Zeitschrift: Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries

Herausgeber: Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker

Band: - (1993)

Heft: 2

Artikel: Modèles mathématiques pour actifs et invalides

Autor: Chuard, Philippe

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-551245

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

PHILIPPE CHUARD, Pully

Modèles mathématiques pour actifs et invalides

1. Préambule

On satisfait aux nécessités actuarielles de l'assurance en cas d'incapacité de gain en séparant actifs et invalides dans l'ordre l_x des vivants. Chacun de ces groupes de personnes a sa propre mortalité: q_x^a pour les actifs, q_x^i pour les invalides[1]. Dans le schéma couramment utilisé, et dont l'origine remonte à des études faites il y a plus de cent ans, intervient une probabilité i_x de devenir invalide. Or l'invalidité n'est pas nécessairement, pour chaque individu concerné, un stade définitif. Elle peut éventuellement être suivie d'un retour à l'activité, que l'on désigne par réactivité.

La probabilité i_x tient compte à la fois du risque de devenir invalide et de l'éventualité de redevenir actif. On peut cependant désirer voir apparaître explicitement la probabilité de réactivité. Une étude parue en 1978 désigne par «modèle pratique» le schéma qui dépend de i_x et par «modèle rationnel» celui dans lequel interviennent la probabilité I_x d'invalidité et celle R_x de réactivité[2]. La comparaison de ces deux modèles conduit à des constatations intéressantes, illustrées par des formules simples. Mais une contrainte est imposée à I_x et à R_x: l'assuré qui devient invalide entre les âges x et $x+1$ ne peut pas, durant cette période, redevenir actif; il en va de même pour une réactivité suivie d'invalidité.

En renonçant à cette contrainte on serre la réalité de plus près. Le «modèle rationnel B», qui sera examiné plus loin, est un pas fait dans cette direction. Il dépend des probabilités $\underline{I}_x$ d'invalidité et $\underline{R}_x$ de réactivité. Ce cas est évidemment moins simple que le «modèle rationnel A», dans lequel interviennent I_x et R_x.

[1] Les développements qui suivent valent aussi bien pour les femmes que pour les hommes: x peut partout être remplacé par y.
[2] Réf. [1].

2. Interaction de l'invalidité et de la réactivité

D'une manière générale, à l'intérieur de l'année limitée par les âges x et $x+1$, dans un modèle sur lequel agissent les probabilités

q_x^a	de décès d'actif,
q_x^i	de décès d'invalide,
I_x	d'invalidité (sans contrainte),
R_x	de réactivité (sans contrainte),

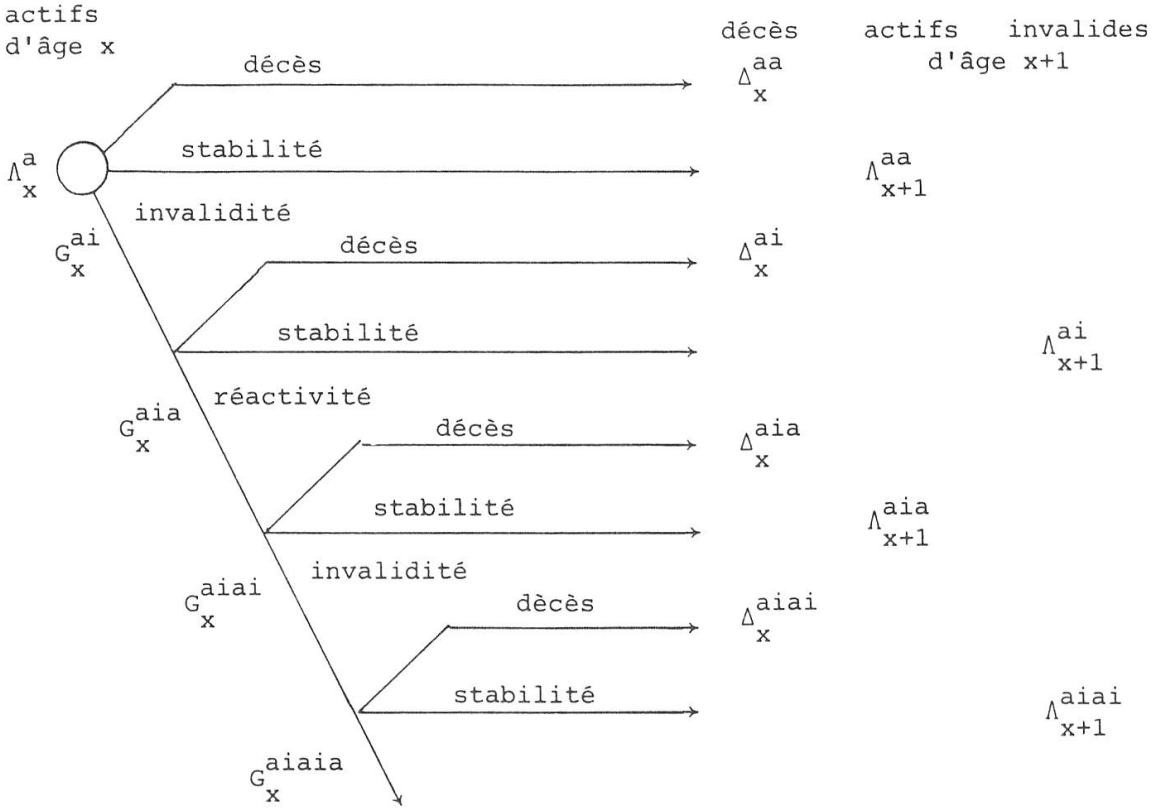
l'invalidité peut être suivie de réactivité, et réciproquement, sans limitation du nombre des passages d'un état à l'autre. Admettons qu'au début de la tranche d'âges considérée, on dénombre Λ_x^a actifs. Parmi eux:

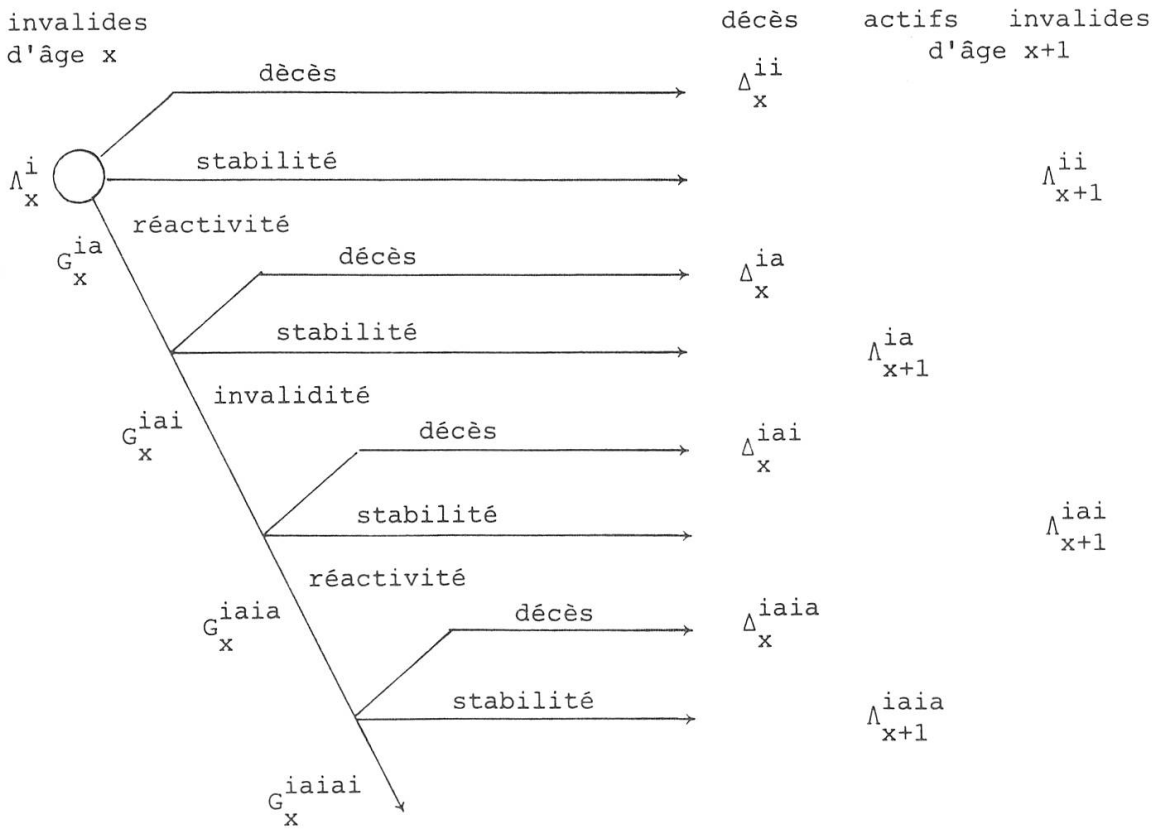
Δ_x^{aa}	décèdent à l'état d'actif,
Λ_{x+1}^{aa}	restent actifs,
G_x^{ai}	deviennent invalides; parmi eux:
Δ_x^{ai}	décèdent à l'état d'invalide,
Λ_{x+1}^{ai}	restent invalides,
G_x^{aia}	redeviennent actifs; parmi eux:
Δ_x^{aia}	décèdent à l'état d'actif,
Λ_{x+1}^{aia}	restent actifs,
G_x^{aiai}	redeviennent invalides, parmi eux:
Δ_x^{aiai}	décèdent à l'état d'invalide,
Λ_{x+1}^{aiai}	restent invalides,
G_x^{aiaia}	redeviennent actifs; etc.

De même, à partir de Λ_x^i invalides, on arrive aux nombres

Δ_x^{ii}, Λ_{x+1}^{ii}, G_x^{ia}, Δ_x^{ia}, Λ_{x+1}^{ia}, G_x^{iai}, Δ_x^{iai}, Λ_{x+1}^{iai}, G_x^{iaia}, Δ_x^{iaia}, Λ_{x+1}^{iaia}, G_x^{iaiai}; etc.

Le schéma de la page suivante illustre ces situations.


actifs
d'âge x
décès
actifs invalides
d'âge x+1
Λ_x^a
décès
Δ_x^{aa}
stabilité
Λ_{x+1}^{aa}
invalidité
G_x^{ai}
décès
Δ_x^{ai}
stabilité
Λ_{x+1}^{ai}
réactivité
G_x^{aia}
décès
Δ_x^{aia}
stabilité
Λ_{x+1}^{aia}
invalidité
G_x^{aiai}
dècès
Δ_x^{aiai}
stabilité
Λ_{x+1}^{aiai}
G_x^{aiaia}


invalides
d'âge x
décès
actifs invalides
d'âge x+1
Λ_x^i
dècès
Δ_x^{ii}
stabilité
Λ_{x+1}^{ii}
réactivité
G_x^{ia}
décès
Δ_x^{ia}
stabilité
Λ_{x+1}^{ia}
invalidité
G_x^{iai}
décès
Δ_x^{iai}
stabilité
Λ_{x+1}^{iai}
réactivité
G_x^{iaia}
décès
Δ_x^{iaia}
stabilité
Λ_{x+1}^{iaia}
G_x^{iaiai}

3. Modèles

Compte tenu des développements du paragraphe précédent, le nombre des actifs d'âge $x+1$ s'élève à

$$\Lambda^{a}_{x+1} = \Lambda^{aa}_{x+1} + \Lambda^{ia}_{x+1} + \Lambda^{aia}_{x+1} + \Lambda^{iaia}_{x+1} + \cdots \tag{1}$$

et celui des invalides d'âge $x+1$, à

$$\Lambda^{i}_{x+1} = \Lambda^{ii}_{x+1} + \Lambda^{ai}_{x+1} + \Lambda^{iai}_{x+1} + \Lambda^{aiai}_{x+1} + \cdots \tag{2}$$

Si la réactivité n'intervient pas de manière explicite, il en résulte que

$$\left.\begin{aligned} \Lambda^{a}_{x+1} &= \Lambda^{aa}_{x+1} \\ \Lambda^{i}_{x+1} &= \Lambda^{ii}_{x+1} + \Lambda^{ai}_{x+1} \end{aligned}\right\} \qquad 1^{\text{er}} \text{ cas} \tag{3}$$

Les nombres G^{aia}_{x} et G^{ia}_{x} sont alors nuls.

Si elle intervient mais ne peut pas être suivie d'une invalidité avant l'âge $x+1$, et vice versa, on a

$$\left.\begin{aligned} \Lambda^{a}_{x+1} &= \Lambda^{aa}_{x+1} + \Lambda^{ia}_{x+1} \\ \Lambda^{i}_{x+1} &= \Lambda^{ii}_{x+1} + \Lambda^{ai}_{x+1} \end{aligned}\right\} \qquad 2^{\text{e}} \text{ cas} \tag{4}$$

Les nombres G^{aia}_{x} et G^{iai}_{x} sont alors nuls.

Si l'on fait un pas de plus en admettant que ce sont les G^{aiai}_{x} et G^{iaia}_{x} qui sont nuls, cela conduit à

$$\left.\begin{aligned} \Lambda^{a}_{x+1} &= \Lambda^{aa}_{x+1} + \Lambda^{ia}_{x+1} + \Lambda^{aia}_{x+1} \\ \Lambda^{i}_{x+1} &= \Lambda^{ii}_{x+1} + \Lambda^{ai}_{x+1} + \Lambda^{iai}_{x+1} \end{aligned}\right\} \qquad 3^{\text{e}} \text{ cas} \tag{5}$$

Le 1er cas est celui du modèle pratique et le 2e celui du modèle rationnel (désigné dans la suite par «modèle rationnel A»), objets l'un et l'autre de l'étude mentionnée dans le préambule. Le 3e cas sert de base à un «modèle rationnel B» qui sera examiné plus loin, au paragraphe 6. Les trois modèles font tous intervenir les probabilités

q^{a}_{x} de décès d'actif,

q^{i}_{x} de décès d'invalide.

Ils dépendent en outre de probabilités d'invalidité que nous désignons par

i_x dans le cas du modèle pratique,

I_x dans le cas du modèle rationnel A,

$\underline{I}_x$ dans le cas du modèle rationnel B.

Quant aux probabilités de réactivité, nous les désignons par

R_x dans le cas du modèle rationnel A,

$\underline{R}_x$ dans le cas du modèle rationnel B.

4. Modèle pratique

Reprenons les développements de l'étude citée[3], avec une légère modification de symbole: l_x^{aa} au lieu de l_x^a.
En introduisant dans les relations (3) les valeurs

$$l_{x+1}^{aa} = l_x^{aa}(1 - q_x^a)(1 - i_x) \tag{6}$$

$$\lambda_{x+1}^{ii} = \lambda_x^i(1 - q_x^i) \tag{7}$$

$$l_{x+1}^{ai} = l_x^{aa}\, i_x \left(1 - \frac{1}{2} q_x^a\right) \frac{1 - q_x^i}{1 - \frac{1}{2} q_x^i} \tag{8}$$

on obtient les formules de récurrence pour l'ordre l_x^{aa} des actifs et l'effectif λ_x^i des invalides:

$$l_{x+1}^{aa} = l_x^{aa}(1 - q_x^a)(1 - i_x) \tag{9}$$

$$\lambda_{x+1}^{i} = \lambda_x^i(1 - q_x^i) + l_x^{aa}\, i_x \left(1 - \frac{1}{2} q_x^a\right) \frac{1 - q_x^i}{1 - \frac{1}{2} q_x^i} \tag{10}$$

Observons que la probabilité q_x de décès pour tous les vivants (actifs et invalides groupés) est donnée par

$$1 - q_x = \frac{l_{x+1}^{aa} + \lambda_{x+1}^i}{l_x^{aa} + \lambda_x^i}\,.$$

On peut en outre constater que

$$q_x^a = q_x^i \quad \text{entraîne que} \quad q_x^a = q_x^i = q_x\,. \tag{12}$$

[3] Réf. [1], pp. 155 et 156.

5. Modèle rationnel A

5.1 Formules de récurrence

En désignant par q_x^a la probabilité de décès des actifs et par q_x^i celle des invalides on obtient[4]

$$\Lambda_{x+1}^{aa} = \Lambda_x^a(1-q_x^a)(1-I_x) \tag{13}$$

$$\Lambda_{x+1}^{ii} = \Lambda_x^i(1-q_x^i)(1-R_x) \tag{14}$$

$$\Lambda_{x+1}^{ai} = \Lambda_x^a\, I_x\left(1-\frac{1}{2}q_x^a\right)\frac{1-q_x^i}{1-\frac{1}{2}q_x^a} \tag{15}$$

$$\Lambda_{x+1}^{ia} = \Lambda_x^i\, R_x\left(1-\frac{1}{2}q_x^i\right)\frac{1-q_x^a}{1-\frac{1}{2}q_x^a} \tag{16}$$

L'introduction de ces valeurs dans (4) conduit aux relations de récurrence

$$\Lambda_{x+1}^{a} = \Lambda_x^a(1-q_x^a)(1-I_x) + \Lambda_x^i\, R_x\left(1-\frac{1}{2}q_x^i\right)\frac{1-q_x^a}{1-\frac{1}{2}q_x^a} \tag{17}$$

$$\Lambda_{x+1}^{i} = \Lambda_x^i(1-q_x^i)(1-R_x) + \Lambda_x^a\, I_x\left(1-\frac{1}{2}q_x^a\right)\frac{1-q_x^i}{1-\frac{1}{2}q_x^i} \tag{18}$$

La mortalité générale est définie par

$$1-q_x = \frac{\Lambda_{x+1}^a + \Lambda_{x+1}^i}{\Lambda_x^a + \Lambda_x^i} \tag{19}$$

En outre on observe que

$$q_x^a = q_x^i \quad \text{entraîne que} \quad q_x^a = q_x^i = q_x\,.$$

[4] Réf. [1], pp. 156 à 158.

5.2 *Passage du modèle rationnel A au modèle pratique*

Si l'on fait correspondre le modèle rationnel A au modèle pratique en posant les égalités

$$l_x^{aa} = \Lambda_x^a \qquad \lambda_x^i = \Lambda_x^i \tag{20}$$

$$l_{x+1}^{aa} = \Lambda_{x+1}^a \tag{21}$$

$$\lambda_{x+1}^i = \Lambda_{x+1}^i \tag{22}$$

la relation (21), compte tenu de (9) et de (17), ainsi que la relation (22), compte tenu de (10) et de (18), conduisent l'une et l'autre à

$$i_x = I_x - \frac{\Lambda_x^i}{\Lambda_x^a} R_x \frac{1 - \frac{1}{2} q_x^i}{1 - \frac{1}{2} q_x^a} \tag{23}$$

Il en résulte qu'en tenant compte de cette relation on obtient la même évolution pour le nombre des actifs et pour celui des invalides dans le modèle rationnel A et dans le modèle pratique. La mortalité générale q_x, définie par (19), est alors la même que celle définie par (11).

5.3 *Relation particulière*

La formule (18) permet d'écrire

$$\Lambda_x^a \, I_x \left(1 - \frac{1}{2} q_x^a\right) \frac{2}{1 + \frac{1}{1 - q_x^i}} = \Lambda_{x+1}^i - \Lambda_x^i (1 - q_x^i)(1 - R_x)$$

d'où

$$\frac{1}{1 - q_x^i} = \frac{2 \, \Lambda_x^a \, I_x \left(1 - \frac{1}{2} q_x^a\right)}{\Lambda_{x+1}^i - \Lambda_x^i (1 - q_x^i)(1 - R_x)} - 1 \, .$$

En posant

$$I_x \left(1 - \frac{1}{2} q_x^a\right) = {}^*I_x \, , \qquad (1 - q_x^i)(1 - R_x) = 1 - s_x^i \, ,$$

$$\Lambda_x^a = (1 - j_x) l_x \, , \qquad \Lambda_x^i = j_x \, l_x \, , \qquad \Lambda_{x+1}^i = j_{x+1} (1 - q_x) l_x \, ,$$

on met la relation ci-dessus sous la forme

$$\frac{1}{1-q_x^i} = \frac{2(1-j_x)\,{}^*I_x}{j_{x+1}(1-q_x) - j_x(1-s_x^i)} - 1$$

qui est publiée, quelque peu modifiée, à la page 72 de l'article cité sous Réf. [2]. Précisons que son domaine de validité est le modèle rationnel A.

6. Modèle rationnel B

6.1 Formules de récurrence

Dans le modèle rationnel B nous utilisons des symboles *soulignés* pour les probabilités d'invalidité et de réactivité, de même que pour les nombres de personnes que font intervenir les schémas du paragraphe 2.
Les deux relations

$$\underline{\Lambda}_{x+1}^{aa} = \underline{\Lambda}_x^a(1-q_x^a)(1-\underline{I}_x) \tag{24}$$

$$\underline{\Lambda}_{x+1}^{ii} = \underline{\Lambda}_x^i(1-q_x^i)(1-\underline{R}_x) \tag{25}$$

s'établissent comme les relations correspondantes (13) et (14) du modèle rationnel A.
Pour la suite nous nous référons aux schémas du paragraphe 3. La relation

$$\underline{\Lambda}_x^a = \underline{\Delta}_x^{aa} + \underline{\Lambda}_{x+1}^{aa} + \underline{G}_x^{ai}$$

est vérifiée pour

$$\underline{\Delta}_x^{aa} = \underline{\Lambda}_x^a\,{}^*q_x^{aa} = \underline{\Lambda}_x^a\,q_x^a\left(1-\frac{1}{2}\,\underline{I}_x\right)$$

$$\underline{G}_x^{ai} = \underline{\Lambda}_x^a\,{}^*\underline{I}_x = \underline{\Lambda}_x^a\,\underline{I}_x\left(1-\frac{1}{2}\,\underline{q}_x^a\right) \tag{26}$$

et $\underline{\Lambda}_{x+1}^{aa}$ défini par (24).

La relation ultérieure

$$\underline{G}_x^{ai} = \underline{\Delta}_x^{ai} + \underline{\Lambda}_{x+1}^{ai} + \underline{G}_x^{aia}$$

fait intervenir l'âge $x+\frac{1}{2}$ et la durée $\frac{1}{2}$; elle est vérifiée par

$$\begin{aligned}
\underline{\Delta}_x^{ai} &= \underline{G}_x^{ai}\ {}_{\frac{1}{2}}^{*}q_{x+\frac{1}{2}}^{ii} = \underline{G}_x^{ai}\frac{\frac{1}{2}q_x^i}{1-\frac{1}{2}q_x^i}\frac{1-\frac{3}{4}\underline{R}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{R}_x}\\
\underline{G}_x^{aia} &= \underline{G}_x^{ai}\ {}_{\frac{1}{2}}^{*}\underline{R}_{x+\frac{1}{2}} = \underline{G}_x^{ai}\frac{\frac{1}{2}\underline{R}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{R}_x}\frac{1-\frac{3}{4}q_x^i}{1-\frac{1}{2}q_x^i} \qquad (27)\\
\underline{\Lambda}_{x+1}^{ai} &= \underline{G}_x^{ai}\left(1-{}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{i}\right)\left(1-{}_{\frac{1}{2}}\underline{R}_{x+\frac{1}{2}}\right) = \underline{G}_x^{ai}\frac{1-q_x^i}{1-\frac{1}{2}q_x^i}\frac{1-\underline{R}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{R}_x}
\end{aligned}$$

On peut donc écrire, compte tenu de (26),

$$\underline{\Lambda}_{x+1}^{ai} = \underline{\Lambda}_x^{a}\ \underline{I}_x\left(1-\frac{1}{2}q_x^a\right)\frac{1-q_x^i}{1-\frac{1}{2}q_x^i}\frac{1-\underline{R}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{R}_x}\,. \qquad (28)$$

Les probabilités utilisées pour $\underline{\Delta}_x^{ai}$, $\underline{G}_x^{aia}$ et $\underline{\Lambda}_{x+1}^{ai}$ découlent des développements suivants:

$${}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{i} = 1-\frac{2l_{x+1}^i}{l_x^i+l_{x+1}^i} = 1-\frac{2(1-q_x^i)}{1+(1-q_x^i)} = \frac{\frac{1}{2}q_x^i}{1-\frac{1}{2}q_x^i}\,;$$

de même ${}_{\frac{1}{2}}\underline{R}_{x+\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}\underline{R}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{R}_x}$;

$${}_{\frac{1}{2}}^{*}q_{x+\frac{1}{2}}^{ii} = {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{i}\left(1-\frac{1}{2}\,{}_{\frac{1}{2}}\underline{R}_{x+\frac{1}{2}}\right) = \frac{\frac{1}{2}q_x^i}{1-\frac{1}{2}q_x^i}\frac{1-\frac{3}{4}\underline{R}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{R}_x}\,;$$

de même ${}_{\frac{1}{2}}^{*}\underline{R}_{x+\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}\underline{R}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{R}_x}\dfrac{1-\frac{3}{4}q_x^i}{1-\frac{1}{2}q_x^i}$.

La relation qui vient ensuite est

$$\underline{G}_x^{aia} = \underline{\Delta}_x^{aia} + \underline{\Lambda}_{x+1}^{aia}\,.$$

Faisant intervenir l'âge $x+\frac{3}{4}$ et la durée $\frac{1}{4}$ elle est vérifiée par

$$\begin{aligned}
\underline{\Delta}_x^{aia} &= \underline{G}_x^{aia}\ {}_{\frac{1}{4}}q_{x+\frac{3}{4}}^{a} = \underline{G}_x^{aia}\frac{\frac{1}{4}\,q_x^a}{1-\frac{3}{4}q_x^a}\\
\underline{\Lambda}_{x+1}^{aia} &= \underline{G}_x^{aia}\left(1-{}_{\frac{1}{4}}q_{x+\frac{3}{4}}^{a}\right) = \underline{G}_x^{aia}\frac{1-q_x^a}{1-\frac{3}{4}q_x^a}
\end{aligned}$$

On peut donc écrire, compte tenu de (26) et (27),

$$\underline{\Lambda}^{aia}_{x+1} = \underline{\Lambda}^{a}_{x}\,\underline{I}_x\left(1-\frac{1}{2}q^a_x\right)\frac{\frac{1}{2}\underline{R}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{R}_x}\,\frac{1-\frac{3}{4}q^i_x}{1-\frac{1}{2}q^i_x}\,\frac{1-q^a_x}{1-\frac{3}{4}q^a_x}\,. \tag{29}$$

Rappelons que

$$1-{}_{\frac{1}{4}}q^{a}_{x+\frac{3}{4}} = \frac{4l^a_{x+1}}{l^a_x+3l^a_{x+1}} = \frac{4(1-q^a_x)}{1+3(1-q^a_x)} = \frac{1-q^a_x}{1-\frac{3}{4}q^a_x}\,.$$

Par des développements analogues, à partir de $\underline{\Lambda}^{ia}_x$, on obtient

$$\underline{\Lambda}^{ia}_{x+1} = \underline{\Lambda}^{i}_{x}\,\underline{R}_x\left(1-\frac{1}{2}q^i_x\right)\frac{1-q^a_x}{1-\frac{1}{2}q^a_x}\,\frac{1-\underline{I}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{I}_x} \tag{30}$$

$$\underline{\Lambda}^{iai}_{x+1} = \underline{\Lambda}^{i}_{x}\,\underline{R}_x\left(1-\frac{1}{2}q^i_x\right)\frac{\frac{1}{2}\underline{I}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{I}_x}\,\frac{1-\frac{3}{4}q^a_x}{1-\frac{1}{2}q^a_x}\,\frac{1-q^i_x}{1-\frac{3}{4}q^i_x} \tag{31}$$

Les relations de récurrence pour l'effectif des actifs et pour celui des invalides sont alors

$$\begin{aligned}\underline{\Lambda}^{a}_{x+1} = {}& \underline{\Lambda}^{a}_{x}(1-q^a_x)(1-\underline{I}_x) + \underline{\Lambda}^{i}_{x}\,\underline{R}_x\left(1-\frac{1}{2}q^i_x\right)\frac{1-q^a_x}{1-\frac{1}{2}q^a_x}\,\frac{1-\underline{I}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{I}_x} + \\ & \underline{\Lambda}^{a}_{x}\,\underline{I}_x\left(1-\frac{1}{2}q^a_x\right)\frac{\frac{1}{2}\underline{R}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{R}_x}\,\frac{1-\frac{3}{4}q^i_x}{1-\frac{1}{2}q^i_x}\,\frac{1-q^a_x}{1-\frac{3}{4}q^a_x}\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\underline{\Lambda}^{i}_{x+1} = {}& \underline{\Lambda}^{i}_{x}(1-q^i_x)(1-\underline{R}_x) + \underline{\Lambda}^{a}_{x}\,\underline{I}_x\left(1-\frac{1}{2}q^a_x\right)\frac{1-q^i_x}{1-\frac{1}{2}q^i_x}\,\frac{1-\underline{R}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{R}_x} + \\ & \underline{\Lambda}^{i}_{x}\,\underline{R}_x\left(1-\frac{1}{2}q^i_x\right)\frac{\frac{1}{2}\underline{I}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{I}_x}\,\frac{1-\frac{3}{4}q^a_x}{1-\frac{1}{2}q^a_x}\,\frac{1-q^i_x}{1-\frac{3}{4}q^i_x}\end{aligned} \tag{33}$$

La mortalité générale étant définie par

$$1-q_x = \frac{\underline{\Lambda}^{a}_{x+1}+\underline{\Lambda}^{i}_{x+1}}{\underline{\Lambda}^{a}_{x}+\underline{\Lambda}^{i}_{x}} \tag{34}$$

on observe que

$$q^a_x = q^i_x \quad \text{entraîne que} \quad q^a_x = q^i_x = q_x\,.$$

6.2 *Passage du modèle rationnel B au modèle pratique*

Si l'on pose $l_x^{aa} = \underline{\Lambda}_x^a$ et $\lambda_x^i = \underline{\Lambda}_x^i$, la relation $l_{x+1}^{aa} = \underline{\Lambda}_{x+1}^a$, compte tenu de (9) et (32), conduit à

$$i_x(l) = \underline{I}_x\left(1 - \frac{1-\frac{1}{2}q_x^a}{1-\frac{3}{4}q_x^a}\frac{1-\frac{3}{4}q_x^i}{1-\frac{1}{2}q_x^i}\frac{\frac{1}{2}\underline{R}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{R}_x}\right) - \frac{\underline{\Lambda}_x^i}{\underline{\Lambda}_x^a}\underline{R}_x\frac{1-\frac{1}{2}q_x^i}{1-\frac{1}{2}q_x^a}\frac{1-\underline{I}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{I}_x}. \tag{35}$$

Si l'on pose $l_x^{aa} = \underline{\Lambda}^a$ et $\lambda_x^i = \underline{\Lambda}_x^i$, la relation $\lambda_{x+1}^i = \underline{\Lambda}_{x+1}^i$, compte tenu de (10) et (33), conduit à

$$i_x(\lambda) = \underline{I}_x\frac{1-\underline{R}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{R}_x} - \frac{\underline{\Lambda}_x^i}{\underline{\Lambda}_x^a}\underline{R}_x\left(1 - \frac{1-\frac{3}{4}q_x^a}{1-\frac{1}{2}q_x^a}\frac{1-\frac{1}{2}q_x^i}{1-\frac{3}{4}q_x^i}\frac{\frac{1}{2}\underline{I}_x}{1-\frac{1}{2}\underline{I}_x}\right)\frac{1-\frac{1}{2}q_x^i}{1-\frac{1}{2}q_x^a}. \tag{36}$$

Ainsi, cherchant la probabilité d'invalidité i_x pour un modèle pratique correspondant au modèle rationnel B, on trouve deux valeurs, l'une $i_x(l)$ obtenue à partir de l_{x+1}^{aa}, et l'autre $i_x(\lambda)$ obtenue à partir de λ_{x+1}^i. Ces deux valeurs ne sont pas les mêmes algébriquement. Cependant la différence entre leurs montants numériques est insignifiante dans les cas ordinaires d'application. On peut en outre observer que la condition initiale $l_x^{aa} = \underline{\Lambda}_x^a$, $\lambda_x^i = \underline{\Lambda}_x^i$ conduit à

$$i_x(l) = 1 - \frac{\underline{\Lambda}_{x+1}^a}{\underline{\Lambda}_x^a}\frac{1}{1-q_x^a}. \tag{37}$$

Compte tenu des remarques précédentes on peut adopter, pour la probabilité cherchée i_x d'invalidité, les relations (35) ou (37). Dans ces conditions l'égalité $l_{x+1}^{aa} = \underline{\Lambda}_{x+1}^a$ est réalisée, alors que λ_{x+1}^i n'est pas rigoureusement égal à $\underline{\Lambda}_{x+1}^i$; mais l'écart est pratiquement insignifiant. Par conséquent on peut considérer que l'évolution du nombre des actifs et de celui des invalides ne diffère pas entre le modèle rationnnel B et le modèle pratique. Il en va de même en ce qui concerne la mortalité générale, définie par (34) pour le modèle rationnel B et par (19) pour le modèle pratique.

6.3 *Passage du modèle rationnel B au modèle rationnel A*

Comme c'est le cas pour le modèle pratique, il est possible de faire correspondre le modèle rationnel A au modèle rationnel B. Pour cela on égale le second membre de (23) à celui de (35) ou de (37). Il apparaît que la probabilité I_x d'invalidité et celle R_x de réactivité, qui interviennent dans le modèle rationnel A, dépendent l'une de l'autre. Mais le choix d'un couple de valeurs est limité par des contraintes: $R_x > 0$, $I_x < \underline{I}_x$. Une suggestion est d'adopter la proportion

$$\frac{R_x}{\underline{R}_x} = \frac{I_x}{\underline{I}_x} \,. \tag{38}$$

On obtient alors, avec $i_x(l)$ défini par (35) ou (37),

$$I_x = \frac{i_x(l)}{1 - \frac{\underline{\Lambda}_x^i}{\underline{\Lambda}_x^a} \frac{\underline{R}_x}{\underline{I}_x} \frac{1-\frac{1}{2}q_x^i}{1-\frac{1}{2}q_x^a}} \,. \tag{39}$$

La probabilité I_x étant trouvée, on calcule R_x avec (38).

7. Illustration numérique

Les développements qui précèdent se rapportent à une étape importante du cheminement qui, partant des probabilités de décès, d'invalidité et de réactivité, conduit aux valeurs actuelles servant à la gestion actuarielle des institutions de prévoyance. Leur objectif final est donc l'obtention de valeurs numériques. Il convient alors d'en fournir une illustration. C'est le but des trois tableaux annexés. Le tableau 1 fournit un exemple de modèle rationnel B. Il est construit à partir de données découlant des bases techniques EVK 1990 [5] et de probabilités de réactivité définies par $\underline{R}_x = 0{,}5 \cdot 0{,}964\,867^{x-20} - 0,1$, utilisées précédemment pour un autre exemple[6]. A partir de probabilités q_x^a et i_x (pures) ainsi que de probabilités q_x^i (directement données) ont été calculés l'ordre l_x^{aa} et l'effectif λ_x^i au moyen des formules (9) et (10). Puis la formule (35), en posant $i_x(l) = i_x$, a fourni les probabilités d'invalidité $\underline{I}_x$. Ensuite les formules (32) et (33) ont servi à calculer les effectifs $\underline{\Lambda}_x^a$ et $\underline{\Lambda}_x^i$; puis q_x a été obtenu avec (34). On peut constater

[5] Réf. [3].
[6] Réf [2], p. 73.

que les valeurs de $\underline{\Lambda}_x^a$, $\underline{\Lambda}_x^i$ et q_x sont très proches des valeurs correspondantes des bases techniques EVK 1990 [7].

Le tableau 2 indique les valeurs d'un modèle pratique correspondant au modèle rationnel B du tableau 1. La probabilité i_x d'invalidité est calculée au moyen de la formule (35); les valeurs obtenues sont exactement celles qui découlent des $*q_x^{aa}$ et $*i_x$ fournies par les bases EVK 1990 [8]. Puis l'ordre l_x^{aa}, l'effectif λ_x^i et la probabilité de décès q_x sont calculés avec les formules (9), (10) et (11).

Les résultats obtenus ne diffèrent pour ainsi dire pas de ceux qui résulteraient de l'emploi de la formule (36), au lieu de (35), pour calculer i_x. Cela confirme une remarque faite à ce sujet au paragraphe 62 ci-dessus.

Le tableau 3 indique les valeurs d'un modèle rationnel A correspondant au modèle rationnel B du tableau 1. La probabilité I_x d'invalidité est calculée au moyen de la formule (39) et celle R_x d'invalidité, avec (38). Puis les effectifs Λ_x^a et Λ_x^i résultent de l'emploi des formules (17) et (18); la probabilité q_x de décès est obtenue avec la formule (19).

Les valeurs contenues dans les tableaux 1 à 3 permettent de nombreux calculs de contrôle. Elles font apparaître la bonne correspondance entre les trois modèles présentés; en effet les trois dernières colonnes ne diffèrent pas d'un tableau à l'autre, quand bien même les formules utilisées ne sont pas les mêmes.

8. Conclusion

La décomposition de l'ordre des vivants en deux groupes d'assurés, les uns étant des actifs et les autres, des invalides, est un élément important de la construction des valeurs actuelles nécessaires à la gestion actuarielle des institutions de prévoyance. Cette décomposition peut être faite de diverses manières, entrant chacune dans le cadre d'un modèle particulier. Les mêmes probabilités de décès des actifs, et les mêmes probabilités de décès des invalides interviennent dans chaque modèle. Il n'en va pas de même pour les probabilités d'invalidité. Dans le modèle pratique, couramment utilisé, la probabilité i_x d'invalidité tient compte du fait que des invalides peuvent quitter leur état et redevenir actifs. Ce modèle ne fait donc pas intervenir explicitement la probabilité de réactivité.

[7] Réf. [3], tab. 2 et 3.
[8] Réf [3], tab. 2.

Le modèle rationnel A, présenté dans une étude[9] publiée en 1978, tient compte de probabilités I_x d'invalidité et R_x de réactivité. Mais il exclut que, durant la même année d'assurance, une invalidité soit suivie d'une réactivité, et inversément.

Cette exclusion est écartée dans le modèle rationnel B, développé dans le paragraphe 6 ci-dessus. Ce modèle fait intervenir les probabilités $\underline{I}_x$ d'invalidité et $\underline{R}_x$ de réactivité. Durant la même année d'assurance une invalidité peut être suivie d'une réactivité, et inversément; mais le nombre de ces mutations est limité à deux.

Les développements du paragraphe 6 indiquent les formules liant i_x, I_x, R_x, $\underline{I}_x$ et $\underline{R}_x$ pour que, avec les mêmes probabilités q_x^a et q_x^i, l'évolution du nombre des actifs et celle du nombre des invalides ne diffèrent pas d'un modèle à l'autre. Des tableaux annexés, décrits dans le paragraphe 7, fournissent une illustration numérique. L'extrait suivant

	Modèle pratique	Modèle rationnel A		Modèle rationnel B	
x	i_x	I_x	R_x	$\underline{I}_x$	$\underline{R}_x$
30	0,00017	0,00030	0,18594	0,00040	0,24966
40	0,00040	0,00076	0,12342	0,00089	0,14452
50	0,00198	0,00265	0,06757	0,00278	0,07100
60	0,01887	0,02014	0,01939	0,02034	0,01958

permet de constater l'influence sur les probabilités d'invalidité $(i_x, I_x, \underline{I}_x)$ de la prise en considération de probabilités de réactivité $(R_x, \underline{R}_x)$ dans les divers modèles mathématiques envisagés pour actifs et invalides.

Philippe Chuard
Avenue de Lavaux 93
1009 Pully

Références

[1] *Philippe Chuard*: Modèle pratique et modèle rationnel pour actifs et invalides. Bulletin de l'Association suisse des actuaires, Berne 1978.

[2] *Marc Chuard, Philippe Chuard*: La réactivité des invalides dans les rentes futures d'invalidité. Bulletin de l'Association suisse des actuaires, Berne, 1992.

[3] Technische Grundlagen der Eidgenössischen Versicherungskasse. EVK 1990, Bern 1992.

[9] Réf. [1].

Tableau 1: Modèle rationnel B

x	q_x^a	q_x^i	I_x	R_x	Λ_x^a	Λ_x^i	q_x
20	0.00146	0.02200	0.00007	0.40000	100000	0	0.00146
21	0.00117	0.02100	0.00009	0.38243	99849	5	0.00117
22	0.00099	0.02020	0.00011	0.36548	99727	10	0.00099
23	0.00090	0.01955	0.00013	0.34913	99623	15	0.00090
24	0.00084	0.01900	0.00015	0.33335	99529	19	0.00084
25	0.00080	0.01850	0.00018	0.31813	99439	25	0.00081
26	0.00078	0.01800	0.00021	0.30344	99353	31	0.00079
27	0.00077	0.01850	0.00025	0.28926	99268	38	0.00078
28	0.00077	0.01905	0.00030	0.27559	99181	47	0.00078
29	0.00077	0.01965	0.00035	0.26239	99093	58	0.00078
30	0.00076	0.02030	0.00040	0.24966	99002	71	0.00078
31	0.00075	0.02100	0.00046	0.23737	98911	86	0.00077
32	0.00075	0.02175	0.00051	0.22552	98817	103	0.00077
33	0.00076	0.02255	0.00056	0.21408	98722	122	0.00079
34	0.00078	0.02340	0.00060	0.20305	98624	142	0.00082
35	0.00081	0.02430	0.00066	0.19240	98523	162	0.00085
36	0.00085	0.02520	0.00071	0.18213	98416	185	0.00090
37	0.00090	0.02610	0.00075	0.17222	98303	210	0.00096
38	0.00096	0.02700	0.00079	0.16265	98183	235	0.00103
39	0.00104	0.02790	0.00083	0.15343	98056	261	0.00112
40	0.00113	0.02880	0.00089	0.14452	97919	288	0.00122
41	0.00123	0.02970	0.00095	0.13593	97769	319	0.00133
42	0.00134	0.03057	0.00103	0.12764	97605	352	0.00145
43	0.00147	0.03139	0.00113	0.11965	97425	390	0.00160
44	0.00162	0.03216	0.00127	0.11193	97225	434	0.00177
45	0.00181	0.03288	0.00144	0.10448	96999	487	0.00198
46	0.00202	0.03355	0.00162	0.09730	96741	552	0.00222
47	0.00225	0.03417	0.00184	0.09037	96450	627	0.00248
48	0.00249	0.03474	0.00211	0.08368	96120	717	0.00275
49	0.00275	0.03526	0.00241	0.07723	95746	825	0.00306
50	0.00304	0.03573	0.00278	0.07100	95324	951	0.00340
51	0.00336	0.03615	0.00323	0.06499	94846	1103	0.00378
52	0.00372	0.03652	0.00380	0.05919	94302	1284	0.00421
53	0.00410	0.03684	0.00452	0.05360	93679	1504	0.00468
54	0.00451	0.03711	0.00546	0.04821	92964	1775	0.00519
55	0.00496	0.03734	0.00668	0.04300	92135	2111	0.00578
56	0.00545	0.03754	0.00826	0.03797	91168	2534	0.00643
57	0.00597	0.03772	0.01030	0.03313	90030	3069	0.00716
58	0.00651	0.03789	0.01287	0.02845	88685	3748	0.00796
59	0.00707	0.03800	0.01614	0.02394	87094	4603	0.00884
60	0.00766	0.03790	0.02034	0.01958	85206	5680	0.00982
61	0.00828	0.03775	0.02586	0.01538	82958	7035	0.01092
62	0.00892	0.03740	0.03334	0.01133	80264	8746	0.01214
63	0.00960	0.03655	0.04394	0.00742	77006	10924	0.01346
64	0.01031	0.03540	0.05933	0.00364	73006	13741	0.01491

Tableau 2: Modèle pratique

x	q_x^a	q_x^i	i_x	l_x^{aa}	λ_x^i	q_x
20	0.00146	0.02200	0.00005	100000	0	0.00146
21	0.00117	0.02100	0.00005	99849	5	0.00117
22	0.00099	0.02020	0.00005	99727	10	0.00099
23	0.00090	0.01955	0.00005	99623	15	0.00090
24	0.00084	0.01900	0.00006	99529	19	0.00084
25	0.00080	0.01850	0.00007	99439	25	0.00081
26	0.00078	0.01800	0.00008	99353	31	0.00079
27	0.00077	0.01850	0.00010	99267	38	0.00078
28	0.00077	0.01905	0.00012	99181	48	0.00078
29	0.00077	0.01965	0.00014	99093	58	0.00078
30	0.00076	0.02030	0.00017	99003	71	0.00078
31	0.00075	0.02100	0.00019	98910	86	0.00077
32	0.00075	0.02175	0.00021	98818	103	0.00077
33	0.00076	0.02255	0.00023	98723	121	0.00079
34	0.00078	0.02340	0.00024	98625	141	0.00082
35	0.00081	0.02430	0.00028	98524	161	0.00085
36	0.00085	0.02520	0.00030	98417	184	0.00090
37	0.00090	0.02610	0.00032	98304	209	0.00096
38	0.00096	0.02700	0.00034	98184	234	0.00103
39	0.00104	0.02790	0.00036	98056	261	0.00112
40	0.00113	0.02880	0.00040	97919	289	0.00122
41	0.00123	0.02970	0.00044	97769	319	0.00133
42	0.00134	0.03057	0.00051	97606	352	0.00145
43	0.00147	0.03139	0.00059	97426	390	0.00160
44	0.00162	0.03216	0.00070	97225	434	0.00177
45	0.00181	0.03288	0.00085	97000	487	0.00198
46	0.00202	0.03355	0.00099	96742	552	0.00221
47	0.00225	0.03417	0.00118	96451	628	0.00248
48	0.00249	0.03474	0.00141	96120	718	0.00275
49	0.00275	0.03526	0.00166	95746	826	0.00306
50	0.00304	0.03573	0.00198	95324	953	0.00340
51	0.00336	0.03615	0.00238	94846	1104	0.00378
52	0.00372	0.03652	0.00289	94302	1285	0.00421
53	0.00410	0.03684	0.00355	93680	1505	0.00468
54	0.00451	0.03711	0.00442	92965	1775	0.00519
55	0.00496	0.03734	0.00557	92136	2112	0.00578
56	0.00545	0.03754	0.00707	91169	2535	0.00643
57	0.00597	0.03772	0.00902	90031	3070	0.00716
58	0.00651	0.03789	0.01151	88686	3749	0.00796
59	0.00707	0.03800	0.01471	87094	4604	0.00884
60	0.00766	0.03790	0.01887	85207	5681	0.00982
61	0.00828	0.03775	0.02439	82958	7037	0.01092
62	0.00892	0.03740	0.03196	80265	8747	0.01214
63	0.00960	0.03655	0.04276	77007	10925	0.01346
64	0.01031	0.03540	0.05857	73006	13742	0.01491

Tableau 3: Modèle rationnel A

x	q_x^a	q_x^i	I_x	R_x	Λ_x^a	Λ_x^i	q_x
20	0.00146	0.02200	0.00005	0.30052	100000	0	0.00146
21	0.00117	0.02100	0.00006	0.26731	99849	5	0.00117
22	0.00099	0.02020	0.00007	0.24458	99728	9	0.00099
23	0.00090	0.01955	0.00009	0.22872	99624	14	0.00090
24	0.00084	0.01900	0.00010	0.21700	99529	19	0.00084
25	0.00080	0.01850	0.00012	0.21268	99439	25	0.00080
26	0.00078	0.01800	0.00014	0.20630	99353	31	0.00079
27	0.00077	0.01850	0.00017	0.20244	99268	38	0.00078
28	0.00077	0.01905	0.00022	0.19859	99182	46	0.00078
29	0.00077	0.01965	0.00026	0.19257	99093	58	0.00078
30	0.00076	0.02030	0.00030	0.18594	99002	71	0.00078
31	0.00075	0.02100	0.00035	0.18025	98910	86	0.00077
32	0.00075	0.02175	0.00039	0.17312	98817	104	0.00077
33	0.00076	0.02255	0.00044	0.16636	98722	122	0.00079
34	0.00078	0.02340	0.00047	0.15923	98624	142	0.00082
35	0.00081	0.02430	0.00053	0.15378	98523	163	0.00085
36	0.00085	0.02520	0.00058	0.14756	98416	186	0.00090
37	0.00090	0.02610	0.00061	0.14107	98302	211	0.00096
38	0.00096	0.02700	0.00066	0.13488	98183	235	0.00103
39	0.00104	0.02790	0.00070	0.12888	98055	262	0.00112
40	0.00113	0.02880	0.00076	0.12342	97918	290	0.00122
41	0.00123	0.02970	0.00082	0.11777	97768	320	0.00133
42	0.00134	0.03057	0.00091	0.11226	97605	353	0.00145
43	0.00147	0.03139	0.00101	0.10673	97424	391	0.00160
44	0.00162	0.03216	0.00115	0.10123	97224	435	0.00177
45	0.00181	0.03288	0.00132	0.09561	96998	488	0.00198
46	0.00202	0.03355	0.00150	0.08990	96741	553	0.00221
47	0.00225	0.03417	0.00171	0.08422	96449	629	0.00248
48	0.00249	0.03474	0.00198	0.07860	96120	718	0.00275
49	0.00275	0.03526	0.00228	0.07304	95746	825	0.00306
50	0.00304	0.03573	0.00265	0.06757	95324	952	0.00340
51	0.00336	0.03615	0.00309	0.06221	94845	1104	0.00378
52	0.00372	0.03652	0.00366	0.05696	94302	1285	0.00421
53	0.00410	0.03684	0.00437	0.05183	93679	1505	0.00468
54	0.00451	0.03711	0.00530	0.04682	92964	1776	0.00519
55	0.00496	0.03734	0.00651	0.04193	92135	2112	0.00578
56	0.00545	0.03754	0.00808	0.03716	91168	2535	0.00643
57	0.00597	0.03772	0.01011	0.03253	90031	3070	0.00716
58	0.00651	0.03789	0.01268	0.02802	88686	3748	0.00796
59	0.00707	0.03800	0.01594	0.02364	87094	4604	0.00884
60	0.00766	0.03790	0.02014	0.01939	85207	5681	0.00982
61	0.00828	0.03775	0.02567	0.01527	82959	7036	0.01092
62	0.00892	0.03740	0.03317	0.01127	80265	8747	0.01214
63	0.00960	0.03655	0.04380	0.00740	77006	10925	0.01346
64	0.01031	0.03540	0.05924	0.00363	73006	13742	0.01491

Résumé

Ce travail complète un modèle développé antérieurement pour actifs et invalides, dans lequel le retour à l'activité (réactivité) est pris en considération de manière explicite.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ergänzt ein zuvor entwickeltes Modell für Aktive und Invalide, in welchem die Rückkehr zur Aktivität (Reaktivierung) explizit berücksichtigt wird.

Summary

This paper completes a previously developed model for active and disabled participants by taking explicitly into account their return to activity (reactivation).