Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaften beider Basel

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Basel ; Naturforschende Gesellschaft Baselland

Band: 18 (2018)

Artikel: Schwarze Löcher und Gravitationswellen : die wichtigsten physikalischen Zusammenhänge einfach erklärt

Autor: Gassmann, Fritz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-813411

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Schwarze Löcher und Gravitationswellen – die wichtigsten physikalischen Zusammenhänge einfach erklärt

Fritz Gassmann

Limmatstrasse 6, CH-5412 Vogelsang, gassmann@bluewin.ch

Zusammenfassung: Seit den 1960er-Jahren bemühen sich Physiker, die durch Einstein theoretisch begründeten Gravitationswellen experimentell nachzuweisen. Nach gut einem halben Jahrhundert fehlgeschlagener Experimente und einem ganzen Jahrhundert nach der Fertigstellung der allgemeinen Relativitätstheorie wurde im September 2015 der langersehnte Durchbruch erzielt. An den beiden Gravitationswellen-Observatorien in den USA wurde das Verschmelzen von zwei schwarzen Löchern «gehört» und damit ein neues Kapitel astronomischer Forschung aufgeschlagen.
Im vorliegenden Artikel werden die Grundideen der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie unter Verwendung eines Minimums an Mathematik dargelegt. Ausgehend vom Verhalten eines Steins, der senkrecht nach oben geworfen wird, kann die mögliche Existenz schwarzer Löcher auf verblüffend einfache Weise verstanden werden, indem der Stein mit Hilfe der bekannten Formel $E = mc^2$ durch Lichtteilchen (Photonen) ersetzt wird. Eine Abschätzung mit Hilfe der Dichte von Neutronen ergibt die minimale Masse für reale schwarze Löcher, an deren Existenz heute kein Zweifel mehr besteht. Ohne auf die für eine genaue Rechnung notwendige anspruchsvolle Mathematik einzugehen, wird gezeigt, wie die Feldgleichungen aussehen und wie Einstein den Satz von Pythagoras mit sogenannten Metrikkoeffizienten erweitern musste, um diese Grundgleichungen formulieren zu können. Schwarze Löcher sind die allereinfachsten Lösungen dieser Gleichungen, die jedoch viel mehr leisten können. Beispielsweise folgen daraus Gravitationswellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen. Es wird gezeigt, welcher Aufwand nötig ist, um die äusserst schwachen Signale zu messen, die uns aus den Tiefen des Kosmos erreichen und von unvorstellbar gewaltigen und faszinierenden Ereignissen berichten. Deren Energieabstrahlung in Form von Gravitationswellen ist kurzzeitig grösser als die Intensität aller Sterne des beobachtbaren Universums zusammengenommen.

Schlüsselwörter: Allgemeine Relativitätstheorie, Neutronenstern, Gravitationslinse, Lichtablenkung, Feldgleichungen, Metriktensor, gekrümmte Raumzeit, Riemannsche Geometrie

Abstract: Black Holes and Gravitational Waves. Physicists have struggled to find gravitational waves following from Einstein's general relativity theory since the 1960s. With half a century of failed experiments and a full century after completion of the theory, the breakthrough finally happened in September 2015: a merger of two black holes was «heard» at two gravitational wave observatories in the US. With this event, a new epoch in astronomic research began.
In this article, the central ideas of special and general relativity theory will be described with minimal use of mathematics. Calculating the trajectory of a stone thrown vertically, the possible existence of black holes can easily be understood. This is achieved by using the well-known equation $E = mc^2$ to replace the mass of the stone by the energy of light particles (photons). An approximation based on the density of neutrons gives the minimal mass of black holes, whose existence is beyond doubt by now. The nature of the field equations is shown without the demanding mathematics necessary for exact calculations. We show how Einstein had to generalise the theorem of Pythagoras with so-called metric coefficients to find these equations. Black holes are their most simple solutions, but they are able to explain much more in physics. For example, they imply gravitational waves travelling with

the speed of light. We describe the enormous efforts necessary to measure the tiny signals reaching us from the depth of the universe and telling us about fascinating and overwhelmingly powerful events. Within short time intervals, their energy output in the form of gravitational waves exceeds the integral intensity of all stars in the observable universe.

Key words: general relativity theory, neutron star, gravitational lens, bending of light beams, field equations, metric tensor, spacetime curvature, Riemann geometry

Vorwort

Der vorliegende Artikel ist die schriftliche Fassung eines Vortrages des Autors am TecDay vom 9. November 2017 an der Kantonsschule Aarau. Viele der insgesamt 300 Schülerinnen und Schüler interessierten sich sehr für das Thema und ihr positives Feedback gab die Motivation, den Vortrag auch in schriftlicher Form zu veröffentlichen. Der Autor möchte durch die mathematisch anspruchslose Darstellung zeigen, wie Teile der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie auf Gymnasialstufe vermittelt werden könnten.

Der Kern der speziellen Relativitätstheorie

1905 formulierte Einstein die spezielle Relativitätstheorie. Um die beobachtete Unveränderlichkeit der Lichtgeschwindigkeit c gegenüber Relativbewegungen in seine Theorie einbauen zu können, entwickelte er das Konzept, die Zeit als vierte Raumdimension zu betrachten. Einsteins ETH-Mathematikprofessor Hermann Minkowski formulierte dann die spezielle Relativitätstheorie auf äusserst elegante Weise um. Es ist kaum zu glauben, aber die gesamte Theorie steckt im folgenden Satz: «Die Transformation von Zeit, ausgedrückt als Raumdimension ct, und Ort x in ein mit der Geschwindigkeit v bewegtes Koordinatensystem muss so sein, dass das sogenannte **Linienelement Δs unverändert** bleibt. Dabei gilt:

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2.»$$

Das folgende Gedankenexperiment soll zeigen, wie dieses Rezept angewendet wird. Der Beweis, dass das Rezept wirklich die gesamte spezielle Relativitätstheorie enthält, würde zu viel Raum beanspruchen und kann im vorliegenden Artikel nicht behandelt werden. Wir betrachten ein Flugzeug, das mit der Geschwindigkeit v parallel zu einer genau horizontalen Piste fliegt, die vollständig mit Spiegeln bedeckt ist. Wenn der Pilot vertikal nach unten schaut, kann er nicht feststellen, ob die Spiegel gegenüber dem Flugzeug oder gegenüber dem Boden in Ruhe sind. Er produziert nun einen Laserblitz senkrecht nach unten, dessen Reflexion an den Spiegeln durch einen unmittelbar neben dem Laser installierten Detektor registriert wird, und misst die Licht-Laufzeit $2\Delta t_F$ mit einer sehr genauen Uhr. Da die Licht-Laufzeit vom Flugzeug zum Spiegel genau gleich lang ist wie diejenige vom Spiegel zum Flugzeug, betrachten wir im Folgenden nur die erste Hälfte Δt_F. Der Index F gibt an, dass es sich um eine Messung im Flugzeug handelt. Die Skizze in Abb. 1 zeigt auf der linken Seite den im Flugzeugsystem zurückgelegten Lichtweg. Vom Boden aus betrachtet sieht der ganze Vorgang etwas anders aus, weil sich das Flugzeug fortbewegt, währenddem das Licht unterwegs ist. Abb. 1 zeigt dies auf der rechten Seite. Im Flugzeugsystem bewegt sich nichts, also ist $\Delta x_F = 0$ und als Quadrat des Linienelementes erhalten wir $\Delta s_F^2 = c^2\Delta t_F^2 - 0$. Vom Boden aus betrachtet bewegt sich das Flugzeug in der Zeit Δt_B um $\Delta x_B = v\ \Delta t_B$ und das entsprechende Quadrat des Linienelementes wird $\Delta s_B^2 = c^2\Delta t_B^2 - v^2\ \Delta t_B^2$. Man beachte, dass die Lichtgeschwindigkeit c keinen Index hat, also vom Flugzeug oder vom Boden aus betrachtet dieselbe ist (dies ist das zentrale Postulat der speziellen Relativitätstheorie). Die Minkowski-Forderung «Gleichheit der Linienelemente» ergibt nun $c^2\Delta t_F^2 = c^2\Delta t_B^2 - v^2\ \Delta t_B^2$ und nach einer Umformung erhalten wir die korrekte Beziehung der speziellen Relativitätstheorie Einsteins:

$$\Delta t_F^2 = \Delta t_B^2(1 - v^2/c^2)$$

Da der Klammerausdruck kleiner ist als 1, sind die am Boden gemessenen Zeitintervalle Δt_B etwas grösser als Δt_F. Oder anders gesagt: Vom Boden aus betrachtet läuft die Zeit im Flugzeug etwas langsamer (Zeitdilatation). Auf ähnliche Weise werden in bewegten Systemen die Längen und die Winkel verändert (Längenkontraktion) und es folgt auch die Relativität der Gleichzeitigkeit (zwei im Flugzeug gleichzeitige Ereignisse finden vom Boden aus betrachtet nacheinander statt).

Gleichwertigkeit von Energie und Masse

Eine wichtige Folgerung der speziellen Relativitätstheorie ist die Gleichwertigkeit von Energie E und Masse m, ausgedrückt durch die wohl

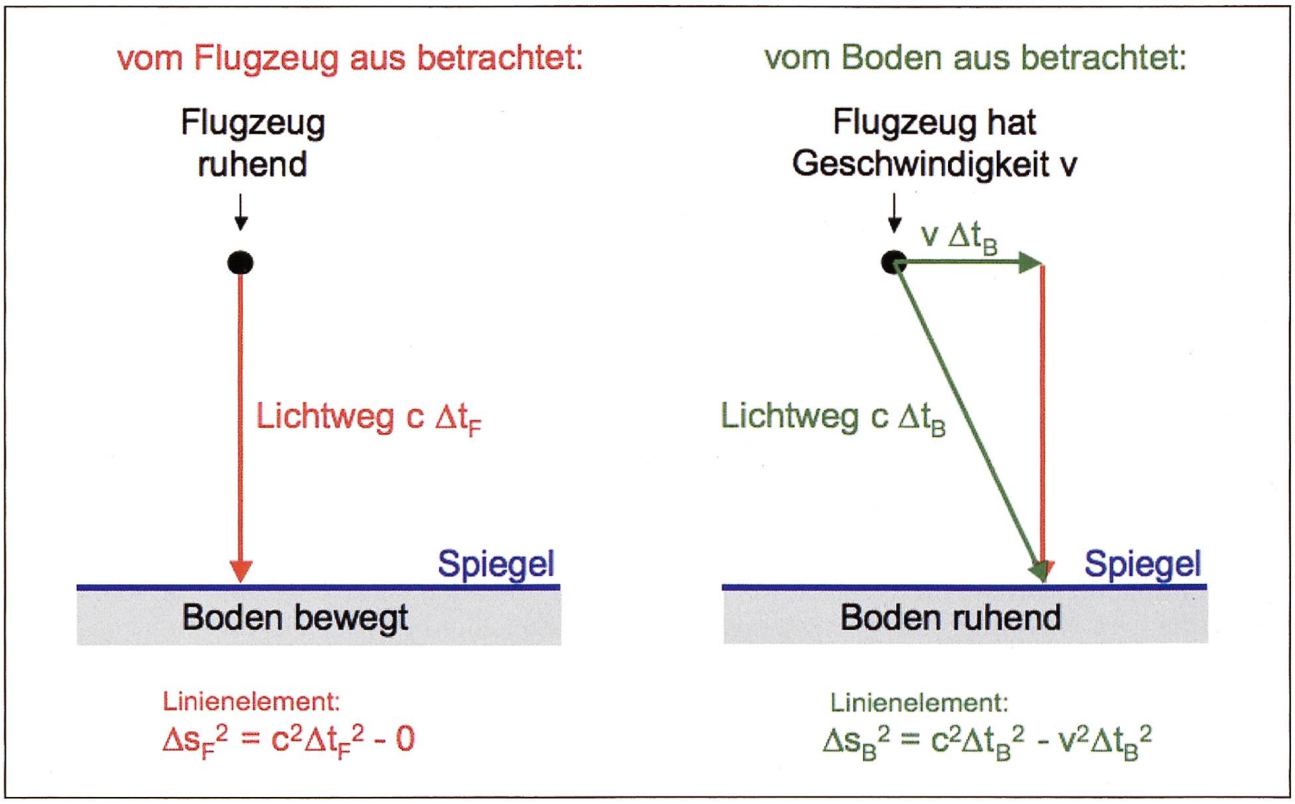

Abb. 1: Skizze des im Text beschriebenen Lichtweges vom Flugzeug aus betrachtet (links) und vom Boden aus betrachtet (rechts). Von beiden Systemen aus betrachtet ist die Lichtgeschwindigkeit c dieselbe. Die Zusammensetzung beider Skizzen zeigt, dass die Minkowski-Forderung «Gleichheit der Linienelemente» offensichtlich korrekt ist und dem Satz von Pythagoras entspricht. Die Skizze rechts ist stark übertrieben gezeichnet: Das Flugzeug müsste sich mit 40% der Lichtgeschwindigkeit (430 Millionen km/h) bewegen, um die skizzierte Form des rechtwinkligen Dreiecks zu erzeugen.

bekannteste Formel der Physik $E = mc^2$ (Einstein 1905).

Um diese Beziehung besser zu verstehen, betrachten wir einige Beispiele. Mit Hilfe der Solarkonstanten von 1365 W/m² und der Distanz Sonne–Erde von 150 Millionen km kann die von der Sonne in jeder Sekunde ausgestrahlte Energie berechnet werden. Dividiert durch c^2 erhält man die pro Sekunde in Lichtenergie umgewandelte Masse von rund 4.4 Millionen Tonnen. Dieselbe Rechnung für das Kernkraftwerk Gösgen mit einer Gesamtleistung von 3 GW ergibt einen Massenverlust von einem bescheidenen Kilogramm pro Jahr! Mit Hilfe der speziellen Relativitätstheorie lässt sich die Masse-Energie-Beziehung auch auf eine bewegte Masse anwenden. Die exakte Formel ist etwas komplizierter, weshalb man sich für Objekte wie Autos, Flugzeuge oder Kanonenkugeln, die sich viel langsamer als Licht bewegen, mit der folgenden Näherung begnügt:

$$E = mc^2 \approx m_0c^2 + \tfrac{1}{2}\, m_0v^2 \text{ für } v \ll c$$

Man sieht, dass die Näherungsformel bei sehr grossen Geschwindigkeiten (wie sie beispielsweise Protonen im Beschleuniger des CERN haben) falsch wird, wenn man sie für $v \approx c$ benutzt. Es braucht nach der Relativitätstheorie unendlich viel Energie, um eine Masse auf Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen, weil die Masse mit zunehmender Geschwindigkeit immer grösser wird. Mit der obigen Näherungsformel erhält man jedoch fälschlicherweise nur eine grosse, aber endliche Energie $E \approx 1.5\, m_0c^2$. Betrachten wir nun eine Masse mit einer Geschwindigkeit v, die viel kleiner ist als c. Die Ruheenergie m_0c^2 ist konstant und den zweiten Term $\tfrac{1}{2}\, m_0v^2$ nennt man kinetische Energie.

Zwei Beispiele sollen zeigen, weshalb es die Relativitätstheorie für kleine Geschwindigkeiten nicht braucht: Die Masse eines Autos wird bei 120 km/h um $\frac{1}{2} v^2/c^2 = 6.2$ ng pro 1000 kg Ruhemasse grösser. Erhitzt man 10 Liter Wasser um 50°C, nimmt dessen Masse um 23 ng zu, weil sich die Wassermoleküle schneller bewegen. Beide Effekte sind unmessbar klein und deshalb irrelevant. Die relative Massenzunahme entspricht beim Auto 3 Deziliter bezogen auf das Volumen des Bodensees von 48 km^3. Beim erhitzten Wasser erreicht die relative Massenzunahme bereits 120 Liter bezogen auf das Bodenseevolumen, was aber immer noch vernachlässigbar wenig ist.

Die Relativitätstheorie wird nur bei sehr grossen Geschwindigkeiten wichtig, wie z.B. für Elektronen, die im Speicherring der Synchrotron Lichtquelle Schweiz (SLS) am Paul Scherrer Institut auf eine kinetische Energie von 2400 Megaelektronenvolt (MeV) beschleunigt werden. Ihre Massenzunahme wird $m/m_0 = 2400/0.511 = 4700$. Der Nenner 0.511 ist die in Energie (MeV) umgerechnete Ruhemasse des Elektrons (m_0c^2). Dies bedeutet, dass die Elektronen im Speicherring der SLS fast 2.5-mal so viel Masse haben wie ein ruhendes Proton, dessen Masse rund 2000 mal grösser ist als diejenige eines ruhenden Elektrons. Für den Betrieb der Anlage ist dieser Massenzuwachs sehr gut spürbar, müssen doch die Umlenkmagnete ein 4700-mal grösseres Feld erzeugen, um die Elektronen auf ihrer Bahn zu halten!

Photonen im Gravitationspotenzial

Auf der Erdoberfläche beträgt das Gewicht einer Masse m nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz $-m \{GM/r^2\}$. G ist die Gravitationskonstante, M die Erdmasse und r der Erdradius. Setzt man die entsprechenden Grössen ein, erhält man für den Klammerausdruck die Erdbeschleunigung 9.81 m/s^2, die normalerweise mit g bezeichnet wird. Das Gewicht (in der Kraft-Masseinheit Newton N gemessen) ist also -mg, wobei das Minuszeichen angibt, dass der Kraftvektor gegen den Erdmittelpunkt zeigt. Das Gravitationsgesetz gilt für jede beliebige Entfernung r vom Erdmittelpunkt und für jede Masse m. Man kann deshalb beispielsweise die Anziehung des Mondes durch die Erde bestimmen, wenn man für m die Mondmasse und für r die Entfernung des Mondes einsetzt.

Der Unterschied ΔV der potenziellen Energie V zwischen zwei Entfernungen r und $r+\Delta r$ ist definitionsgemäss $\Delta V = m \{GM/r^2\} \Delta r$ (Δr soll infinitesimal klein sein). Durch Integration von r bis unendlich erhält man das Gravitationspotenzial beim Abstand r: $V_r = -mGM/r$. Es ist praktisch, das frei wählbare Potenzial im Unendlichen null zu setzen ($V_\infty = 0$), weshalb die Integrationskonstante verschwindet. Der Energieerhaltungssatz (Summe der kinetischen Energie T und der potenziellen Energie V bleibt konstant) für eine sich reibungsfrei bewegende Masse lautet:

$$T_\infty = T_r + V_r = T_r - mGM/r.$$

Als Beispiel für diese Beziehung bestimmen wir die Entweichgeschwindigkeit v_r (bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes) einer vom Erdboden aus senkrecht nach oben abgeschossenen Kanonenkugel, die im Unendlichen gerade still stehen soll ($T_\infty=0$). Mit $T_r = \frac{1}{2} mv_r^2$ wird $vr^2 = 2gr$ und damit $v_r = 11.2$ km/s. Hier wurde die oben erwähnte Relation für die Erdbeschleunigung benutzt: $gr = - \{GM/r\}$.

Lichtteilchen (Photonen) besitzen nach Einstein die Energie $E = h\nu$, wobei h das Plancksche Wirkungsquantum und ν die Frequenz bedeuten (das griechische Zeichen ν wird als «Ny» ausgesprochen und in der Physik meistens für die Frequenz verwendet). Mit Hilfe der Beziehung $E = mc^2$ kann einem Photon eine fiktive Masse $m = E/c^2$ zugewiesen werden, obwohl Photonen masselos sind. Wir setzen nun mutig, wie dies Einstein (1911) gewagt hat, ein Photon mit dieser fiktiven Masse in die oben formulierte Energieerhaltungsgleichung ein, wobei die kinetische Energie T durch die Energie E des Photons ersetzt wird:

$$E_\infty = E_r - \{E_r/c^2\} GM/r = E_r \{1 - r^*/r\}$$
$$r^* = 2GM/c^2$$

(Bemerkung zu Faktor 2 im untenstehenden Text)

Die in der obigen Formel definierte Grösse r^* wird Schwarzschildradius genannt. Dies zu Eh-

ren des Astronomen und Physikers Karl Schwarzschild (1873–1916), der diesen Radius kurz vor seinem Tod als Erster auf der Basis der dannzumal noch nicht veröffentlichten Einsteinschen Feldgleichungen (siehe unten) berechnete. Der darin enthaltene Faktor 2 folgt nicht aus der oben erläuterten vereinfachten Herleitung und bedarf einer gehörigen Portion Mathematik, die der Leserschaft nicht zugemutet werden kann. Mit Hilfe der Erd- und Sonnenmassen wird r* für die Erde 9 mm und für die Sonne 3 km.

Die Energie und damit die Frequenz eines sich radial zur Erde oder zur Sonne bewegenden Photons verkleinert sich beim Flug ins Unendliche gemäss der obigen Beziehung um den Bruchteil r*/r. Im Falle der Erde ist dies gerade einmal ein Milliardstel, also nur mit aufwändigen Messungen beobachtbar. Da im sichtbaren Spektrum Rot die kleinste Frequenz hat, spricht man von **Gravitations-Rotverschiebung.** Emissionsspektren von Elementen auf sehr massereichen Sternen sind deshalb etwas nach Rot verschoben. Diese gravitationsbedingte Rotverschiebung ist normalerweise viel kleiner als die Dopplereffekt-Rotverschiebung auf Grund der Fluchtbewegung weit entfernter Sterne und Galaxien (Expansion des Kosmos), die mit Hilfe der speziellen Relativitätstheorie (Zeitdilatation) berechnet wird. Es ist deshalb erstaunlich, dass die Gravitations-Rotverschiebung im vergleichsweise schwachen Gravitationsfeld der Erde an einem nur 23 m hohen Turm (Abb. 2) gemessen werden konnte. Mit Hilfe des Mössbauer-Effektes konnte beobachtet werden, dass die 14.4 keV-Gammastrahlung des radioaktiven Eisen-57 Isotops an der Turmspitze eine winzige Rotverschiebung zeigte. Die relative Abnahme der Frequenz von $2.5 \cdot 10^{-15}$ stimmte mit den Voraussagen der allgemeinen Relativitätstheorie im Rahmen der Messgenauigkeit von 10% überein (Klas und Main 2015).

Nun betrachten wir einen Himmelskörper mit einem Radius r, der gerade gleich seinem Schwarzschildradius r* ist. Die obige Beziehung $E_\infty = E_r \{1 - r^*/r\}$ ergibt für diesen Grenzfall $E_\infty = 0$, d.h. die Energie und damit auch die Frequenz von emittierten Photonen sind für einen weit entfernten Beobachter null. Dies bedeutet, dass keine Photonen beobachtet werden können,

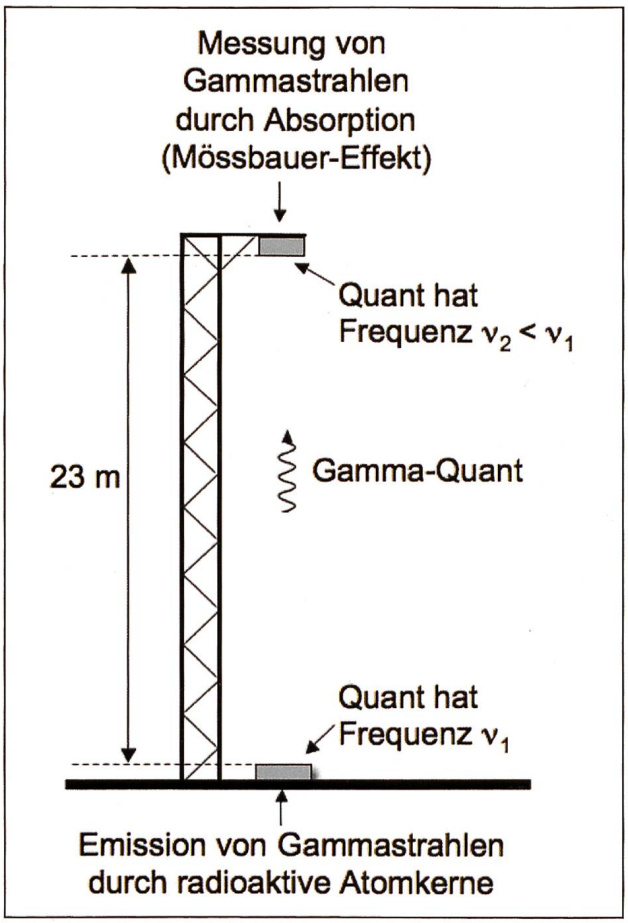

Abb. 2: Ein vertikal nach oben fliegendes Gamma-Quant verliert Energie analog wie ein nach oben geworfener Stein. Da bei elektromagnetischen Wellen die Quantenenergie proportional zu ihrer Frequenz ist, nimmt auch die Frequenz proportional zur Energie ab. Eine abnehmende Frequenz entspricht bei sichtbarem Licht einer Verschiebung gegen Rot. Man nennt deshalb eine abnehmende Frequenz auch bei Gammastrahlen eine Rotverschiebung.

die ihren Ursprung auf diesem Himmelskörper haben. An seiner Stelle sieht man nur Schwarz (d.h. man sieht nichts), weshalb man solche Himmelskörper **schwarze Löcher** nennt. Um mit der Masse der Erde ein schwarzes Loch zu erzeugen, müsste die gesamte Erdmasse in ein Kügelchen mit Radius r* = 9 mm gepresst werden, was auf Grund heutiger Kenntnisse nicht möglich erscheint.

Gibt es schwarze Löcher wirklich?

Anders gefragt: Reicht die grösste bekannte Dichte aus, um ein schwarzes Loch zu erzeugen?

Ein Neutron hat einen Radius von 0.84 10^{-15} m und eine Masse von 1.67 10^{-27} kg, was eine Dichte von 0.67 Milliarden Tonnen pro cm^3 ergibt. Es besteht heute kein Zweifel, dass Neutronensterne mit dieser Dichte existieren und beispielsweise durch Supernova-Explosionen entstehen können. Damit kann man abschätzen, welchen minimalen Radius ein schwarzes Loch mit einer Masse M haben müsste, wenn die Dichte in seinem Inneren derjenigen eines Neutronensterns entspricht. Der Schwarzschildradius r^* wäre dann gerade gleich dem Radius einer Kugel mit der Dichte ρ eines Neutronensterns, was durch die folgenden zwei Gleichungen ausgedrückt wird: $M = (4\pi/3)\, r^{*3}\rho$ und $r^* = 2GM/c^2$. Daraus ergibt sich $r^*_{min} \approx 15$ km und $M_{min} \approx 5$ Sonnenmassen. Da es für die Bildung eines schwarzen Loches also mindestens 5 Sonnenmassen braucht, kann sich aus der Sonne kein schwarzes Loch entwickeln. Auch genauere Rechnungen bestätigen, dass für ein schwarzes Loch mehrere Sonnenmassen nötig sind. Ein relativ kleines schwarzes Loch mit 10 Sonnenmassen hätte einen Schwarzschildradius von 30 km (Abb. 3). Neueste Beobachtungen der Bahnellipsen von Sternen in der Umgebung des schwarzen Loches im Zentrum der Milchstrasse ergeben, dass sich dort ein Monster mit einer Masse von rund 4.3 Millionen Sonnenmassen aufhält! Sein Schwarzschildradius ist 13 Millionen km, also rund ein Viertel des Merkur-Bahnradius. Seine Distanz von der Erde beträgt beruhigende rund 25'000 Lichtjahre und Astronomen vermuten, dass kein anderes schwarzes Loch näher liegt.

Lichtablenkung durch Gravitationsfelder

Mit der Hypothese der fiktiven Masse für ein Photon berechnete Einstein (1911) auch die Lichtablenkung durch Gravitationsfelder. Bei einer Sonnenfinsternis kann man von der Erde aus Sterne beobachten, die sich scheinbar sehr nahe am Sonnenrand befinden. Auf Grund der fiktiven Masse «fällt» das Sternenlicht etwas gegen die Sonne; ein am Sonnenrand sichtbarer Stern befindet sich also in Wirklichkeit etwas hinter der Sonne und sein Licht wird ein wenig um die Sonne herum gekrümmt. Die scheinbare Position des Sterns ist also leicht falsch, wie in Abb. 4 dargestellt. Durch spätere Beobachtungen des Sterns (wenn sich dieser weit vom

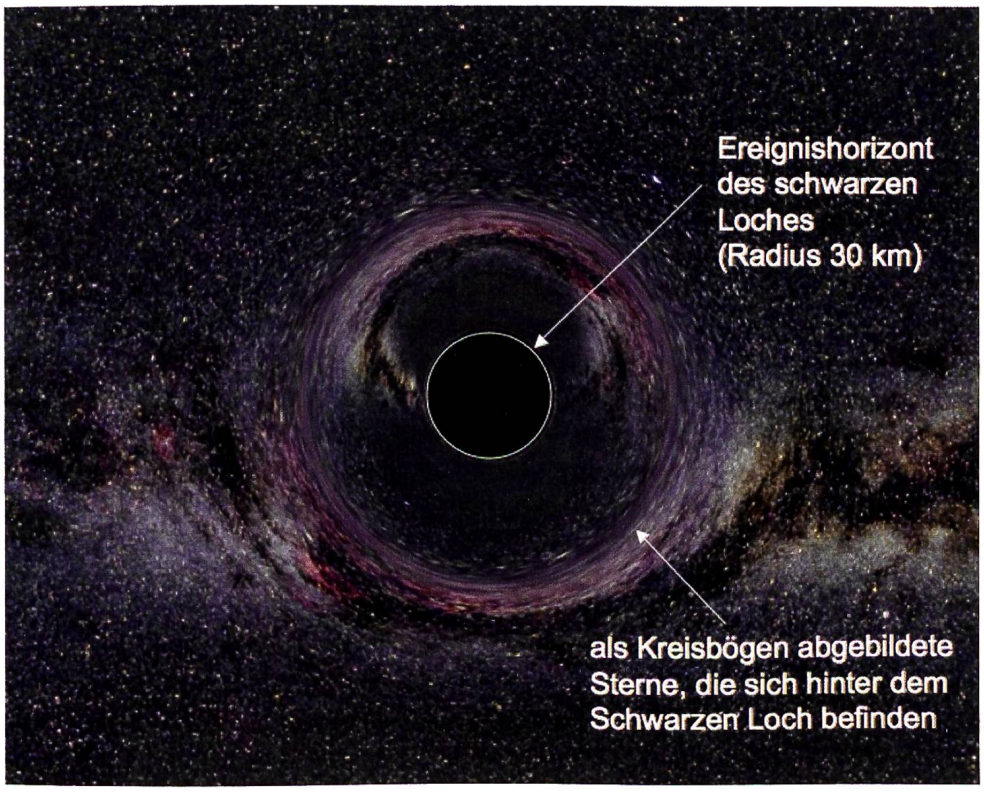

Abb. 3: Computergrafik eines schwarzen Loches mit 10 Sonnenmassen (Schwarzschildradius = 30 km) aus einer Distanz von 600 km betrachtet. Durch das starke Gravitationsfeld des schwarzen Loches werden dahinterliegende Sterne auf Kreisbögen abgebildet, weil Lichtstrahlen durch Gravitationsfelder wie beim Durchgang durch eine gewölbte Glaslinse abgelenkt werden: der sogenannte Gravitationslinseneffekt (Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Schwarzes_Loch).

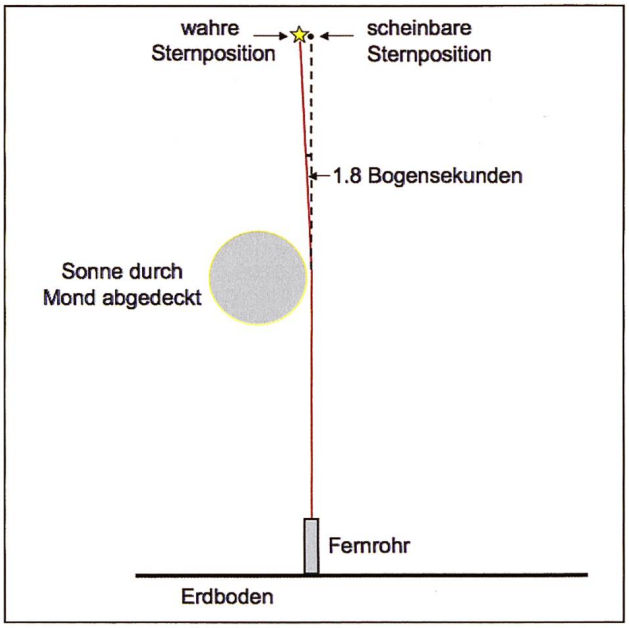

Abb. 4: Die Krümmung der Lichtstrahlen durch Gravitationsfelder, auch Raumkrümmung genannt, bewirkt eine falsche scheinbare Sternposition. Der Ablenkeffekt kann nur während einer Sonnenfinsternis beobachtet werden, weil sonst die Sonne zu stark blendet. In der Skizze sind die Distanzverhältnisse zur besseren Sichtbarmachung milliardenfach verzerrt und der Ablenkwinkel ist tausendfach zu gross dargestellt.

Sonnenrand entfernt befindet) kann man seine wahre Position zum Zeitpunkt der ersten Beobachtung berechnen und damit den durch die Lichtkrümmung hervorgerufenen Fehler bestimmen. Mit Hilfe der Relativitätstheorie ergeben sich rund 1.8 Winkelsekunden, was auf 1% genau mit Beobachtungen während der Sonnenfinsternis im Jahre 1960 übereinstimmt.

Wird Licht durch eine ganze Galaxie gekrümmt, kann ein sich hinter ihr befindliches Objekt auf Grund von Asymmetrien im Gravitationsfeld mehrmals abgebildet werden. Dieser **Gravitationslinseneffekt** erlaubt uns Objekte zu beobachten, die sonst nicht sichtbar wären. Ein schönes Beispiel ist das in Abb. 5 wiedergegebene Einstein-Kreuz, das aus 4 Abbildungen desselben Quasars besteht. Ein Quasar ist ein quasi stellares Objekt, das bis 1000 Mal heller sein kann als die gesamte Milchstrasse. Ein Quasar enthält in seinem Zentrum wahrscheinlich ein sehr grosses schwarzes Loch, das umliegende Gaswolken «aufsaugt». Die hineinstürzenden, stark beschleunigten ionisierten Gasartikel dürften die Ursache der Lichtemission sein (vgl. https://en.wikipedia.org/wiki/Quasar).

Entwicklung der genauen allgemeinen Relativitätstheorie

Wie lässt sich die Gravitation auf exakte Weise in die Relativitätstheorie einbauen? Einsteins entscheidende Idee war das **Äquivalenzprinzip:** In einer (ohne Reibung) fallenden Kiste fühlt es sich gleich schwerelos an wie in einer Raumsonde im gravitationsfreien Weltraum (Abb. 6). Ebenfalls sind die physikalischen Gesetze in einem auf der Erde ruhenden Labor dieselben wie in einem mit +9.81 m/s^2 beschleunigten Labor im gravitationsfreien Weltraum.

Wie müsste man die Beziehung zwischen Koordinaten und dem im ersten Abschnitt eingeführten Linienelement Δs umformen, um die Gravitationskraft zu berücksichtigen? Hier kommt der Beitrag des Schweizer Mathematikers Marcel Grossmann ins Spiel. Er kannte die

Abb. 5: Einstein-Kreuz: Der verwaschene Fleck im Zentrum ist eine 400 Lichtjahre entfernte Galaxie. Ein dahinter liegender Quasar in 8 Milliarden Lichtjahren Entfernung wird durch ihr Gravitationsfeld viermal abgebildet und verstärkt (Gravitationslinseneffekt). Im einfachsten Fall einer kugelsymmetrischen Galaxie ergäben sich zwei Kreisbögen. Da die Massenverteilung in der Galaxie eher scheibenförmig ist (wie bei der Milchstrasse), entstehen vier Abbildungen (Quelle: ESA/Hubble und NASA: http://www.astronews.com/bilddestages/2012/20120201.shtml).

Abb. 6: Null-g-Parabolflug (entspricht einer ohne Luftwiderstand fallenden Kiste) mit 30 Wissenschafts-Lehrpersonen und 2000 Bällen (Quelle: Northrop Grumman Corp. USA http://media.globenewswire.com/noc/mediagallery.html?pkgid=7999).

im 19. Jahrhundert durch den deutschen Mathematiker Georg Friedrich Bernhard Riemann entwickelte nichteuklidische Geometrie bestens und konnte Einstein die passenden mathematischen Hilfsmittel zur Verfügung stellen. Ein zentrales Element der nichteuklidischen Geometrie ist der Riemann'sche Krümmungstensor, eine Art verallgemeinerter Vektor mit D^4 Komponenten für einen D-dimensionalen Raum. Für eine zweidimensionale Fläche sind dies also $2^4 = 16$ Komponenten, die alle null werden, wenn die Fläche eben ist. Eine Kugeloberfläche ist gekrümmt, denn eine der 16 Komponenten ist nicht null, sondern eins. Ebenso ist die Oberfläche eines Kegels gekrümmt, nicht aber diejenige eines Zylinders. Die abstrakte mathematische Krümmung deckt sich also nicht ganz mit dem Alltagsgebrauch des Begriffes.

Um den Krümmungstensor zu berechnen, braucht man die sogenannte Metrik g_{ik}, eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras (vgl. Kasten). Es ist einleuchtend, dass auf der gekrümmten Kugeloberfläche der Satz von Pythagoras nicht in seiner üblichen einfachen Form gilt. Auch ist die Winkelsumme eines Dreiecks grösser als 180 Grad (man stelle sich ein Dreieck mit Spitze am Nordpol vor, dessen gegenüberliegende Seite ein Stück des Äquators ist). Der Satz von Pythagoras muss also verallgemeinert werden, wenn er auch für gekrümmte Räume gelten soll. Im einfachsten Fall eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Kugelkoordinaten mit Radius, Länge und Breite bilden ein rechtwinkliges Koordinatensystem) lautet der verallgemeinerte Satz von Pythagoras:

$$c^2 = g_1 a^2 + g_2 b^2$$

Auf der Oberfläche einer sehr grossen Kugel werden die Korrekturfaktoren g_1 und g_2 fast genau eins und es entsteht der normale Satz von Pythagoras, weil die Krümmung der Kugelober-

Die Metrik sagt, wie Linienelemente zu berechnen sind

Ein Vektor $a_i = (a_1, a_2, ..a_D)$ hat in einem D-dimensionalen Raum D Komponenten. Sein einziger Index i läuft von 1 bis D. Ein Tensor hingegen hat mehrere Indices und deshalb auch viel mehr Komponenten.

Der Metriktensor g_{ik} hat D^2 Komponenten (reine Zahlen ohne Masseinheit). Da wir hier nur rechtwinklige Koordinatensysteme betrachten, verschwinden alle Komponenten mit i ungleich k. Die Länge Δs eines Linienelementes wird in diesem einfachen Fall:

$$\Delta s^2 = \sum_{i=1}^{D} g_{ii}\Delta x_i^2 = g_{11}\Delta x_1^2 + g_{22}\Delta x_2^2 + ... + g_{DD}\Delta x_D^2$$

In einem krummlinigen Koordinatensystem (z.B. Polarkoordinaten) ist diese Definition nur korrekt, wenn Verbindungslinien von nahe benachbarten Punkten verwendet werden. Die Strecken Δx_i sind dann infinitesimal klein und werden als dx_i bezeichnet.

Beispiele für zwei Dimensionen:

Kartesische Koordinaten:	$g_{ii} = (1, 1)$	Δs^2	$= \Delta x^2 + \Delta y^2$	(Satz von Pythagoras)
Polarkoordinaten:	$g_{ii} = (1, r^2)$	Δs^2	$= \Delta r^2 + r^2\Delta\varphi^2$	
spezielle Relativitätstheorie:	$g_{ii} = (1, -1)$	Δs^2	$= c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$	

Mit Hilfe von Standardformeln lassen sich Transformationen in beliebige krummlinige Koordinaten elegant berechnen, sobald die Metrik bekannt ist: Für Einstein ein unschätzbares Hilfsmittel!

fläche nahezu verschwindet. Wenn a Teil eines Breitenkreises und b Teil eines Meridians sind, werden die Korrekturfaktoren g_1 und g_2 **Metrik** genannt (für die exakte Definition vgl. Kasten). Die Metrik schreibt vor, wie Linienelemente zu berechnen sind.

Die allgemeine Formel für die Bestimmung der Komponenten des Krümmungstensors ausgehend von der Metrik g_{ik} ist aufwändig (und wird hier nicht wiedergegeben), lässt sich jedoch mit Hilfe von Mittelschulmathematik bewältigen. Die Metrik kann nicht nur für anschauliche zweidimensionale Flächen formuliert werden, sondern auch für die vierdimensionale Raumzeit der Relativitätstheorie. Dabei ist es nebensächlich, dass die Krümmung der Raumzeit unser Vorstellungsvermögen übersteigt! Der Krümmungstensor der vierdimensionalen Raumzeit umfasst $4^4 = 256$ Komponenten. Einstein und sein Freund und Gehilfe Grossmann (Graf-Grossmann 2015) erkannten jedoch bereits 1913 in Zürich, dass ein vom Krümmungstensor abgeleiteter Ricci-Tensor R_{ik} mit «nur» 16 Komponenten ausreicht, um den Einbezug des Gravitationsfeldes zu ermöglichen. Aber erst im November 1915 war Einstein in Berlin so weit, dass er seine Feldgleichungen formulieren konnte (Einstein 1916).

Die Schwerkraft verschwindet in der Raumkrümmung

Das Entscheidende an der allgemeinen Relativitätstheorie ist, dass die Schwerkraft nicht als eigene Kraft betrachtet wird. Vielmehr werden die Bewegungen sowie andere Phänomene, die sich aus ihr ergeben, auf die Krümmung der Raumzeit zurückgeführt.

Das Wesen von Einsteins Theorie lässt sich am einfachst möglichen Beispiel verstehen, das der deutsche Physiker und Astronom Karl Schwarzschild (1915) als erster untersucht hat. Er hat berechnet, wie eine kugelförmige, nicht rotierende Masse die vierdimensionale Raumzeit krümmt.

Die in Abb. 7 gezeigten Einstein'schen Feldgleichungen reduzieren sich für das Vakuum um eine Masse M herum zu den 16 Gleichungen, die

durch Nullsetzen aller Komponenten des Ricci-Tensors entstehen. Zur Lösung dieser Problemstellung muss eine Metrik gefunden werden, so dass der daraus abgeleitete Ricci-Tensor null wird. Wir wissen a priori nur, dass eine solche Metrik stationär und kugelsymmetrisch sein muss. Mit einem entsprechenden Ansatz und der Forderung, dass weit weg von der Masse das Newton'sche Gravitationsgesetz gelten soll, erhält man nach beachtlicher Rechenarbeit die sogenannte Schwarzschildmetrik g^*_{ii}:

$$g^*_{ii} = \left(g^*_{00}, g^*_{11}\right) = \left(1 - \frac{r^*}{r}, -\frac{1}{1 - \frac{r^*}{r}}\right)$$

$$r^* = \frac{2GM}{c^2}$$

r^* ist der bereits oben definierte Schwarzschildradius, r die Entfernung vom Zentrum der Masse M, G die Gravitationskonstante und c die Lichtgeschwindigkeit. Man beachte, dass g^*_{00} übereinstimmt mit der eingangs vorgestellten Näherungsrechnung, die Einstein 1911 publiziert hat. Weiter ist g^*_{11} der negative Kehrwert von g^*_{00}. Ich habe für die Metrik zwei Indices verwendet, obwohl für diesen Spezialfall ein Index genügen würde. Im allgemeinen Fall ist jedoch g_{ik} für die vierdimensionale Raumzeit ein Tensor mit $4^2 = 16$ Komponenten. Für den kugelsymmetrischen Spezialfall der Schwarzschild-Metrik sind alle Komponenten null ausser den «Diagonalkomponenten» g^*_{ii} (beide Indices gleich). Zudem sind die Komponenten g^*_{22} und g^*_{33} beide gleich wie in einem flachen Raum, weshalb ich sie nicht geschrieben habe. Deshalb sind für die Schwarzschild-Lösung der Feldgleichungen nur die Metrikkomponenten g^*_{00} (betrifft die Zeit) und g^*_{11} (betrifft die radiale Entfernung r vom Massenzentrum) interessant. Für grosse Entfernungen r werden die beiden Komponenten annährend 1 und -1. Die Metrik geht also wie gefordert in diejenige einer flachen Raumzeit ohne Gravitation über und wird identisch mit der Metrik (1, -1) der speziellen Relativitätstheorie. Für detaillierte Zusammenhänge sei auf das Vorlesungsskript von Klas und Main (2015) verwiesen.

Gravitation verlangsamt die Zeit

Bemerkenswert ist, dass die Krümmung der Raumzeit sich auch auf die Zeit auswirkt. Um dies zu illustrieren, betrachten wir eine Raumsonde, die via Radiowellen übermittelte Sekundenpulse einer Erdenstation empfängt. In einem globalen Koordinatensystem befinde sich das Zentrum der Erde im Nullpunkt und die Bodenstation auf einer Raumachse im Abstand r (r = Erdradius). Die Raumsonde liege auf derselben Achse sehr weit von der Erde entfernt. In diesem globalen Koordinatensystem wird das Gravitationsfeld der Erde durch die Schwarzschildmetrik g^*_{ii} beschrieben (die Sonne und alle anderen Planeten werden vernachlässigt). Nach dem oben erwähnten Äquivalenzprinzip kann das Gravitationsfeld bei der Bodenstation ersetzt werden durch eine entsprechende Beschleunigung der Station mit +9.81 m/s^2, ohne dass dadurch ein physikalisches Gesetz verändert wird. In diesem gedachten lokalen, beschleunigten und gravitationsfreien Koordinatensystem der Bodenstation gilt die Metrik (1,-1) der speziellen

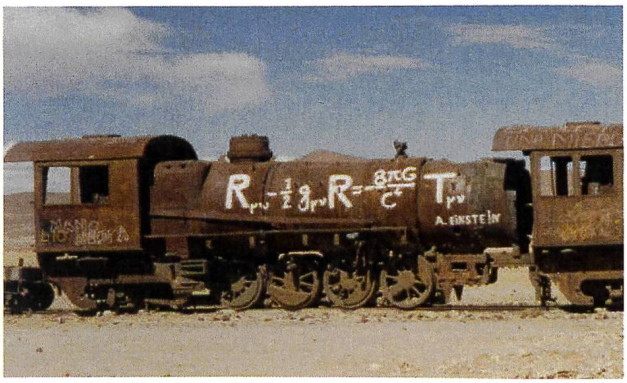

Abb. 7: Die Einstein'schen Feldgleichungen auf einer ausrangierten Dampflokomotive auf dem Altiplano nahe Uyuni (Bolivien). $g_{\mu\nu}$, G, c bedeuten die Metrik, die Gravitationskonstante und die Lichtgeschwindigkeit. $R_{\mu\nu}$ ist der Ricci Tensor, R der Ricci Skalar (eine Zahl, die aus dem Ricci Tensor berechnet werden kann) und $T_{\mu\nu}$ der Energie-Impulstensor, der im Vakuum ausserhalb von Massen verschwindet (Foto des Autors, August 2000).

Relativitätstheorie. Nach der allgemeinen Relativitätstheorie verändert sich das Linienelement Δs nicht bei der Umrechnung vom globalen zum lokalen Koordinatensystem:

Bodenstation im globalen System:
$\Delta s^2 = g^*_{00}\, c^2\, \Delta t_R^2 + g^*_{11}\, \Delta r_R^2$

Bodenstation im lokalen System:
$\Delta s^2 = 1\, c^2\, \Delta t_B^2 - 1\, \Delta r_B^2$

Da sich nichts bewegt (auch das beschleunigte Erdenlabor bewegt sich nicht, falls das Gravitationsfeld in Gedanken nur kurzzeitig durch eine Beschleunigung ersetzt wird), verschwinden beide Δr und die Gleichsetzung der Linienelemente ergibt nach Division durch c^2: $g^*_{00}\, \Delta t_R^2 = \Delta t_B^2$. Nun setzen wir den Ausdruck für g^*_{00} ein und erhalten:

$(1-r^*/r)\, \Delta t_R^2 = \Delta t_B^2$

Da $(1-r^*/r)$ ein wenig kleiner als eins ist (r^*/r ist gleich 9 mm dividiert durch den Erdradius r), kommen die Sekundenimpulse (Δt_B = 1s) der Bodenstation bei der Raumsonde in Abständen Δt_R an, die etwas grösser als eine Sekunde sind: Die Zeit im Gravitationsfeld (betrachtet von der Raumsonde aus) läuft langsamer!

Das GPS-System zeigt, dass dies auch quantitativ exakt zutrifft. Die theoretische gravitationsbedingte Zeitkorrektur $3r^*/(8r)$ ergibt, dass die Satellitenuhren um 45 µs/d (Mikrosekunden pro Tag) auf Grund des beim Satelliten kleineren Gravitationsfeldes schneller ticken als die Referenzuhr auf der Erde. Da die Satellitenuhren wegen der Umlaufgeschwindigkeit von 4 km/s um die Erde um 7 µs/d langsamer ticken (dies folgt aus der speziellen Relativitätstheorie), sind sie insgesamt 38 µs/d schneller als die Referenzuhr auf dem Erdboden. Die Atomuhren im Satellitensystem werden deshalb um diesen Betrag verlangsamt, um die Synchronisation mit der Referenzuhr am Boden zu gewährleisten. Für eine Genauigkeit des GPS-Systems von 15 m (Lichtweg in 50 ns) müssen alle beteiligten Uhren auf besser als 50 ns genau synchron laufen; 38 µs/d ist also eine wichtige Korrektur und entspricht 38000/50 x 15 = 11400 Meter pro Tag.

Gravitationswellen

Nach den obigen Überlegungen haben wir die minimalen Voraussetzungen, um das Wesen der Gravitationswellen einigermassen zu verstehen. Bereits Einstein bemerkte, dass seine Feldgleichungen Gravitationswellen zulassen. Dies sind Schwingungen der Metrik g_{ik}, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Ein zusätzlicher Gedanke soll helfen zu erkennen, wie abstrakt und ungewohnt solche Wellen sind: Im 19. Jahrhundert hatten selbst Physiker Mühe, sich elektromagnetische Wellen (Radiowellen, Mikrowellen, Licht, Röntgenstrahlung, etc.) im Vakuum vorzustellen. Sie dachten, dass etwas da sein müsse, das schwingen kann und nannten dieses Etwas «Äther». Obwohl seit einem Jahrhundert klar ist, dass kein solcher Äther existiert, werden Radiowellen selbst heute noch gelegentlich als Ätherwellen bezeichnet! Es ist jedoch nicht ein Äther, der schwingt, sondern es sind die etwas abstrakt anmutenden elektrischen und magnetischen Felder, die oszillieren. Immerhin sind diese beiden Felder so real, dass selbst Kinder damit spielen können: Nägel anziehen mit Magneten, Papierchen anziehen mit am Pullover geriebenem Glasstab etc. Und nun zu den Gravitationswellen als Schwingungen der Metrik: Im Gegensatz zu den Komponenten des elektrischen Feldes haben die Metrikkomponenten keine Masseinheit, es sind reine Zahlen. Das Metrikfeld ist deshalb abstrakter als ein elektrisches Feld, da es keine materielle Referenzgrösse gibt (wie z.B. Elektronen mit einer bestimmten Ladung), mit der man experimentieren könnte! Das Feld besteht in einer von Ort zu Ort ändernden Vorschrift, wie Längen und Zeiten in Linienelemente umzurechnen sind, und diese Vorschrift breitet sich wellenförmig mit Lichtgeschwindigkeit durch das Vakuum aus.

Ein weiteres Problem ist die Kleinheit der Effekte, die durch Gravitationswellen verursacht werden. Die daraus entstehenden Oszillationen der Distanz zwischen zwei Punkten mit festen Koordinaten (es bewegt sich nichts und trotzdem verändert sich der Abstand) sind so klein, dass sie erst kürzlich nachgewiesen werden konnten. Sie betragen etwa den Durchmesser eines Haares bezogen auf die Distanz zum erdnächsten Stern

Alpha Centauri, der 4.4 Lichtjahre von der Erde entfernt ist. Es ist verständlich, dass Physiker 50 Jahre benötigten, um eine Messapparatur zu entwickeln, die Gravitationswellen nachweisen kann.

Das Observatorium LIGO

Seit den 1960er-Jahren wurden Überlegungen angestellt und erste (erfolglose) Experimente durchgeführt, um Gravitationswellen zu messen. Heute sind weltweit hunderte Wissenschaftler in vier Gravitationswellen-Observatorien beschäftigt: LIGO (Zwillingsobservatorium USA), GEO600 (Deutschland-England, bei Hannover), Virgo (Frankreich-Italien, bei Pisa) und KAGRA (Japan). Ein weiteres Observatorium ist in Indien geplant. Die erste Beobachtung von Gravitationswellen war dem LIGO-Observatorium (Abb. 8) am 14. September 2015 vergönnt. Erst nach genauen Analysen und weiteren Abklärungen wurde das Resultat am 11. Februar 2016 publik gemacht.

LIGO ist die Abkürzung für Laser Interferometer Gravitationswellen Observatorium. Das Prinzip (auch bei den anderen drei Observatorien) ist also dasselbe, das Michelson vor hundert Jahren anwendete und damit feststellte, dass kein Äther existiert. Die Funktionsweise von Interferometern wird im Anhang erklärt.

Bei LIGO sind die beiden Arme des Interferometers je 4 km lang. Um den Lichtweg weiter zu verlängern und die Empfindlichkeit zu steigern, wird ein 200-Watt-Laserstrahl in beiden Armen 280-mal hin- und hergeschickt. Kleinste Luftbewegungen und Temperaturunterschiede würden

Abb. 8: Nördlicher Arm des LIGO Hanford Observatoriums für Gravitationswellen im Bundesstaat Washington nahe der Westküste der USA. Seine beiden Arme stehen senkrecht aufeinander und haben eine Länge von je 4 km (Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/LIGO).

die Lichtgeschwindigkeit etwas verändern und Gravitationswellen vortäuschen. Deshalb werden die Lichtstrahlen in einem Ultra-Hochvakuum in Rohren geführt: Es ist dies das grösste Ultra-Hochvakuum-Volumen auf der Erde! Kritisch sind auch kleinste Erschütterungen (Mikroerdbeben, Autos), weshalb die Spiegel auf einem aktiven hydraulischen Vibrationsisolationssystem montiert sind, das alle Schwingungen im Bereich von 0.1...5 Hz stark dämpft. Um sicher zu sein, dass ein registriertes Signal eine Gravitationswelle ist, wurden zwei identische Observatorien gebaut, die 3000 km auseinander liegen. Das eine steht in Livingston (Louisiana, Südküste der USA), das andere in Hanford (Bundesstaat Washington, nahe Westküste). Ein Signal wird nur dann als Gravitationswelle akzeptiert, wenn es durch beide Observatorien beinahe simultan gemessen wird. Mit Hilfe des Unterschiedes der Ankunftszeiten (Licht oder Gravitationswellen brauchen für 3000 km eine Hundertstelsekunde) kann zudem bestimmt werden, auf welcher Kegelfläche die Quelle einer ankommenden Gravitationswelle liegen muss. Sobald weitere Observatorien in Europa und Japan in Betrieb sein werden, wird die Richtung zur Quelle eindeutig angegeben werden können.

LIGO wurde für den Frequenzbereich 1 Hz bis 10 kHz ausgelegt, der etwa im Hörbereich des Menschen liegt: Man kann das Gravitationswellensignal also über einen Lautsprecher hörbar machen. In diesem Frequenzbereich liegen Wellen von Supernovas, der Koaleszenz von Doppelsternsystemen, vom Urknall, von wachsenden Neutronensternen oder schnell rotierenden asymmetrischen Neutronensternen. Dies sind alles interessante Objekte, die mit Hilfe der Gravitationswellen-Astronomie erforscht werden können, und es bestehen kaum Zweifel, dass sich Überraschungen ergeben werden. Für weitere Ausführungen vgl. https://en.wikipedia.org/wiki/LIGO.

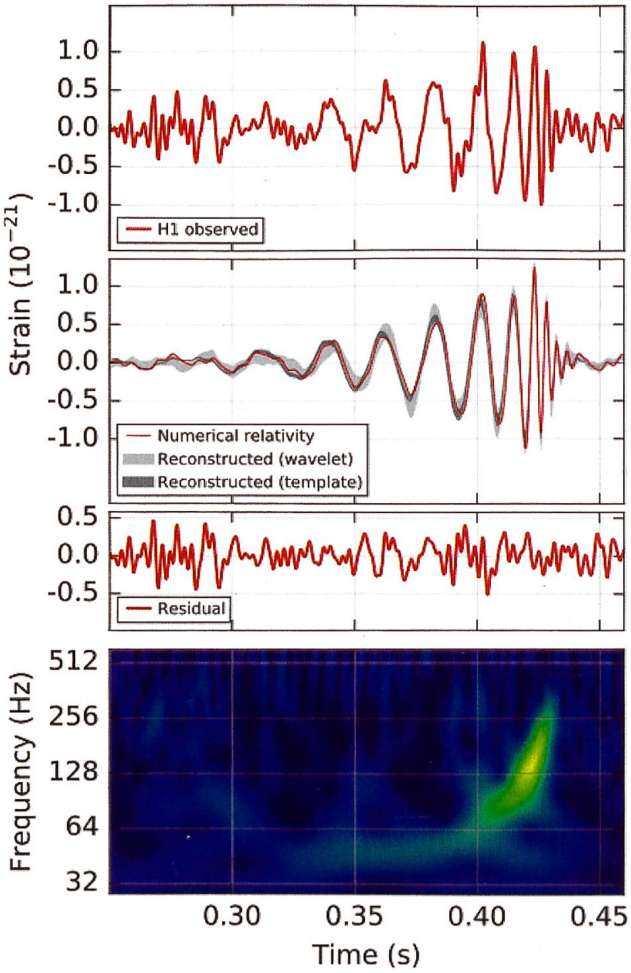

Abb. 9: Am LIGO Hanford gemessenes Signal am 14. September 2015 (oberste Grafik) zusammen mit einer Simulationsrechnung für das Verschmelzen zweier schwarzer Löcher (zweitoberste Grafik). Die mit Strain bezeichnete Ordinate ist die gemessene relative Längenänderung: Strain = 0 bedeutet Normallänge der Interferometerarme ohne Gravitationswelle. Strain = 1.0 bedeutet, dass der relative Längenunterschied der beiden Arme ein Trillionstel Promille beträgt. Dies entspricht einem Haardurchmesser bezogen auf die Distanz Erde-Alpha Centauri (4.4 Lichtjahre)! Darunter ist die Differenz von Rechnung und Messung dargestellt und zeigt, dass es sich um ein typisches Zufallssignal handelt, d.h. Rechnung und Messung stimmen bis auf kleine zufällige Störungen überein. Im untersten Bild sieht man die Zunahme der Frequenz und Signalstärke dieses Zirpsignals: Die Amplitude der Gravitationswelle wird immer grösser und ihre Frequenz höher, je näher sich die beiden schwarzen Löcher kommen (analog einer Eiskunstläuferin, die für eine Pirouette beide Arme einzieht) (Quelle: Abbott et al. 2016).

Was wurde gemessen?

Das in Abb. 9 gezeigte Signal (Abbott et al. 2016) wurde an beiden LIGO-Observatorien weitgehend identisch empfangen, in Livingston 7 ms vor Hanford. Es war knapp 0.2 s lang und seine Frequenz stieg in 8 Zyklen von 45 auf 150

Hz an. Gleichzeitig wurde seine Amplitude immer grösser, bis es stark gedämpft endete. Als Schallsignal glich es dem Zirpen eines Vogels (engl. «chirp-signal»).

Auf Grund von Simulationsrechnungen gleicht das Signal am ehesten demjenigen eines Doppelsternsystems bestehend aus zwei schwarzen Löchern, die zu einem einzigen schwarzen Loch verschmolzen. Durch die schnelle Rotation des Systems (rund 0.03 s pro Umlauf) wurde Energie in Form von Gravitationswellen abgestrahlt. Dadurch haben sich die beiden schwarzen Löcher angenähert und nach dem Impulserhaltungssatz mussten sie sich immer schneller um den gemeinsamen Schwerpunkt drehen (vgl. Pirouette einer Eiskunstläuferin). Unmittelbar vor dem Verschmelzen bei einer Distanz ihrer Schwerpunkte von nur 350 km müssen ihre Geschwindigkeiten etwa ein Viertel der Lichtgeschwindigkeit betragen haben. Dieser enorme Drehimpuls (mehrere Sonnenmassen x Lichtgeschwindigkeit/4 x Bahnradius) erzeugte Gravitationswellen mit einer Leistungsspitze von etwa $4 \cdot 10^{49}$ W: Sie haben kurzzeitig die gesamte Strahlungsleistung aller Sterne im beobachtbaren Teil des Universums übertroffen! Die beiden schwarzen Löcher dürften rund 29 und 36 Sonnenmassen enthalten haben und bildeten nach dem Verschmelzen ein schnell rotierendes schwarzes Loch von etwa 62 Sonnenmassen. Die fehlenden 3 Sonnenmassen wurden in Form von Gravitationswellen abgestrahlt. Mit der Grösse des Signals kann man durch Vergleich mit der theoretisch berechenbaren Quellstärke die Distanz zu etwa 1.3 Milliarden Lichtjahren schätzen. Die Gravitationswellen brauchten also fast 10% des Alters des Universums, um bis zu uns zu gelangen.

Ausblick

Mit dem eindeutigen Nachweis von Gravitationswellen wurde die Relativitätstheorie ein weiteres Mal bestätigt und mit den Gravitationswellen-Observatorien hat die Menschheit ein neues äusserst interessantes Fenster ins tiefe Universum erhalten. Gravitationswellen gehen durch undurchsichtige Gaswolken oder Galaxien hindurch und ermöglichen Beobachtungen bis zurück zum Urknall. Die Entwicklung solcher Observatorien hat durch den in den USA erzielten Durchbruch enorm an Schub gewonnen, sodass weitere rund um den Globus entstehen werden. Schliesst man mehrere weit auseinanderliegende Observatorien zusammen, lässt sich die Himmelsposition von Ereignissen genau bestimmen. In gewissen Fällen wie dem Verschmelzen von schwarzen Löchern kann man sogar die absolute Distanz bestimmen, was in der Astronomie sonst nur selten gelingt.

Die europäische Raumfahrtbehörde ESA plant mit LISA (Laser Interferometer Space Antenna) das ultimative Gravitationswellen-Observatorium im Weltraum: Drei Satelliten, die 50 Millionen km hinter der Erde die Sonne umkreisen, sollen ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlängen von 2.5 Millionen km aufspannen. Auf Grund der riesigen Kantenlängen und der fehlenden Erschütterungen wird es wesentlich empfindlicher sein als erdengebundene Systeme und auch kleinere und weiter entfernte Quellen in tieferen Frequenzbereichen messen können. Ausserdem steht das Hochvakuum gratis zur Verfügung. Ein 2015 stattgefundener Testflug hat gezeigt, dass die erwarteten Spezifikationen des für das Jahr 2034 geplanten Systems sogar übertroffen werden dürften. Die Entdeckung neuer überraschender Phänomene wäre damit vorprogrammiert!

Wird man den Urknall besser verstehen? Wird man mit dem Problem der dunklen Energie und der dunklen Materie weiterkommen? Wird man Fortschritte beim grossen Problem der Vereinigung von Quantentheorie und Relativitätstheorie machen können? Wird das Standardmodell der Elementarteilchenphysik erweitert oder ersetzt werden müssen? Die Physik hat nicht das Ende erreicht, sondern einen Sprung nach vorne erlebt!

Literatur

Abbott BP and ca.1060 authors from 133 research institutes (2016): Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. Phys. Rev. Lett. 116(6): 1-15.

Einstein A (1905): Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? Ann. d. Phys. 17: 639-641.

Einstein A (1911): Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes. Ann. d. Phys. 35: 898-908.

Einstein A (1916): Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. d. Phys. 49: 769-822.

Graf-Grossmann CE (2015): Marcel Grossmann – Aus Liebe zur Mathematik. Römerhof Verlag, Zürich, 326 Seiten.

Klas M, Main J (download 2015): Skript zur Vorlesung Allgemeine Relativitätstheorie. http://itp1.uni-stuttgart.de/lehre/vorlesungen/rela2/ws2007/Rela2.pdf

Schwarzschild K (1915): Brief vom 22. Dez. 1915 an Einstein. In: The Collected Papers of Albert Einstein 8a, doc. #169.

Anhang
Prinzip des Interferometers

Ein Interferometer ist ein sehr empfindliches Gerät zur Messung von Wegdifferenzen. Die Messgenauigkeit ist bei normalen Interferometern ein kleiner Bruchteil der Wellenlänge des verwendeten Lichtes und liegt im Nanometerbereich. Abb. 10 zeigt das Prinzipschema: Ein Laserstrahl wird durch einen halbdurchlässigen Spiegel in zwei gleich starke Teilstrahlen aufgespalten. Die beiden Teilstrahlen (in Abb. A1 durchgezogen und gestrichelt) durchlaufen zwei senkrecht aufeinander stehende gleich lange Wege und werden in einem Detektor überlagert. Falls die Lichtlaufzeiten exakt gleich gross sind, überlagern sich die beiden Teilstrahlen konstruktiv und erzeugen ein starkes Signal im Detektor. Unterscheiden sich die Lichtlaufzeiten jedoch um eine halbe Periode, sind die beiden Teilstrahlen im Detektor um eine halbe Wellenlänge gegeneinander verschoben und löschen sich aus. Ist der durchgezogene Ast unverändert, währenddem sich der gestrichelte Ast um wenige Nanometer verändert oder sich seine Lichtlaufzeit auf Grund von Veränderungen des Brechungsindex um wenige Attosekunden (10^{-18} s) verändert, ergibt sich eine veränderte Lichtintensität im Detektor.

Beim LIGO wird ein starker Laserstrahl (um 200 W) verwendet und die senkrecht aufeinander stehenden Arme sind je 4 km lang. Durch 280-fache Reflexion verlängert sich der Lichtweg um das 280-fache, sodass die beiden Wege je etwa 2000 km lang werden. Durch eine Veränderung der Länge des einen Astes gegenüber dem anderen von 10^{-21} m pro m = $2 \cdot 10^{-15}$ m pro 2000 km ergibt sich eine Phasendifferenz der sich überlagernden Lichtstrahlen von $360° \cdot 2 \cdot 10^{-15}$ dividiert durch die Lichtwellenlänge. Bei ultraviolettem Licht mit einer Wellenlänge von 200 nm ergibt dies eine Phasendifferenz von etwa 0.02 Winkelsekunden. Die Apparatur ist so gebaut, dass sich die reflektierten Strahlen ohne Gravitationswelle durch Interferenz gegenseitig exakt auslöschen. Durch eine Gravitationswelle entsteht eine Asymmetrie, die Arme des Interferometers sind nicht mehr genau gleich lang und dies bewirkt, dass sich die Teilstrahlen nicht mehr genau auslöschen: Es entsteht ein Signal entsprechend einer Phasendifferenz von 0.02 Winkelsekunden, das rund 10 Millionen mal kleiner ist als das maximale Überlagerungssignal, das in der Grössenordnung von einigen Watt liegen dürfte. Das Signal wird also etwa 1 μW gross, was zweifelsfrei messbar ist.

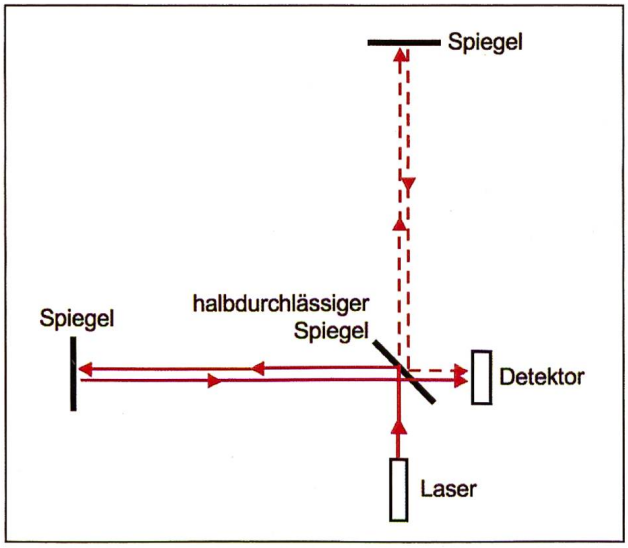

Abb A1: Schema eines Interferometers. Erklärungen siehe Text.