Geometrie

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Pestalozzi-Kalender**

Band (Jahr): **17 (1924)**

Heft [1]: **Schülerinnenkalender**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

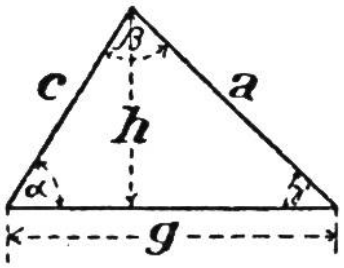
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Geometrie

Formeln zur Inhaltsberechnung von Flächen u. Körpern

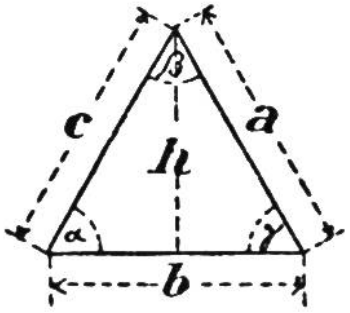


Dreieck:

Grundlinie = g, Höhe = h, Fläche = F,

$$F = \frac{g \cdot h}{2}; \quad g = \frac{2F}{h}; \quad h = \frac{2F}{g};$$

$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma = 180° = 2$ rechte $\sphericalangle$



Gleichseitiges Dreieck:

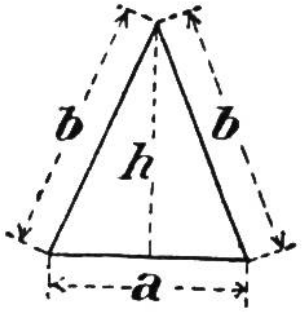
Seiten $= a = b = c$, $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma = 60°$;

$$F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 0{,}433\,a^2; \quad \sqrt{3} = 1{,}73205.$$

genauer $0{,}4330125 \cdot a^2$

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}};$$

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = a \cdot 0{,}866025.$$

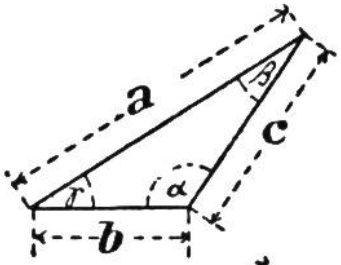


Gleichschenkliges Dreieck:

Grundlinie $= a$, gleiche Seiten $= b$

$$F = \frac{a}{4}\sqrt{(2b+a)\cdot(2b-a)} = \frac{a}{2}\sqrt{\left(b+\frac{a}{2}\right)\cdot\left(b-\frac{a}{2}\right)}$$

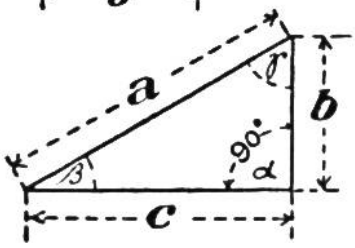
$$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad h = \sqrt{\left(b+\frac{a}{2}\right)\cdot\left(b-\frac{a}{2}\right)};$$



Ungleichseitiges Dreieck:

Seiten a, b und c, $s = \frac{a+b+c}{2}$

$$F = \sqrt{s(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}.$$

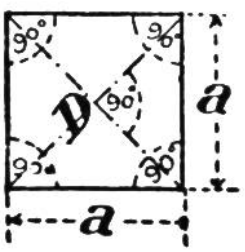


Rechtwinkliges Dreieck: $\sphericalangle a = 90°$;

Hypothenuse $= a$, Katheten $= b, c$,

$$F = \frac{b \cdot c}{2}; \quad a^2 = b^2 + c^2; \quad a = \sqrt{b^2 + c^2},$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

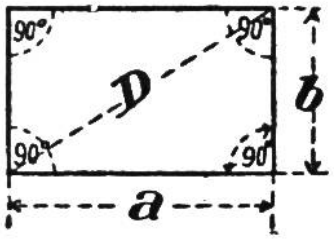


Quadrat: Seite $= a$, Diagonale $= D$,

$$F = a \cdot a = a^2, \qquad a = \sqrt{F}.$$

$$D = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = a \cdot 1{,}4142.$$

E. Porthun

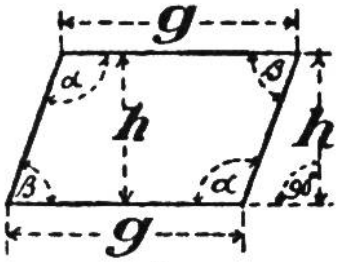


Rechteck:

Seiten a und b, Diagonale $= D$;

$$F = a.b,\quad a = \frac{F}{b};\quad b = \frac{F}{a};$$

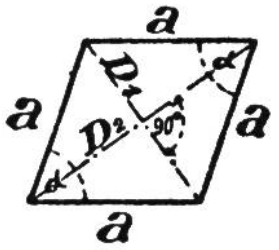
$$D = \sqrt{a^2+b^2};$$



Parallelogramm:

Grundlinie $= g$, Höhe rechtwinklig auf Grundlinie $= h$,

$$F = g.h;\quad g = \frac{F}{h};\quad h = \frac{F}{g}.$$

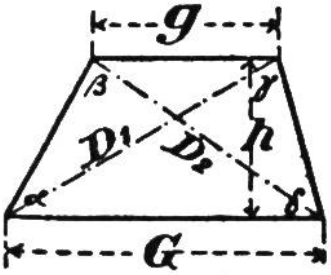


Rhombus:

Gleiche Seiten $= a$, Diagonalen D_1 u. D_2

$$F = a^2.\sin\alpha;\quad F = \frac{D_1 \cdot D_2}{2};$$

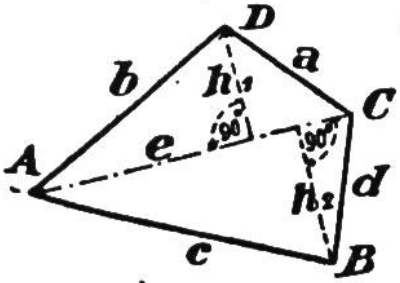
$$D_1 = \frac{2F}{D_2};\quad D_2 = \frac{2F}{D_1}.$$



Trapez:

Parallelseiten $= G$ und g, Höhe $= h$,
Diagonalen $= D_1$ und D_2,

$$F = \frac{G+g}{2}h,\quad \sphericalangle\alpha+\beta+\gamma+\delta = 4R;$$

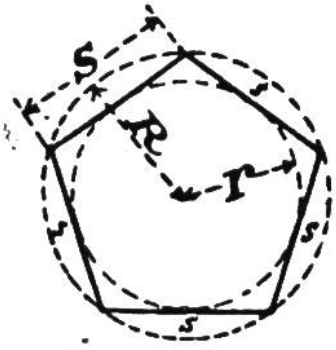


Trapezoid:

Diagonale AC, rechtwinklig darauf die Höhen h_1 und h_2

$$F = \frac{AC}{2}.h_1+h_2;\ = \frac{e}{2}.h_1+h_2.$$

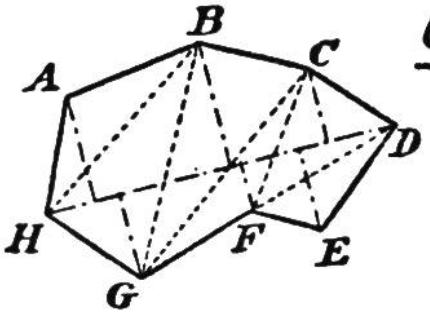
Reguläre Vielecke (Polygone):



Seite $= S$,
Radius des umschriebenen Kreises $= R$
Radius d. eingeschriebenen Kreises $= r$.

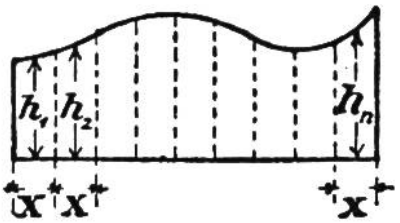
Polygon	R	r	S	F
Dreieck	0.577 S	0.289 S	1.732 R od. 3.463 r	0.433 S^2 od. 1.299 R^2
Quadrat	0.707 S	0.500 S	1.414 R „ 2.000 r	1.000 S^2 „ 2.000 R^2
Fünfeck	0.851 S	0.688 S	1.176 R „ 1.453 r	1.721 S^2 „ 2.378 R^2
Sechseck	1.000 S	0.866 S	1.000 R „ 1.155 r	2.598 S^2 „ 2.598 R^2
Siebeneck	1.152 S	1.038 S	0.868 R „ 0.963 r	3.634 S^2 „ 2.736 R^2
Achteck	1.307 S	1.208 S	0.765 R „ 0.828 r	4.828 S^2 „ 2.828 R^2
Neuneck	1.462 S	1.374 S	0.684 R „ 0.728 r	6.182 S^2 „ 2.892 R^2
Zehneck	1.618 S	1.540 S	0.618 R „ 0.649 r	7.694 S^2 „ 2.939 R^2
Elfeck	1.775 S	1.704 S	0.563 R „ 0.587 r	9.366 S^2 „ 2.973 R^2
Zwölfeck	1.932 S	1.866 S	0.518 R „ 0.536 r	11.196 S^2 „ 3.000 R^2

E. Pechan



Unregelmässige Vielecke od. Flächen:

Die Fläche kann berechnet werden durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittels Diagonalen u. Summierung der ermittelten Dreiecksflächen, oder auch durch Einteilung in Trapeze u. Dreiecke vermittels einer passend gewählten Abscisse und rechtwinklig auf diese errichteten Koordinaten der Eckpunkte, Summierung des ermittelten Inhalts dieser Trapeze u. Dreiecke.

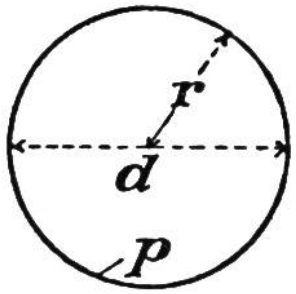


Durch Zerlegung in parallele Streifen von gleicher Breite x und mittl. Höhen $h_1, h_2 \ldots . h_n$.

$$F = x.(h_1 + h_2 \ldots . + h_n).$$

Kreis:

Durchmesser = d, Radius = r, Umfang = p, Inhalt = F.



$$p = 2r.\pi = d\pi = d.3{,}14159,$$

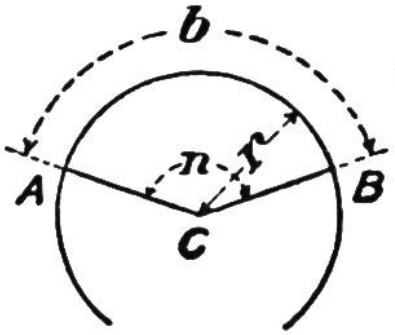
$$F = r^2.\pi = \frac{d^2.\pi}{4} = 0{,}785.d^2.$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 0{,}564.\sqrt{F}.$$

$$d = 2.\sqrt{\frac{F}{\pi}} = 1{,}128\sqrt{F}.$$

Kreissektor: (ABC)

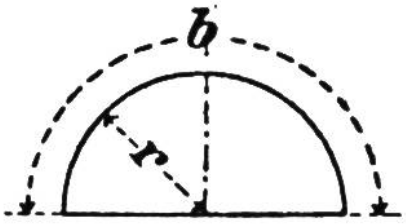
Radius = r, Bogen = b Zentriwinkel = n



$$F = \frac{r^2.\pi.n}{360} = \frac{b.r}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{F.360}{\pi.n}} = \frac{b}{\pi} \cdot \frac{180}{n};$$

$$n = \frac{360.F}{r^2.\pi}, = \frac{b}{r.\pi} \cdot 180;$$

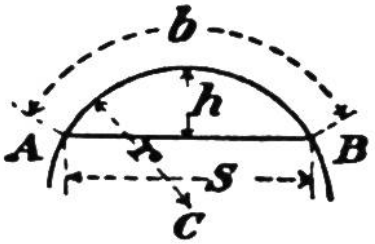


$$b = 2r.\pi.\frac{n}{360}. = r.\pi.\frac{n}{180};$$

Halbkreis: Bogen = $b = \pi r$, Fläche = $F = \frac{\pi r^2}{2}$.

Viertelkreis: " = $b = \frac{\pi r}{2}$; $F = \frac{\pi r^2}{4}$;

Kreisabschnitt:



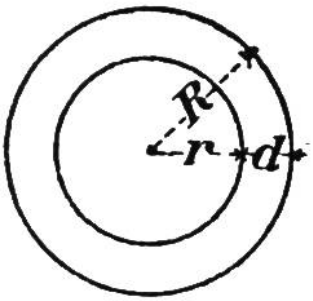
Sehne = s, Höhe = h, $F = \frac{2}{3}s.h$.

genau $F = \frac{r^2.\pi.n}{360} - \frac{1}{2}s\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2} = \frac{br - s(r-h)}{2}$.

$$s = 2\sqrt{h(2r-h)}; \quad r = \frac{s^2}{8h} + \frac{h}{2}.$$

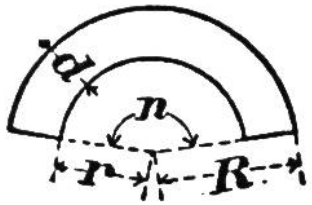
E. Pochan.

Kreisring:



Aeusserer Radius = R,
Innerer Radius = r,
$F = R^2\pi - r^2\pi = \pi(R+r).(R-r)$.
wenn d = radiale Breite des Kreisrings
so ist $F = \pi.(2r+d).d$;

Kreisringstück (Konzentrisch)

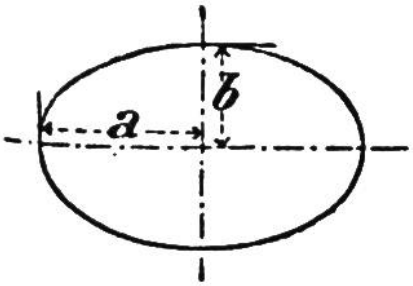


Aeusserer Radius = R,
Innerer Radius = r;
Zentriwinkel = n, radiale Breite = d,

$$F = (R^2\pi - r^2\pi)\frac{n}{360} = (R^2 - r^2).\frac{\pi n}{360};$$

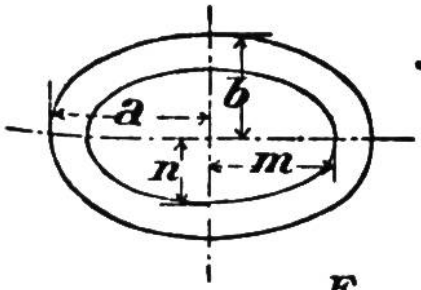
$$= (R+r)d\frac{\pi.n}{360} = (R+r)d.n.0.0087;$$

Ellipse:



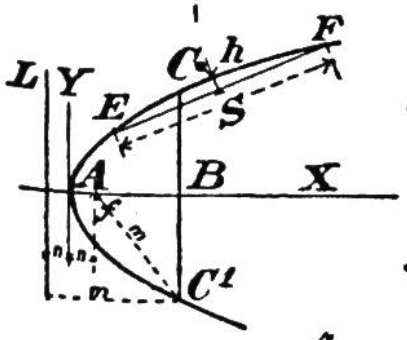
Halbe grosse Axe = a,
Halbe kleine Axe = b,
Fläche $F = a.b.\pi$;

Elliptischer Ring:



Halbe Axen der äussern Ellipse = a, b,
Halbe Axen der innern Ellipse = m, n,
Fläche: $F = \pi.(ab - mn)$.

Parabelsegment ECF:

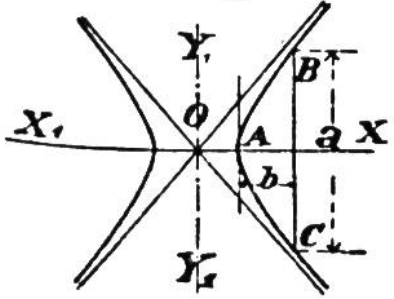


$$F = \frac{2}{3}s.h, \quad s = \overline{EF};$$

Parabelfläche CAC¹:

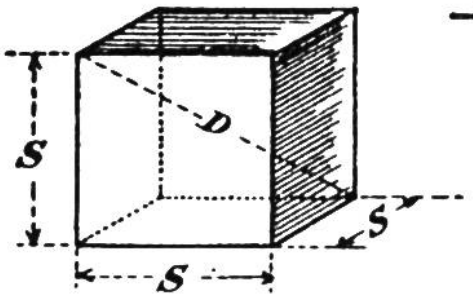
$$F = \frac{2}{3}\,\overline{CC^1}.\overline{AB};$$

Hyperbelsegment ABC:



Sehne = a; Höhe = b,
F (annähernd) = $\frac{3}{5}a.b$;

Würfel:



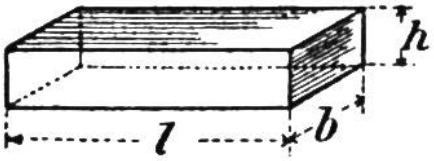
Seite = S, Inhalt = K, Oberfläche = O

$K = S^3$; $O = 6S^2$;

$S = \sqrt[3]{K}$

Diagonale $= D = \sqrt{3S^2} = S\sqrt{3} = S \cdot 1{,}732050$.

Parallelflach:

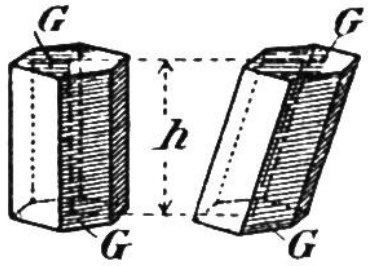


Länge = l, Breite = b, Höhe = h,

Inhalt = $K = l.b.h$.

Oberfläche = $O = 2.(l.b + l.h + b.h)$

Prisma:

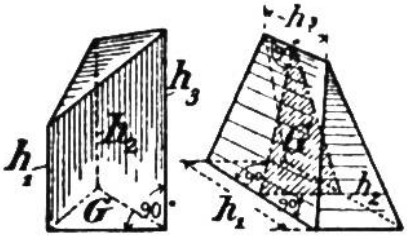


Grundfläche = G, Höhe = h;

Inhalt = $K = G.h$.

Oberfläche O = Umfang der Grundfläche $U \times h + 2G$.

Schiefabgeschnittenes Prisma:



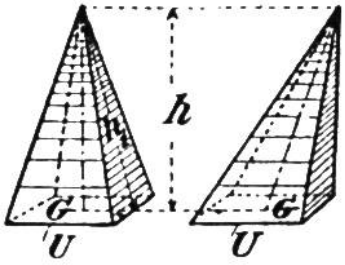
Flächeninhalt des senkrechten Querschnittes = G,

Länge der Kanten = $h, h_2 h_3 \ldots\ldots h_n$,

Inhalt $K = G.\frac{h_1 + h_2 + h_3 + \ldots, h_n}{n}$.

Bei mehr als 3 Kanten ist das Prisma regelmässig oder hat dasselbe wenigstens Axensymetrie.

Pyramide:



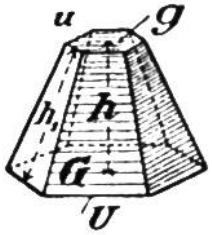
Grundfläche = G, Höhe = h,

$K = \frac{G.h}{3}$; $h = \frac{3K}{G}$, $G = \frac{3K}{h}$;

Mantel M = Umfang der Grundfläche $U \times \frac{h_1}{2}$;

Oberfläche $O = M + G$.

Abgestumpfte Pyramide:

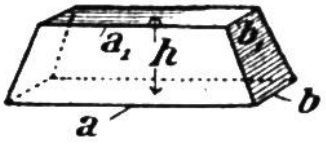


Parallele Endflächen = G, g, ihr Abstand = h,

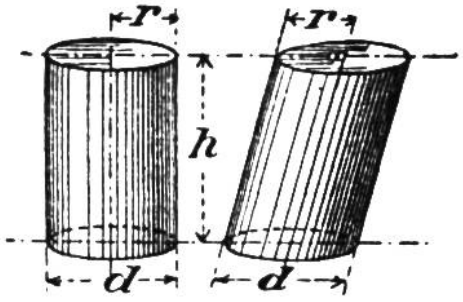
ihre Umfänge U, u, Mantel $M = \frac{U+u}{2}.h_1$,

$K = \frac{h}{3}(G + g + \sqrt{Gg})$; $O = M + G + g$.

Obelisk, Wall, (regelmässig aufgeschütteter Haufen)



$K = \frac{1}{6}h\left[(2a + a_1)\,b + (2a_1 + a)\,b_1\right]$.



Cylinder (Walze)

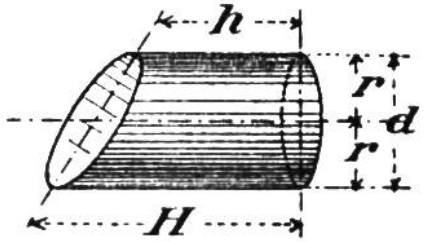
Radius = r, Durchmesser = d, Höhe = h

Inhalt $K = r^2\pi.h$ oder $\frac{d^2}{4}\pi.h$

$r = \sqrt{\frac{K}{\pi h}}$; $h = \frac{K}{r^2\pi}$

Mantel = $2r\pi.h$ oder $d\pi h$.

Oberfläche = $2r\pi.(r+h)$ oder $d\pi(\frac{d}{2}+h)$.

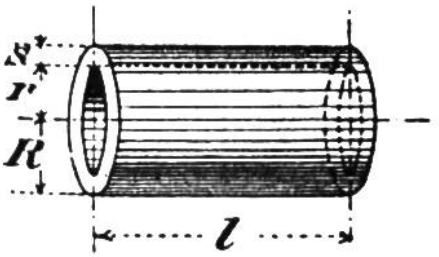


Schiefabgeschnittener Cylinder:

Grösste Höhe = H, kleinste Höhe = h,

Inhalt $K = r^2\pi.\frac{H+h}{2}$ oder $\frac{d^2}{4}\pi.\frac{H+h}{2}$

Mantel = $r\pi(H+h)$



Hohlcylinder (Rohr):

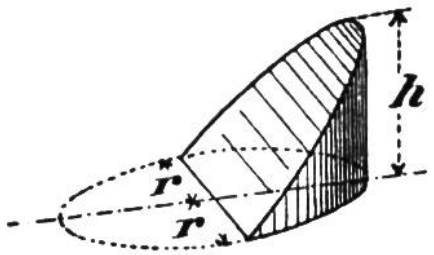
Innerer Radius = r,

Äusserer Radius = R, Länge = l,

Wandstärke = $s = R - r$,

Inhalt $K = \pi.l.(R^2 - r^2)$, oder

$K = \pi.l.s\,(2R - s)$ oder $\pi.l.s\,(2r+s)$.

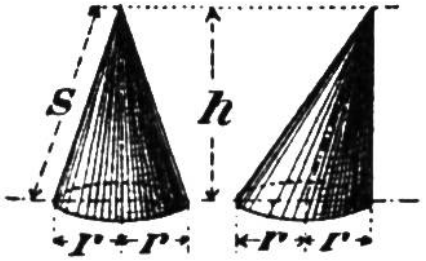


Cylinderhuf:

Radius der Grundfläche = r,

Höhe des Hufes = h, Mantel = $2rh$.

Inhalt: $K = \frac{2}{3}r^2 h$.



Kegel:

Radius der Grundfläche = r.

Höhe = h, Seite = $s = \sqrt{r^2+h^2}$,

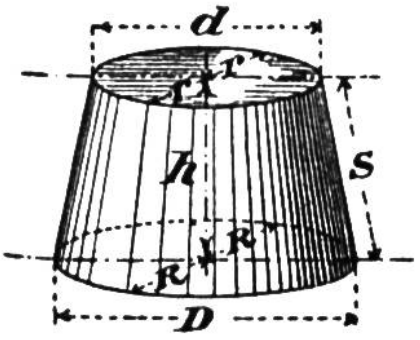
Mantel $M = \pi r.\sqrt{r^2+h^2}$ oder $\pi.r.s$,

Oberfläche = $\pi.r^2 + r\pi.s$ oder $r\pi(r+s)$

oder = $\pi r.(r+\sqrt{r^2+h^2})$.

Inhalt $K = \frac{1}{3}r^2\pi.h$;

$r = \sqrt{\frac{3K}{\pi.h}}$; $h = \frac{3K}{r^2\pi}$.



Abgestumpfter Kegel:

Radien der parallelen Endflächen = R und r,

Durchmesser = D und d, Höhe = h, Seite = s,

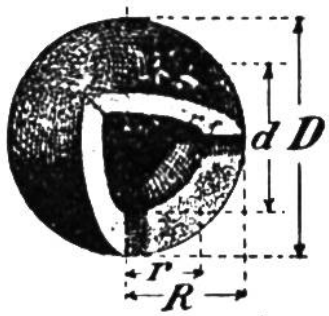
Inhalt $K = \frac{1}{3}\pi h.(R^2+Rr+r^2)$

Mantel $M = \pi s.(R+r)$.

Oberfläche $O = \pi.[R^2+r^2+(R+r)s]$.

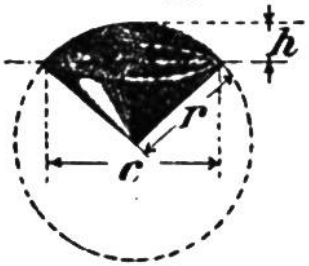
Kugel:

Radius = r, Durchmesser = d,
Oberfläche $O = 4r^2\pi = 12{,}566\,r^2$, oder $d^2\pi$.
Inhalt $K = \frac{4}{3}r^3\pi = 4{,}189\,r^3$, $K = \frac{O \cdot r}{3}$,
» $K = \frac{d^3\pi}{6} = 0{,}5236 \cdot d^3$;
Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$; $r = \sqrt[3]{\frac{3K}{4\pi}}$



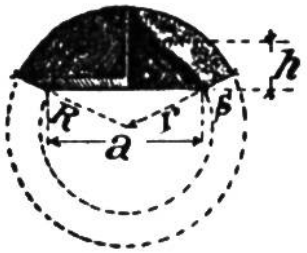
Hohlkugel:

Aeusserer Radius = R, innerer = r,
Aeusserer Durchmesser = D, innerer = d,
Inhalt $K = \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3) = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3)$



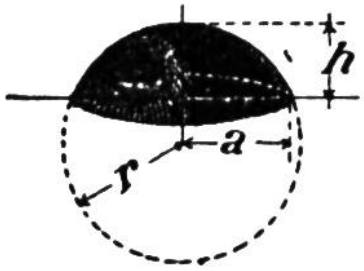
Kugelsektor:

Radius der Kugel = r
Begrenzende Kalotte, Höhe = h, Durchm. = c,
Oberfläche $O = \frac{\pi r}{2}(4h + c)$
Inhalt $K = \frac{2}{3}r^2\pi \cdot h = 2{,}0944\,r^2 h$.



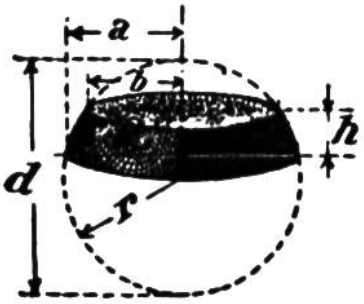
Hohlkugelsektor:

Aeusserer Radius = R innerer = r
Wanddicke = $R - r = s$, $r = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$
Inhalt $K = 2{,}094\frac{h}{r}(R^3 - r^3)$.



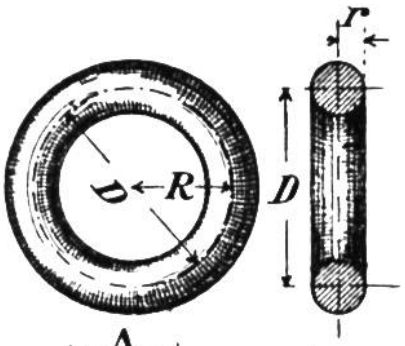
Kugelsegment (Kugelkalotte):

Radius der Kugel = r,
Radius der Grundfläche = a,
Höhe der Kalotte = h,
Oberfläche = $O = 2\pi rh = \pi(a^2 + h^2)$
Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$ oder
$= \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$



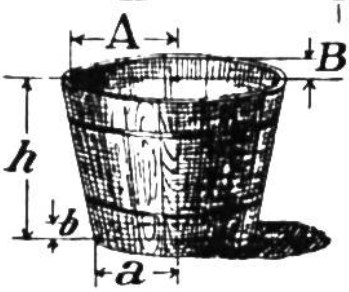
Kugelzone:

Höhe der Zone = h, Radius der Kugel = r
Radius der Endflächen = a und b,
Mantel $M = 2r\pi h$, Oberfläche $O = M + a^2\pi + b^2\pi$;
Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$.



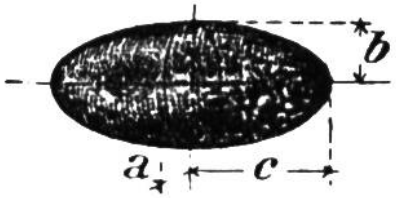
Cylindrischer Ring:

Radius des kreisformigen Querschnittes = r,
Durchmesser des Ringes = D, Radius = R,
Inhalt $K = 2\pi^2 Rr^2 = 2,467\, Dd^2$.
Oberfläche $O = 4\pi^2 Rr = 9,87\, Dd$.



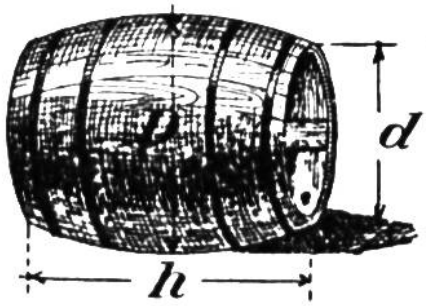
Kübel:

Die unter sich paralleten Endflächen sind Ellipsen mit den Halbachsen A, B und a, b,
Höhe zwischen den Endflächen = h.
Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi h[2(AB+ab)+Ab+aB]$.



Ellipsoid:

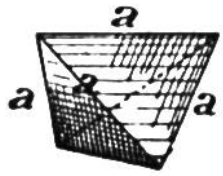
Bezeichnung der 3 Halbachsen = a, b, c,
Inhalt $K = \frac{4}{3}\pi . a . b . c = 4,189\, abc$.



Fass:

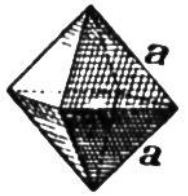
Spunddurchmesser = D, Bodendurchmesser = d,
Höhe (resp. Länge = h,
Inhalt $K = \frac{1}{12}\pi h.(2D^2+d^2)$,
$K = \frac{1}{15}\pi h.(2D^2+Dd+\frac{3}{4}d^2)$,

Reguläre Polyeder:



Tetraeder: (4 gleichseitige Dreiecksflächen)

Länge der Kante = a, Oberfl. $O = a^2\sqrt{3} = 1,732\, a^2$
Inhalt $K = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2} = 0,11785\, a^3$.

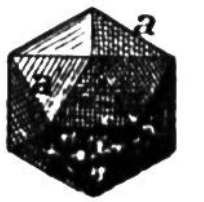


Oktaeder: (8 gleichseitige Dreiecksflächen)

Kante = a, Oberfl. $O = 2a^2\sqrt{3} = 3,46410168^2$
Inhalt $K = \frac{a^3}{3}\sqrt{2} = 0,4714045\, a^3$

Dodekaeder: (12 regelmässige Fünfecke)

Kante = a, $O = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} = 20,645729\, a^2$
Inhalt $K = \frac{a^3}{4}.(15+7\sqrt{5}) = 7,663119\, a^3$.



Ikosaeder: (20 gleichseitige Dreiecksflächen)

Kante = a, $O = 5a^2\sqrt{3} = 8,6602545\, a^2$.
Inhalt $K = \frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5}) = 2,181695\, a^3$.

E. Pichon