du processus décrit, la seule connaissance des *valeurs moyennes* découlant de l'ensemble des aléas de l'institution de prévoyance et intéressant l'équilibre financier à court terme, à savoir:

*le nombre moyen de "sinistres"* (Cas d'invalidité et de décès) soit:

$$\lambda = \sum_{j=1}^{L} ({}^*i_{x_j} + {}^*q_{x_j}^a) \tag{1}$$

qui correspond lorsqu'une partition de l'institution sur l'effectif d'hommes actifs et des femmes actives est opérée en désignant par
$l_x^a$ respectivement $l_y^a$ le nombre d'hommes actifs, respectivement de femmes actives à:

$$\lambda = \sum_{x=x_{\min}}^{64} l_x^a({}^*i_x + {}^*q_x^a) + \sum_{y=y_{\min}}^{61} l_y^a({}^*i_y + {}^*q_y^a)$$

et *la charge annuelle moyenne* découlant du caractère aléatoire de l'institution, soit

$$E = \sum_{j=1}^{L} (S_j^{(I)} \cdot {}^*i_{x_j} + S_j^{(D)} \cdot {}^*q_{x_j}^a) \tag{2}$$

Le coût moyen d'un sinistre invalidité ou décès étant délivré par

$$\overset{ind}{E} = \frac{E}{\lambda} \tag{3}$$

La réalité des institutions de prévoyance, qui réunissent généralement un nombre relativement restreint d'assurés eu égard aux effectifs plus importants propres aux portefeuilles de sociétés d'assurance sur la vie, est bien évidemment autre et ce d'autant plus qu'il y a fort heureusement peu de sinistres et que de ce fait le nombre effectif de sinistres ne se résume pas en une constante $\lambda$ mais en un nombre variable autour de cette valeur. Il en va de même pour le coût effectif d'un sinistre qui ne sera pas toujours égal à $\overset{ind}{E}$ mais plus ou moins fortement variable et pour le coût total annuel réel des sinistres également plus ou moins fortement variable autour de $E$.

## 2 Les apports du modèle de la théorie du risque collectif

Le processus aléatoire décrit ci-dessus peut, au moyen de diverses méthodes découlant du modèle de la théorie du risque collectif, être cerné valablement (voir Bibliographie) pour délivrer la mesure de la variabilité de la charge annuelle de l'institution de prévoyance qui nous intéresse au niveau de son équilibre financier à court terme.
Ainsi, en se fondant sur la double hypothèse réaliste d'indépendance concernant

- d'une part la *survenance des sinistres*, à savoir que le fait qu'un individu soit sinistré n'influence en rien la probabilité de survenance d'un sinistre d'un quelconque autre individu et
- d'autre part le *coût d'un sinistre*, à savoir que le coût des sinistres des assurés formant l'effectif sont mutuellement indépendants, c'est-à-dire que le coût propre à un individu donné n'influe d'aucune manière le coût propre à un autre individu.

Le modèle de la théorie du risque collectif associe au nombre réel de sinistres une variable aléatoire $N$ dont la moyenne est précisément $E(N) = \lambda$ et au coût d'un sinistre une autre variable aléatoire $Y$ qui, dans le contexte réaliste du risque poissonien envisagé, est définie par une loi de probabilité caractérisée par l'ensemble des valeurs possibles correspondant aux sommes risquées individuelles auxquelles sont attachées des probabilités conditionnelles de réalisation délivrées par le rapport entre la probabilité de base ${}^*i_{x_j}$ ou ${}^*q^a_{x_j}$ divisées par le nombre moyen $\lambda$
Nous avons ainsi pour la loi de probabilité du nombre:

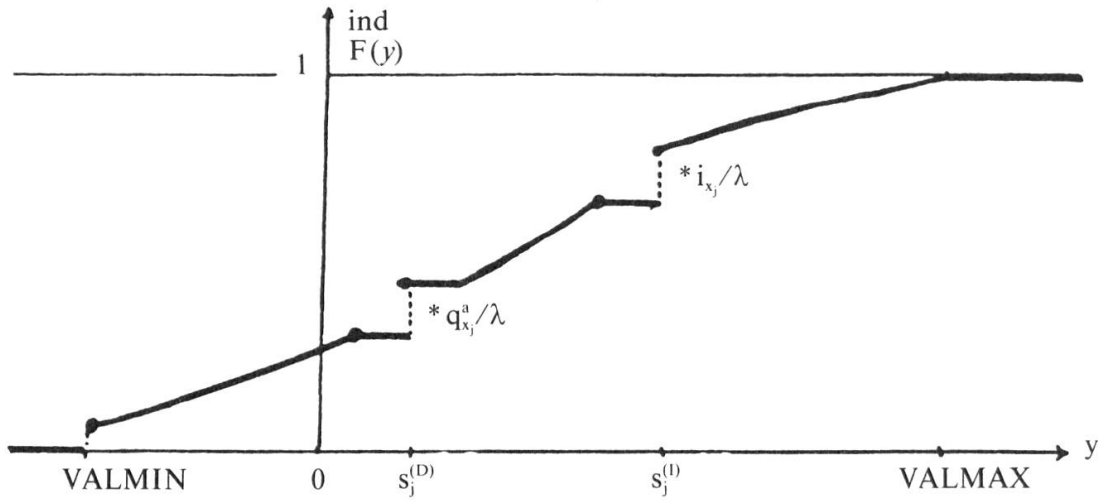
$$N : P(\lambda) \quad \text{soit} \quad Prob\ (N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N} = (0, 1, 2, \ldots, n, \ldots) \tag{4}$$

et par la loi de probabilité du coût d'un sinistre donnée par sa fonction de répartition

$$\overset{ind}{F}\ (y) = Prob(Y \leqslant y)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left\{ \sum_{j \in L} ({}^*i_{x_j} | S_j^{(I)} \leqslant y) + \sum_{j \in L} ({}^*q^a_{x_j} | S_j^{(D)} \leqslant y) \right\} \tag{5}$$

dont le graphe se présente comme il suit:




avec $VALMIN = \underset{j \in L}{\mathrm{Min}}(S_j^{(D)}, S_j^{(I)})$ et $VALMAX = \underset{j \in L}{\mathrm{Max}}(S_j^{(D)}, S_j^{(I)})$

et

$$E(Y^k) = \frac{1}{\lambda} \left\{ \sum_{j=1}^{L} {}^*q_{x_j}^a (S_j^{(D)})^k + {}^*i_{x_j} (S_j^{(I)})^k \right\} \tag{6}$$

En pratique, l'application de (5) délivre des lois du coût d'un sinistre fort diverses d'une institution de prévoyance à l'autre (voir chapitre 3 ci-dessous). De la superposition des deux variables aléatoires résulte la variable aléatoire du coût total annuel des sinistres $X$ de l'institution de prévoyance, régie, dans le cadre d'hypothèses retenu, par le processus de Poisson composé, défini par la formule classique propre à la théorie du risque collectif, à savoir:

$$\overset{coll}{F}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \overset{ind}{F}{}^{*k}(x) \tag{7}$$

où $X = \underbrace{Y + Y + \cdots Y}_{N}$ avec $Y$ mutuellement indépendantes

Le modèle de la théorie du risque collectif délivre ainsi les moyens de connaître la distribution des charges annuelles. Diverses méthodes traitant de ce sujet ont été développées à ce jour (voir Bibliographie). Celle que nous avons retenue dans le cadre de la résolution pratique des éléments théoriques qui précèdent est une méthode de calcul directe de (7) au moyen de (4), (5) et (6) conjuguant de manière optimale précision et coût du calcul au moyen d'algorithmes développant quelques milliers de valeurs possibles et utilisant les ressources de calcul importantes de moyens informatiques modernes. Relevons que l'imprécision introduite par rapport aux valeurs théoriques peut être contenue et réduite au moyen d'une comparaison appropriée des premiers moments centrés.

## 3 Fonction de répartition du coût d'un sinistre et fonction de répartition des charges annuelles – Applications pratiques

Pour chacune des huit institutions de prévoyance réelles (*ALPHA* 1, *ALPHA* 2, ..., *ALPHA* 8) passées en revue ci-dessous, l'ensemble des caractéristiques individuelles (risques couverts, prestations assurées, état-civil, différence d'âge entre les époux) ont été retenues, afin de cerner le plus précisément possible la variabilité du coût d'un sinistre, s'agissant du calcul des sommes risquées individuelles, soit $S_j^{(I)}$ et $S_j^{(D)}$.
Précisons que l'ensemble de ces institutions sont enregistrées pour l'application de la LPP (à l'exception de *ALPHA* 2 et *ALPHA* 4 qui constituent des prolongements sous forme d'institutions complémentaires à *ALPHA* 1 respectivement *ALPHA* 3) et sont de ce fait conformes à la législation en vigueur dans la mesure où il s'agit de caisses plus ou moins enveloppantes (allant plus ou moins au-delà des exigences minimales légales) au sens de la terminologie reconnue. Elles sont toutes fondées sur un plan de financement en primauté des cotisations et sur un plan de prévoyance similaire caractérisé par la palette de prestations suivantes (étant entendu que le niveau des prestations dépendra entre autres du niveau de financement consenti!)

*Vieillesse*:

– Rente de retraite — Le montant de la rente de retraite annuelle découle de la conversion du capital accumulé pour les prestations de vieillesse à l'âge terme de 65 ans pour les hommes et de 62 ans pour les femmes.

| | |
|---|---|
| – Rente d'enfant de retraité | 20% de la rente de retraite (âge terme 20/25 ans) |
| *Invalidité*: | |
| – Rente d'invalidité | 100% de la rente de retraite réglementaire |
| – Rente d'enfant d'invalide | 20% de la rente d'invalidité (âge terme 20/25 ans) |
| – Libération du paiement des cotisations | |
| *Décès*: | |
| – Rente de veuve (Hommes mariés) | (Pour *ALPHA* 1 et *ALPHA* 2: uniquement: rente de conjoint survivant)<br>70% de la rente d'invalidité assurée |
| – Rente d'orphelin | 20% de la rente d'invalidité assurée (âge terme 20/25 ans) |
| – Capital au décès | Propres cotisations sans intérêts (pour *ALPHA* 1 et *ALPHA* 2, il s'agit du capital accumulé pour les prestations de vieillesse).<br>Le capital est égal au moins à une fois le salaire annuel assuré (*ALPHA* 1 et *ALPHA* 2, cinq fois) si le défunt a une ou plusieurs personnes à charge. |

Dans ce contexte nous délivrons pour chacune de ces institutions

– le graphique de la fonction de répartition du coût d'un sinistre soit

$$F^{ind}(y) = Prob(Y \leqslant y)$$

– le graphique de la fonction de répartition de la charge annuelle des sinistres d'invalidité et de décès, soit

$$F^{coll}(x) = Prob(X \leqslant x)$$

avec pour chacune de ces distributions un certain nombre de valeurs caractéristiques, ainsi que pour chaque institution certaines caractéristiques telles que le secteur d'activité, le niveau de financement en % du salaire assuré qui pourra, le cas échéant, être plafonné et le nombre d'assurés.

Notons que les valeurs caractéristiques présentées propres aux valeurs possibles et aux probabilités qui leur sont associées, ne constituent qu'un extrait infime des résultats obtenus qui ne sauraient être repris ici faute de place. Il n'en demeure pas moins que la diversité des fonctions obtenues est fort bien mise en évidence par les graphiques et les quelques valeurs caractéristiques délivrées.

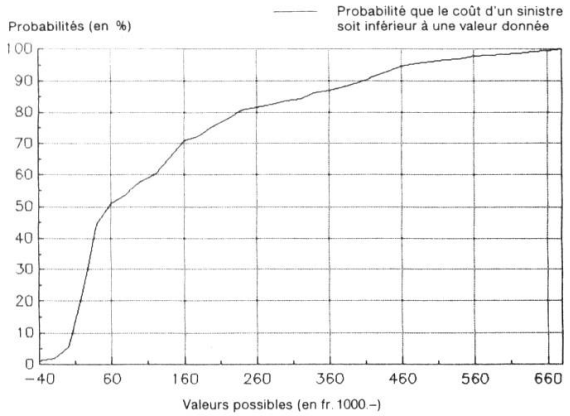
Alors même que dans les applications pratiques qui suivent, seuls des effectifs d'actifs ont été pris en considération, conduisant essentiellement à des sommes risquées positives, le rôle non négligeable que peuvent jouer les sommes risquées négatives (réserve libérée supérieure à la réserve à constituer par exemple: pour les hommes mariés proches de la retraite, célibataires, femmes, etc.) au niveau des fonctions de répartition étudiées qui en résultent se doit d'être souligné avec force.

Les bases techniques utilisées correspondent à celles appliquées par les institutions, soit EVK 1980 4%.

# Institution *ALPHA* 1

| | |
|---|---|
| *Secteur d'activité*: | Banque privée |
| *Effectifs*: | 236 assurés actifs (dont 121 hommes et 115 femmes) |
| *Age moyen*: | 36,48 |
| *Salaire annuel assuré*: | Salaire annuel assuré<br>Maximum: fr. 41 000.– |
| *Financement total*: | 24 % du salaire assuré |
| *Somme risquée minimum*: | fr. –46 655.– |
| *Somme risquée maximum*: | fr. 680 580.– |
| *Nombre annuel moyen de sinistres*: | 0,917 |

Distribution du coût d'un sinistre à posteriori (*FIND*) $\boxed{Y}$




(1) $E(Y) = 136\,335.-$

(2) $\sigma(Y) = 158\,909.-$

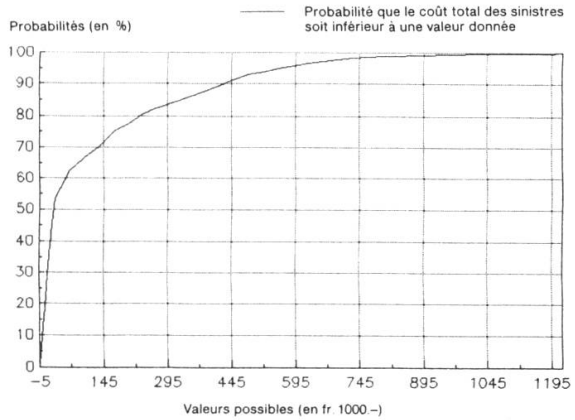
(3) $\sigma/E = 1{,}166$

(4) $\gamma_1(Y) = \mu_3(Y)/\sigma^3(Y)$
$= Asym(Y) = 1{,}402$

(5) $\gamma_2(Y) = \mu_4(Y)/\sigma^4(Y) - 3$
$= 1{,}147$
Kurtosis

$\boxed{X}$

Distribution du coût total des sinistres (*FCOLL*)




(1) $E(X) = 125\,153.-$

(2) $\sigma(X) = 200\,608.-$

(3) $\sigma/E = 1{,}603$

(4) $\gamma_1 = 2{,}102$

(5) $\gamma_2 = 5{,}029$

(6) $F^{coll\,-1}(99\%) = 845\,000.-$

(7) $F^{coll\,-1}(99{,}9\%) = 1\,235\,000.-$

(8) $F^{coll\,-1}(99{,}99\%) = 1\,605\,000.-$

(9) $6/1 = 6{,}8$

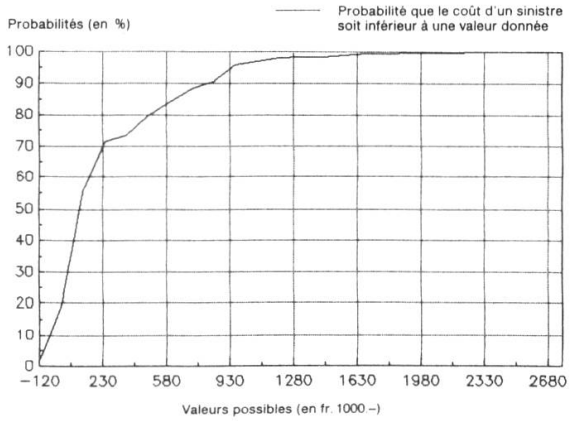
(10) $7/1 = 9{,}9$

(11) $8/1 = 12{,}8$

# Institution *ALPHA* 2

| | |
|---|---|
| *Secteur d'activité*: | Banque privée (*ALPHA* 2 est une institution complémentaire à *ALPHA* 1) |
| *Effectifs*: | 132 assurés actifs (dont 90 hommes et 42 femmes) |
| *Age moyen*: | 39,27 |
| *Salaire annuel assuré*: | Salaire annuel brut diminué du plafond de l'institution de base *ALPHA* 1 – Pas de maximum |
| *Financement total*: | 24% du salaire assuré |
| *Somme risquée minimum*: | fr. –125 820.– |
| *Somme risquée maximum*: | fr. 2 810 664.– |
| *Nombre annuel moyen de sinistres*: | 0,578 |

Distribution du coût d'un sinistre à posteriori (*FIND*) $\boxed{Y}$




(1) $E(Y) = 238\,015.–$

(2) $\sigma(Y) = 364\,562.–$

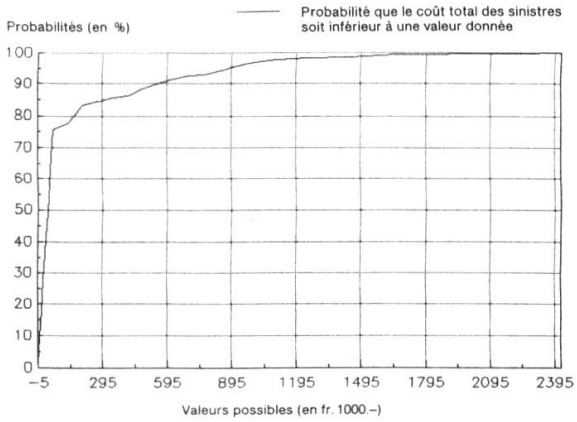
(3) $\sigma/E = 1{,}531$

(4) $\gamma_1 = 2{,}068$

(5) $\gamma_2 = 5{,}485$

$\boxed{X}$

Distribution du coût total des sinistres (*FCOLL*)




(1) $E(X) = 137\,668.–$

(2) $\sigma(X) = 331\,119.–$

(3) $\sigma/E = 2{,}405$

(4) $\gamma_1 = 3{,}323$

(5) $\gamma_2 = 1{,}413$

(6) $F^{coll\,-1}(99\%) = 1\,555\,000.–$

(7) $F^{coll\,-1}(99{,}9\%) = 2\,490\,000.–$

(8) $F^{coll\,-1}(99{,}99\%) = 3\,345\,000.–$

(9) $6/1 = 11{,}3$

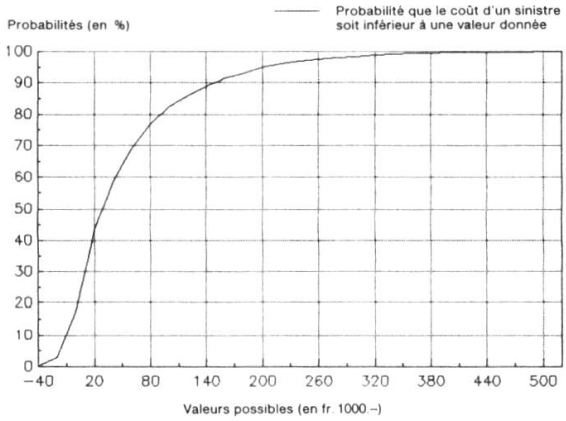
(10) $7/1 = 18{,}1$

(11) $8/1 = 24{,}3$

# Institution *ALPHA* 3

| | |
|---|---|
| *Secteur d'activité*: | Arts graphiques |
| *Effectifs*: | 447 assurés actifs (379 hommes et 68 femmes) |
| *Age moyen*: | 44,40 |
| *Salaire annuel assuré*: | Salaire annuel assuré maximum fr. 46 600.– |
| *Financement total*: | 13% du salaire assuré |
| *Somme risquée minimum*: | fr. –39 037.– |
| *Somme risquée maximum*: | fr. 534 449.– |
| *Nombre annuel moyen de sinistres*: | 4,073 |

Distribution du coût d'un sinistre à posteriori (*FIND*) $\boxed{Y}$




(1) $E(Y) = 55\,422.-$

(2) $\sigma(Y) = 73\,373.-$

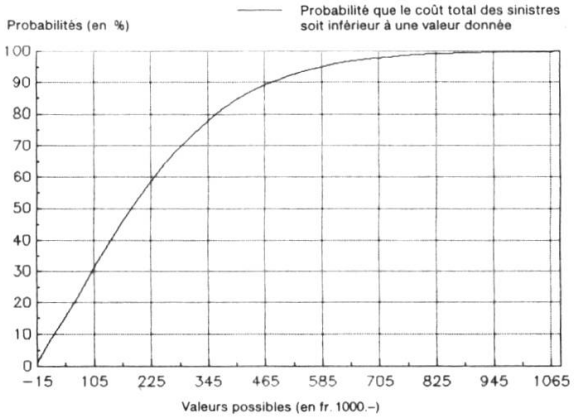
(3) $\sigma/E = 1{,}324$

(4) $\gamma_1 = 2{,}110$

(5) $\gamma_2 = 5{,}881$

$\boxed{X}$

Distribution du coût total des sinistres (*FCOLL*)




(1) $E(X) = 225\,747.-$

(2) $\sigma(X) = 185\,580.-$

(3) $\sigma/E = 0{,}822$

(4) $\gamma_1 = 1{,}210$

(5) $\gamma_2 = 1{,}891$

(6) $F^{coll\,-1}(99\%) = 810\,000.-$

(7) $F^{coll\,-1}(99{,}9\%) = 1\,105\,000.-$

(8) $F^{coll\,-1}(99{,}99\%) = 1\,480\,000.-$

(9) $6/1 = 3{,}6$

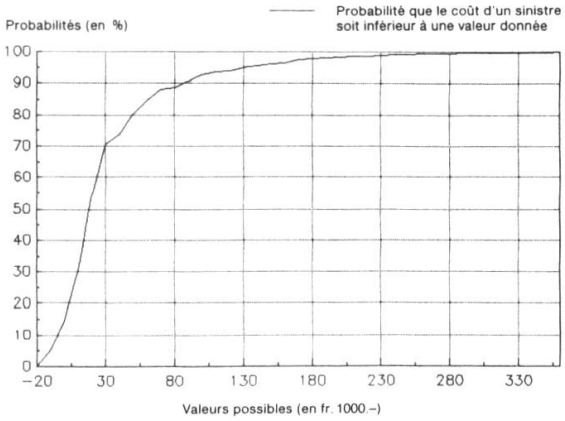
(10) $7/1 = 4{,}9$

(11) $8/1 = 6{,}6$

# Institution *ALPHA* 4

| | |
|---|---|
| *Secteur d'activité*: | Arts graphiques (*ALPHA* 4 est une institution complémentaire à *ALPHA* 3) |
| *Effectifs*: | 104 (99 hommes, 5 femmes) |
| *Age moyen*: | 46,43 |
| *Salaire annuel assuré*: | Salaire annuel brut diminué du plafond de l'institution de base *ALPHA* 3 – Plafond annuel égal à fr. 60 000.– |
| *Financement total*: | 15% du salaire assuré |
| *Somme risquée minimum*: | fr. –19 087.– |
| *Somme risquée maximum*: | fr. 360 923.– |
| *Nombre annuel moyen de sinistres*: | 1,037 |

Distribution du coût d'un sinistre à posteriori (*FIND*) $\boxed{Y}$




(1) $E(Y) = 35\,222.-$

(2) $\sigma(Y) = 47\,793.-$

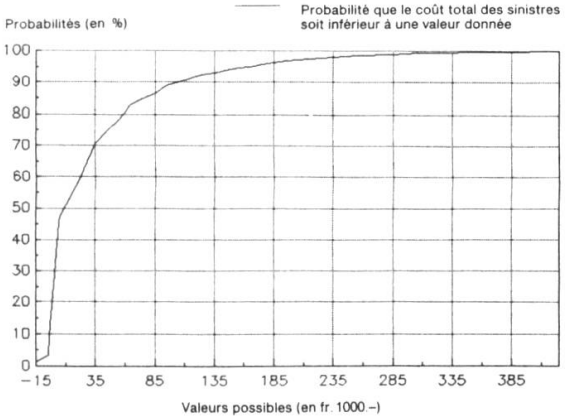
(3) $\sigma/E = 1{,}357$

(4) $\gamma_1 = 2{,}733$

(5) $\gamma_2 = 9{,}722$

$\boxed{X}$

Distribution du coût total des sinistres (*FCOLL*)




(1) $E(X) = 36\,535.-$

(2) $\sigma(X) = 60\,467.-$

(3) $\sigma/E = 1{,}655$

(4) $\gamma_1 = 2{,}737$

(5) $\gamma_2 = 9{,}851$

(6) $F^{coll\,-1}(99\%) = 285\,000.-$

(7) $F^{coll\,-1}(99{,}9\%) = 425\,000.-$

(8) $F^{coll\,-1}(99{,}99\%) = 565\,000.-$

(9) $6/1 = 7{,}8$

(10) $7/1 = 11{,}6$

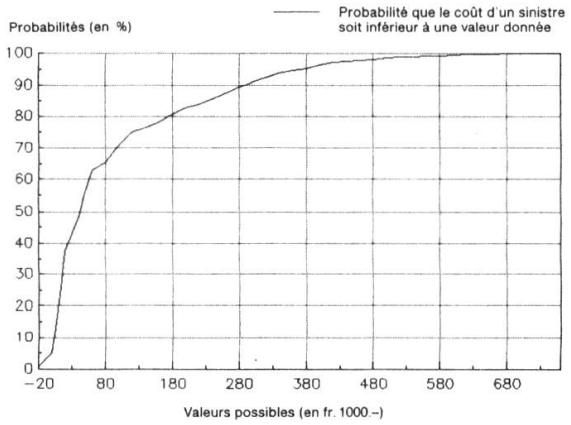
(11) $8/1 = 15{,}5$

# Institution *ALPHA* 5

| | |
|---|---|
| *Secteur d'activité*: | Prestations de service |
| *Effectifs*: | 508 assurés actifs (299 hommes et 209 femmes) |
| *Age moyen*: | 34,75 |
| *Salaire annuel assuré*: | Salaire annuel assuré maximum: fr. 64 000.– |
| *Financement total*: | 16% du salaire assuré |
| *Somme risquée minimum*: | fr. –35 547.– |
| *Somme risquée maximum*: | fr. 758 822.– |
| *Nombre annuel moyen de sinistres*: | 1,587 |

## Distribution du coût d'un sinistre à posteriori (*FIND*)

$\boxed{Y}$




(1) $E(Y) = 96\,634.–$

(2) $\sigma(Y) = 126\,470.–$

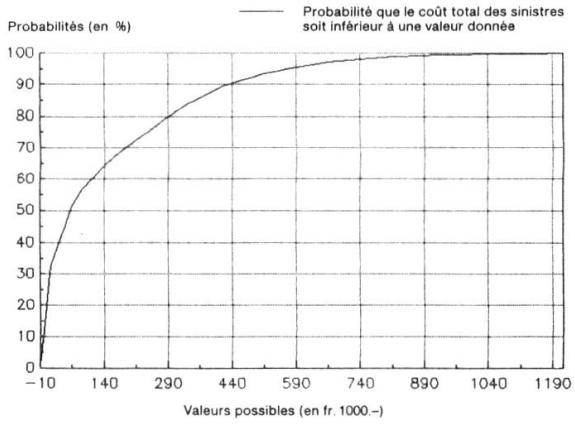
(3) $\sigma/E = 1{,}309$

(4) $\gamma_1 = 1{,}873$

(5) $\gamma_2 = 3{,}407$

$\boxed{X}$

## Distribution du coût total des sinistres (*FCOLL*)




(1) $E(X) = 153\,422.–$

(2) $\sigma(X) = 200\,548.–$

(3) $\sigma/E = 1{,}307$

(4) $\gamma_1 = 1{,}836$

(5) $\gamma_2 = 4{,}011$

(6) $F^{coll\,-1}(99\%) = 850\,000.–$

(7) $F^{coll\,-1}(99{,}9\%) = 1\,225\,000.–$

(8) $F^{coll\,-1}(99{,}99\%) = 1\,585\,000.–$

(9) $6/1 = 5{,}5$

(10) $7/1 = 8{,}0$

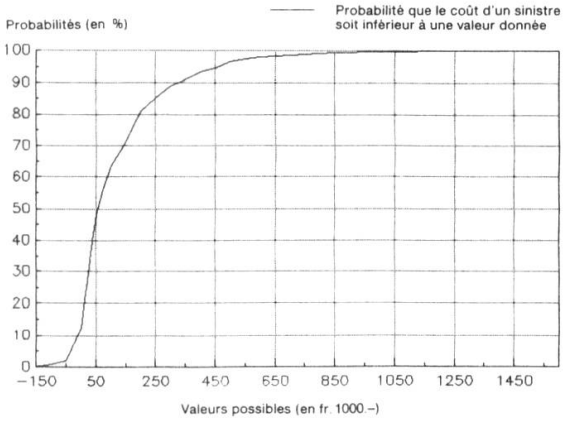
(11) $8/1 = 10{,}3$

# Institution *ALPHA* 6

| | |
|---|---|
| *Secteur d'activité*: | Prestations de services |
| *Effectifs*: | 1074 assurés actifs (563 hommes et 511 femmes) |
| *Age moyen*: | 38,57 |
| *Salaire annuel assuré*: | Salaire annuel assuré maximum: fr. 120 000.– |
| *Financement total*: | 19½ % du salaire assuré |
| *Somme risquée minimum*: | fr. –186 295.– |
| *Somme risquée maximum*: | fr. 1 633 023.– |
| *Nombre annuel moyen de sinistres*: | 5,869 |

## Distribution du coût d'un sinistre à posteriori (*FIND*)

$\boxed{Y}$




(1) $E(Y) = 117\,122.-$

(2) $\sigma(Y) = 164\,922.-$

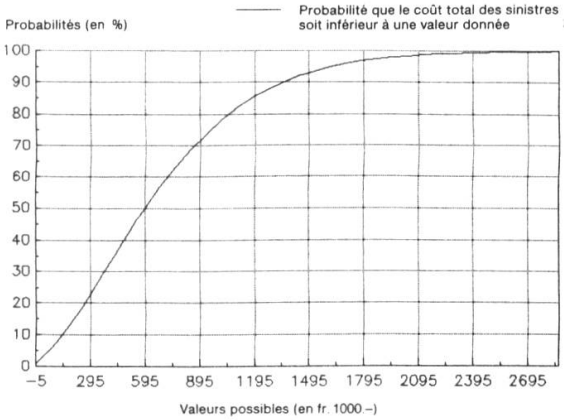
(3) $\sigma/E = 1{,}408$

(4) $\gamma_1 = 2{,}407$

(5) $\gamma_2 = 8{,}497$

$\boxed{X}$

## Distribution du coût total des sinistres (*FCOLL*)




(1) $E(X) = 687\,472.-$

(2) $\sigma(X) = 490\,072.-$

(3) $\sigma/E = 0{,}713$

(4) $\gamma_1 = 1{,}095$

(5) $\gamma_2 = 1{,}627$

(6) $F^{coll\,-1}(99\%) = 2\,190\,000.-$

(7) $F^{coll\,-1}(99{,}9\%) = 2\,900\,000.-$

(8) $F^{coll\,-1}(99{,}99\%) = 3\,430\,000.-$

(9) $6/1 = 3{,}2$

(10) $7/1 = 4{,}2$

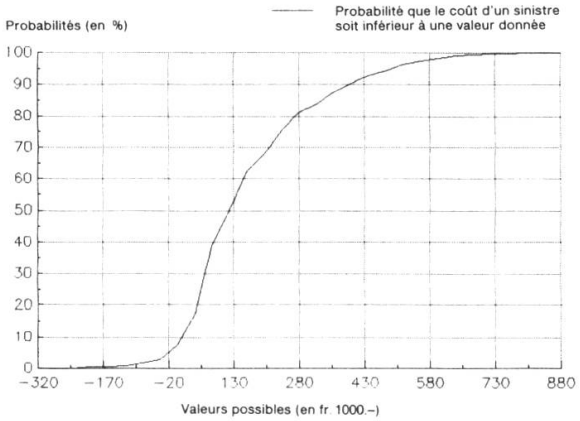
(11) $8/1 = 5{,}0$

## Institution *ALPHA* 7

| | |
|---|---|
| *Secteur d'activité*: | Secteur hospitalier |
| *Effectifs*: | 1004 assurés actifs (370 hommes, 634 femmes) |
| *Age moyen*: | 37,80 |
| *Salaire annuel assuré*: | Pas de maximum |
| *Financement total*: | 16% du salaire annuel assuré |
| *Somme risquée minimum*: | fr. –336 183.– |
| *Somme risquée maximum*: | fr. 903 156.– |
| *Nombre annuel moyen de sinistres*: | 3,295 |

### Distribution du coût d'un sinistre à posteriori (*FIND*)

$\boxed{Y}$




(1) $E(Y) = 168\,799.-$

(2) $\sigma(Y) = 159\,315.-$

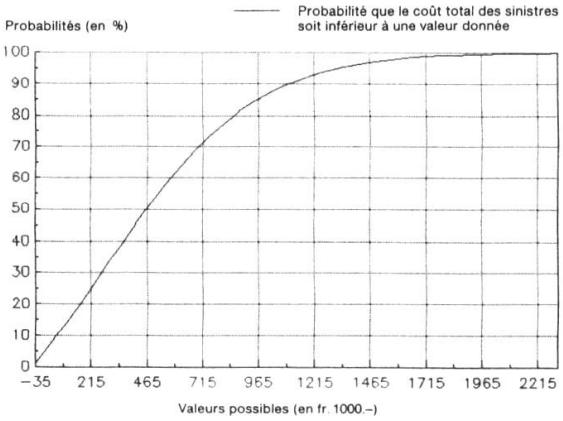
(3) $\sigma/E = 0{,}979$

(4) $\gamma_1 = 1{,}083$

(5) $\gamma_2 = 1{,}382$

$\boxed{X}$

### Distribution du coût total des sinistres (*FCOLL*)




(1) $E(X) = 536\,512.-$

(2) $\sigma(X) = 413\,509.-$

(3) $\sigma/E = 0{,}771$

(4) $\gamma_1 = 0{,}983$

(5) $\gamma_2 = 1{,}174$

(6) $F^{coll\,-1}(99\%) = 1\,770\,000.-$

(7) $F^{coll\,-1}(99{,}9\%) = 2\,340\,000.-$

(8) $F^{coll\,-1}(99{,}99\%) = 2\,865\,000.-$

(9) $6/1 = 3{,}3$

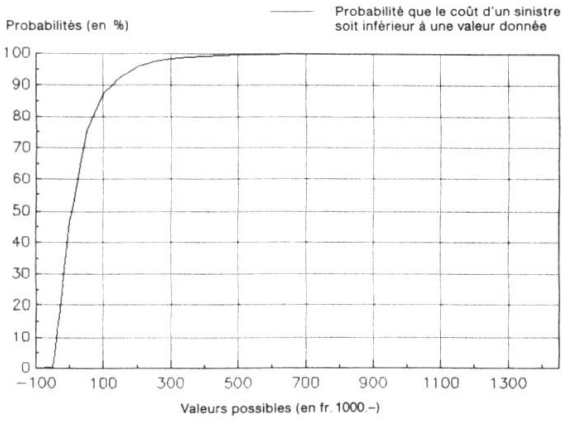
(10) $7/1 = 4{,}4$

(11) $8/1 = 5{,}3$

# Institution *ALPHA* 8

| | |
|---|---|
| *Secteur d'activité*: | Fondation collective regroupant un grand nombre d'employeurs |
| *Effectifs*: | 9113 assurés actifs (5135 hommes et 3978 femmes) |
| *Age moyen*: | 32,94 |
| *Salaire annuel assuré*: | Pas de maximum |
| *Financement*: | Variable selon le plan retenu |
| *Somme risquée minimum*: | fr. –117 130.– |
| *Somme risquée maximum*: | fr. 1 433 445.– |
| *Nombre annuel moyen de sinistres*: | 47,805 |

Distribution du coût d'un sinistre à posteriori (*FIND*) $\boxed{Y}$




(1) $E(Y) = 57\,447.–$

(2) $\sigma(Y) = 83\,707.–$

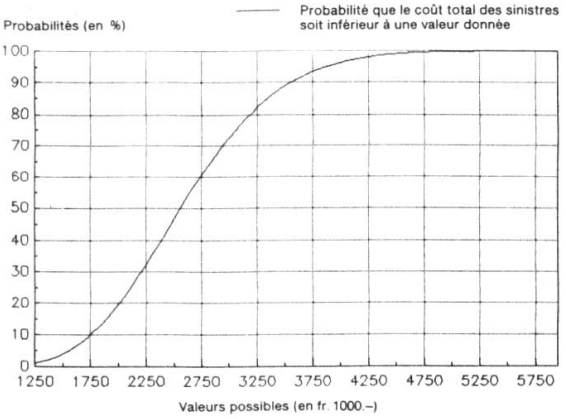
(3) $\sigma/E = 1{,}457$

(4) $\gamma_1 = 3{,}717$

(5) $\gamma_2 = 24{,}210$

$\boxed{X}$

Distribution du coût total des sinistres (*FCOLL*)




(1) $E(X) = 2\,746\,270.–$

(2) $\sigma(X) = 701\,945.–$

(3) $\sigma/E = 0{,}256$

(4) $\gamma_1 = 0{,}494$

(5) $\gamma_2 = 0{,}391$

(6) $F^{coll\,-1}(99\%) = 4\,550\,000.–$

(7) $F^{coll\,-1}(99{,}9\%) = 5\,300\,000.–$

(8) $F^{coll\,-1}(99{,}99\%) = 5\,800\,000.–$

(9) $6/1 = 1{,}7$

(10) $7/1 = 1{,}9$

(11) $8/1 = 2{,}1$

## Commentaires relatifs aux résultats obtenus pour les institutions *ALPHA* 1 à *ALPHA* 8

Les résultats obtenus au travers de l'échantillon d'institutions fort diverses présenté permettent la formulation de certains enseignements intéressants en procédant à leur analyse et à leur comparaison.
A cette fin, nous délivrons ci-dessous un résumé des principales caractéristiques et résultats obtenus pour les institutions passées en revue

| Caractéristiques | *ALPHA* 1 | *ALPHA* 2 | *ALPHA* 3 | *ALPHA* 4 | *ALPHA* 5 | *ALPHA* 6 | *ALPHA* 7 | *ALPHA* 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Nombre d'assurés (hommes, femmes) | 236 (121; 115) | 132 (90; 42) | 447 (379; 68) | 104 (99; 5) | 508 (299; 209) | 1 074 (563; 511) | 1 004 (370; 634) | 9 113 (5135; 3978) |
| 2. Salaire annuel maximum | 41 000.– | – | 46 600.– | 60 000.– | 64 000.– | 120 000.– | – | – |
| 3. Financement total (en % du salaire assuré) | 24% | 24% | 13% | 15% | 16% | 19,5% | 16% | Variable |
| 4. Espérance ($E(X)$) | 125 100.– | 137 700.– | 225 700.– | 36 500.– | 153 400.– | 687 500.– | 536 500.– | 2 746 300.– |
| 5. Ecart-type ($\sigma(X)$) | 200 600.– | 331 100.– | 185 600.– | 60 500.– | 200 500.– | 490 000.– | 413 500.– | 701 900.– |
| 6. $\sigma(X)/E(X)$ | 1,603 | 2,405 | 0,822 | 1,655 | 1,307 | 0,713 | 0,771 | 0,256 |
| 7. $F^{coll\,-1}(99\%)$ | 845 000.– | 1 555 000.– | 810 000.– | 285 000.– | 850 000.– | 2 190 000.– | 1 770 000.– | 4 550 000.– |
| 8. $F^{coll\,-1}(99{,}9\%)$ | 1 235 000.– | 2 490 000.– | 1 105 000.– | 425 000.– | 1 225 000.– | 2 900 000.– | 2 340 000.– | 5 300 000.– |
| 9. $F^{coll\,-1}(99{,}99\%)$ | 1 605 000.– | 3 345 000.– | 1 480 000.– | 565 000.– | 1 585 000.– | 3 430 000.– | 2 865 000.– | 5 800 000.– |
| 10. 7/4 | 6,8 | 11,3 | 3,6 | 7,8 | 5,5 | 3,2 | 3,3 | 1,7 |
| 11. 8/4 | 9,9 | 18,1 | 4,9 | 11,6 | 8,0 | 4,2 | 4,4 | 1,9 |
| 12. 9/4 | 12,8 | 24,3 | 6,6 | 15,5 | 10,3 | 5,0 | 5,3 | 2,1 |

Les considérations et appréciations qui suivent s'inscrivent dans le cadre d'institutions de prévoyance ayant adopté telles *ALPHA* 1 à *ALPHA* 8 des plans de prévoyance similaires et "standard" quant à l'équilibre des prestations couvrant les trois risques de vieillesse, d'invalidité et de décès. Il s'ensuit que ces considérations ne peuvent de ce fait sans autres prévaloir pour des institutions de prévoyance couvrant, par exemple, exclusivement des rentes d'invalidité ou des capitaux au décès selon des critères particuliers.

Concernant les graphiques de la fonction de répartition du coût d'un sinistre $Y$ et de la charge annuelle $X$, force est de constater que leur allure est fort diverse d'une institution à l'autre. Cette constatation qui prévaut tant pour la fonction de répartition de $Y$ que de $X$ provient du fait que ces fonctions traduisent la synthèse de l'ensemble des caractéristiques propres à la caisse influençant la variabilité des coûts. Variabilité dont les origines ne peuvent, à notre avis, dans la totalité des cas examinés, s'expliciter au moyen d'une seule caractéristique principale, mais bien au contraire, au travers d'un ensemble de caractéristiques et de leur conjugaison à des degrés divers.
Cette remarque prend un relief tout particulier pour la caisse *ALPHA* 2 (caisse des cadres qui est complémentaire à *ALPHA* 1) caractérisée au niveau des fonctions de répartition par une très forte variabilité liée, outre le nombre d'assurés restreint (132 assurés), au financement important consenti et à l'absence d'un salaire plafond. Les irrégularités par "paliers" constatées pour *ALPHA* 2 proviennent pour l'essentiel de la structure des salaires qui est également variable par "palier" (employés au salaire moyen élevé, puis un saut important pour les cadres moyens à la formation hautement spécialisée, compte tenu du secteur d'activité, et finalement un saut important pour les cadres supérieurs).
Les sauts importants constatés autour de la valeur 0 de même que l'importance des valeurs négatives dans certains cas s'expliquent, au niveau des deux fonctions de répartition par la présence d'un plus ou moins grand nombre de personnes proches de l'âge de la retraite (probabilités d'invalidité et de décès plus élevées) donnant lieu au versement de prestations réduites auxquelles sont associées des sommes sous le risque négatives.
Au nombre des caractéristiques essentielles qui auront une incidence plus ou moins prononcée sur la variabilité des charges annuelles découlant des risques d'invalidité et de décès, mesurée au moyen de coefficient de variation $\sigma/E$ et des valeurs possibles limite auxquelles sont associées des probabilités de 99%, respectivement 99,9% ou 99,99%, soit

$$\overset{coll}{F}{}^{-1}(99\%),\quad \overset{coll}{F}{}^{-1}(99{,}9\%)\quad \text{et}\quad \overset{coll}{F}{}^{-1}(99{,}99\%)$$

nous relevons l'incidence prédominante conjointe

- du nombre d'assurés
- du financement total consenti pour le plan de prévoyance
- du plafond de salaire annuel assuré

outre les incidences provoquées par d'autres caractéristiques structurelles de la caisse liées au plan de prévoyance, telle la répartition entre hommes et femmes.

Il est intéressant de constater que le coefficient de variation $\sigma/E$ s'inscrit pour l'ensemble des caisses considérées entre 0,25 et 2,4 (soit environ 10 fois plus) et que parallèlement les valeurs limites

$$\overset{coll}{F}{}^{-1}(99\%), \quad \overset{coll}{F}{}^{-1}(99{,}9\%), \quad \overset{coll}{F}{}^{-1}(99{,}99\%)$$

rapportées à l'espérance mathématique $E$ s'étendent respectivement de 1,7; 1,9 et 2,1 à 11,3; 18,1 et 24,3.

Notons que la conjugaison d'un nombre restreint d'assurés (132), d'un financement élevé (24%) associés à l'absence d'un salaire plafond, telle qu'elle se trouve réalisée pour *ALPHA* 2 conduit à la variabilité maximum constatée (coefficient de variation de 2,405 et valeurs-limites égales respectivement à 11,3; 18,1 et 24,3).

Dans ce contexte, il y a lieu de relever que pour une institution de prévoyance similaire, telle *ALPHA* 4, de par la nature des prestations assurées et par le nombre d'assurés (104), le coefficient de variation et les valeurs limites sont réduites par l'effet conjugué d'un financement inférieur (15% au lieu de 24%) et de la prise en compte d'un salaire plafond, dans le cas particulier fr. 60000.–. Nous avons en effet pour *ALPHA* 4 $\sigma/E = 1{,}655$ et les valeurs limites égales à 7,8; 11,6 et 15,5 qu'il y a lieu de mettre en parallèle avec les valeurs délivrées pour *ALPHA* 2.

Relevons également que pour un nombre d'assuré double et un plafond de salaire égal à fr. 40000.– (inférieur à fr. 60000.–), nous avons pour *ALPHA* 1 un coefficient de variation et des valeurs limites pratiquement identiques à celles de *ALPHA* 4. Identité dont l'origine est liée au financement supérieur de *ALPHA* 1.

La comparaison des valeurs propres à *ALPHA* 3 et à *ALPHA* 5 confirme pour un nombre d'assurés voisins (447 et 508) l'accroissement important du coefficient de variation (0,822 et 1,307) et des valeurs limites dû à un accroissement du niveau de financement conjugué à un accroissement du salaire plafond.

Toujours pour un nombre constant d'assurés, *ALPHA* 6 au financement supérieur à *ALPHA* 7 (19,5% au lieu de 16%) présente des valeurs caractéristiques voisines à celles de *ALPHA* 7 par l'effet de l'introduction d'un

plafond de salaire assuré que *ALPHA* 7 ne connaît pas mais qui présente par ailleurs une proportion relativement élevée de femmes (63%).
Au vu des éléments chiffrés qui précèdent et des graphiques présentant la fonction de répartition du coût d'un sinistre et celle de la charge annuelle, le seul critère du nombre d'assurés ne peut suffire pour se prononcer sur le risque global et l'eqúilibre financier à court-terme qui en résulte d'une institution de prévoyance. Seule la présence d'un nombre d'assurés supérieur à quelques milliers, de l'ordre de 5000 pourrait, le cas échéant, justifier le recours à ce seul critère pour justifier l'utilisation d'un modèle "standard" de caisse fonction de ce seul paramètre. Signalons que la très grande majorité des institutions de prévoyance existantes présentent un nombre d'assurés actifs très inférieur à ce nombre.
Pour clore ces quelques commentaires découlant des résultats, une analyse de l'équilibre financier à court-terme, au sens des développements et fonctions de répartition délivrées conduisant à l'adoption ultérieure d'éventuelles mesures de transfert des risques par le canal de la réassurance, s'impose lorsque le coefficient de variation $\sigma/E$ de la charge annuelle, constaté lors d'un premier calcul au moyen des formules appropriées de la théorie du risque collectif, présente une valeur supérieure à 1. Par ailleurs, signalons qu'en toute vraisemblance et sous réserve de la présence de fonds libres d'engagement importants, une réassurance devra être prise en considération lorsque disposant de la fonction de répartition, les rapports limites

$$\overset{coll}{F}{}^{-1}(99\%) \quad \text{et} \quad \overset{coll}{F}{}^{-1}(99{,}9\%)$$

sont supérieurs à 5 respectivement 7.

## 4 Réalité et simulation

La réalité concrète d'une caisse de pensions année après année est caractérisée par:

– le nombre réel de sinistres: 0, 1, 2 ou plus

et par

– le coût réel de ces sinistres qui sera un montant bien défini.

Pour cerner la réalité des écarts financiers découlant des charges réelles des sinistres d'invalidité et de décès d'une institution de prévoyance donnée par

rapport à sa valeur moyenne escomptée et pour en extraire les conclusions qui s'imposent en matière d'équilibre financier à court terme, il y a, outre le modèle théorique des variations possibles des charges annuelles développé sous point 2, la possibilité de conduire un certain nombre de simulations. Ces simulations permettent d'une part de générer la variabilité des écarts réels, mais aussi d'autre part de tester la validité du modèle théorique développé.
Ainsi, pour une simulation portant sur $n$ valeurs de la charge annuelle découlant de la réalisation des risques d'invalidité et de décès, soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nous désignons par $c(x)$ le compteur de tous les $x_i \leqslant x$. Il s'ensuit que $c(x)/n$ est un estimateur de la fonction de répartition réelle $F(x)$.
Compte tenu du fait que la valeur $\hat{F}(x) = \hat{p} = c(x)/n$ est obtenue au moyen d'un échantillon aléatoire, il en résulte une approximation entachée d'erreur, au même titre que pour tout autre échantillon aléatoire.
Dès lors que $c(x)$ suit une loi binomiale de paramètre $p = F(x)$ et $q = 1 - F(x)$ où $F(x)$ est la fonction réelle inconnue, $c(x)/n$ suit une loi binomiale dont l'écart-type est donné par

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{F(x)(1 - F(x))}{n}} \tag{8}$$

En assimilant $\overset{coll}{F}(x)$ à $F(x)$, la fonction simulée $\hat{F}(x) = c(x)/n$ devra présenter dans une bande délimitée par

$\overset{coll}{F}(x) \pm 1 \cdot \sigma_{\underset{x}{coll}}$ 68,33% de points et dans une bande délimitée

par

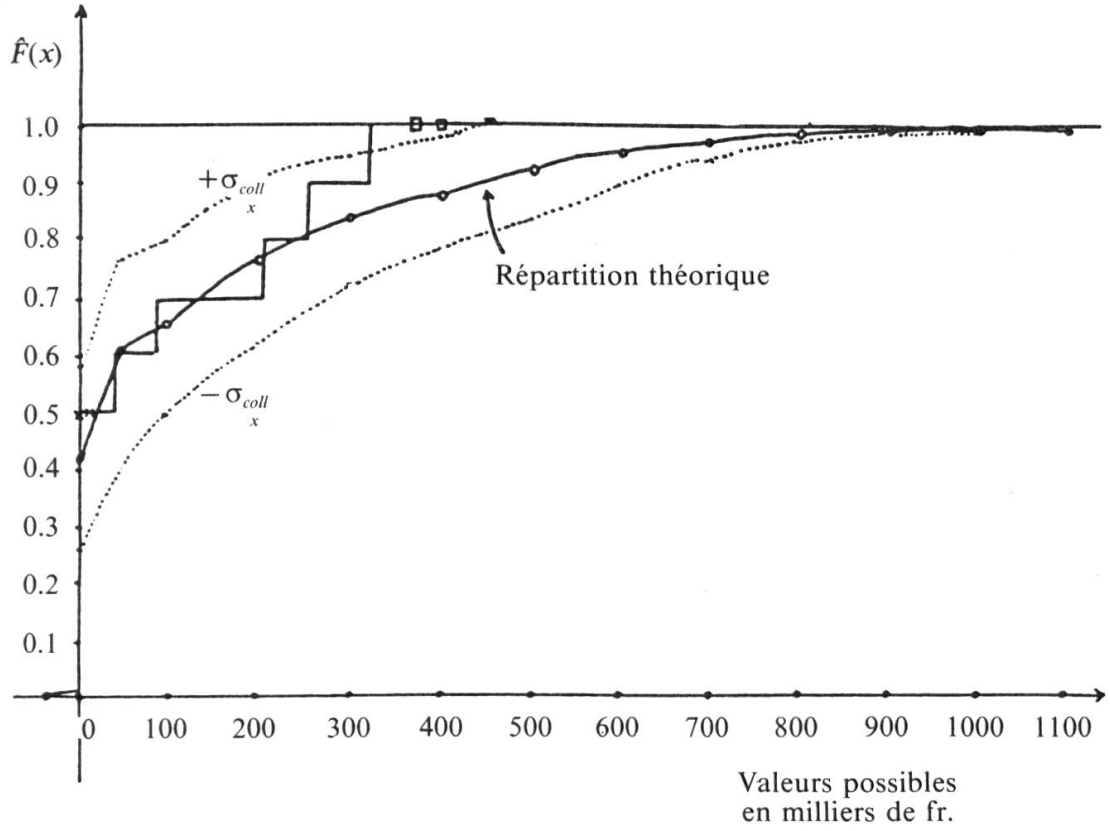
$\overset{coll}{F}(x) \pm 2 \cdot \sigma_{\underset{x}{coll}}$ 95,45% de points.

A titre d'illustration, nous avons procédé à une simulation portant sur 10 années de charge annuelle totale simulée pour la caisse de pensions *ALPHA* 1 et avons obtenu les résultats suivants:

| Année $i$ | Nombre de sinistres | Charge annuelle<br>Valeur de $x_i$ en milliers de fr. |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 80 |
| 4 | 1 | 330 |
| 5 | 0 | 0 |
| 6 | 2 | 250 |
| 7 | 0 | 0 |
| 8 | 2 | 200 |
| 9 | 1 | 40 |
| 10 | 0 | 0 |
| Total | 7 | 900 |

| Statistique sur 10 ans | Simulation | Valeurs théoriques |
|---|---|---|
| Nombre de sinistres | 7 | 9,17 |
| Coût moyen d'un sinistre | 128 600.– | 136 300.– |
| Coût moyen des charges annuelles | 90 000.– | 125 200.– |

Le graphe de la fonction de répartition des charges annuelles simulées se présente comme il suit:



Sur 11 valeurs possibles (0, 40, ..., 400)

9 valeurs de $\hat{F}^{coll}(x)$ se situent dans $\pm$ 1 $\sigma$(théoriquement: 7)

2 valeurs de $\hat{F}^{coll}(x)$ se situent hors $\pm$ 1 $\sigma$ (théoriquement: 4)

E. Kuhn
Kuhn & Seal
1143 Apples

## Bibliographie

[1] *Amsler, M.-H./Mattini, Patricia*: Un modèle markovien pour le risque d'invalidité. De la théorie à la pratique. Sujet présenté au colloque *ASTIN* 1985 à Biarritz.

[2] *Beard, R.E./Pentikaïnen, T./Pesonen, E.*: Risk Theory, Third Edition. Chapman and Hall, London 1984.

[3] *Bühlmann, H.*: Mathematical Methods in Risk Theory. Springer, 1970.

[4] *Crelier, R.*: L'évolution de la mortalité dans l'assurance collective suisse durant les années 1976 à 1980. BAAS, Vol. 83, Cahier 2, 161–181.

[5] *Deprez, O.*: Stabilitätskriterien für das Risiko einer Pensionskasse. MVSVM, Band 82, Heft 1, 43–65.

[6] *Gerber, H.U.*: An introduction to mathematical risk-theory. Huebner, 1979.

[7] *Held, R.P.*: Zur rekursiven Berechnung von Stop-Loss – Prämien für Pensionskassen. MVSVM, Band 82, Heft 1, 67–89.

[8] *Heubeck, K.*: Urnenmodelle und ihre Anwendung in der Versicherungsmathematik. Blätter der DGVM, Band XI, Heft 3, 1974, 371–429.

[9] *Hürlimann, W.*: Semikursive Berechnung von Gesamtschadenverteilung und exakte Stop-Loss-Prämien. MVSVM, Band 85, Heft 2, 175–188.

[10] *Kuhn, E.*: Sur le risque collectif d'une caisse de pensions et sa représentation mathématique. Thèse Université de Lausanne, 1978.

[11] *Matt, K.*: Invaliditätsstatistik 1976/80 in der Kollektiversicherung. MVSVM, Band 83, Heft 2, 183–202.

[12] *Romer, B.*: Selbstbehalt und Sicherheits-Reserve einer Pensionskasse. MVSVM, Band 75, Heft 1, 47–70.

[13] *Seal, H.L.*: The mathematical Risk of a lump sum death benefit in a trusteed pension plan. TASA, vol. V., 1953, 135–142.

[14] *Seal, H.L.*: Stochastic Theory of a risk business. Wiley, 1969.

## Résumé

L'article démontre à l'appui d'un certain nombre de cas pratiques que pour satisfaire à l'exigence de l'équilibre financier à court terme, compte tenu des aléas financiers réels que doit pouvoir supporter l'institution de prévoyance liés à la charge annuelle découlant des risques d'invalidité et de décès, l'utilisation des résultats du risque collectif s'avère nécessaire.
La diversité constatée des fonctions de répartition de la charge annuelle est générée non seulement, dans le cadre d'un plan de prévoyance standard, par le nombre d'assurés, mais conjointement par d'autres paramètres qui peuvent se révéler tout aussi, si ce n'est plus, importants tels le niveau de financement, le plafond de salaire assuré et d'éventuelles autres structures découlant des caractéristiques de la caisse. Cette diversité appelle au niveau de la recherche de l'équilibre financier de la caisse à court terme le recours aux méthodes développées par le modèle de la théorie du risque collectif. Le modèle théorique développé et utilisé pourra valablement être cautionné au moyen de simulations appropriées.

## Zusammenfassung

Gestützt auf eine Anzahl praktischer Fälle, wird in der vorliegenden Arbeit gezeigt, dass zur Erreichung des kurzfristigen finanziellen Gleichgewichts die Anwendung der kollektiven Risikotheorie notwendig wird, wobei auch die tatsächlichen finanziellen Risiken der Pensionskasse in Betracht gezogen werden müssen.
Die Mannigfaltigkeit verschiedener Verteilungen der jährlichen Schadenbelastung im Rahmen eines standardisierten Vorsorgeplanes wird nicht nur erzeugt durch die sich ständig ändernde Anzahl der Versicherten, sondern hängt gleichzeitig – oft sogar stärker – ab von weiteren Parametern, wie Beitragsniveau, versichertem Höchstlohn und anderen charakteristischen Grössen des betreffenden Planes. Gerade diese Vielfalt erfordert den Gebrauch der kollektiven Risikotheorie. Das entwickelte Modell kann durch geeignete Simulationen ausgetestet werden.

## Abstract

Based on a number of actual cases this article proves that in order to obtain financial equilibrium at short term the use of the collective risk theory becomes necessary if the real life financial risks of a pension fund are to be taken into account.
The diversity of different distributions of the annual claims load in the framework of a standard pension plan is not only generated by the varying number of insureds but at the same time depends – some times even more so – on other parameters like the fund level, the maximum salary insured and other characteristics of the plan in question. It is precisely this diversity which requires the use of methods from the collective risk theory. The model thus used could also be tested to some extent by appropriate simulations.