Geometrie

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Pestalozzi-Kalender**

Band (Jahr): **22 (1929)**

Heft [2]: **Schüler**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

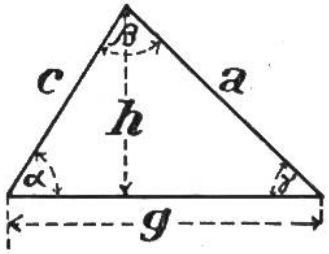
Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Tafel I

Geometrie

Formeln zur Inhaltsberechnung von Flächen u. Körpern

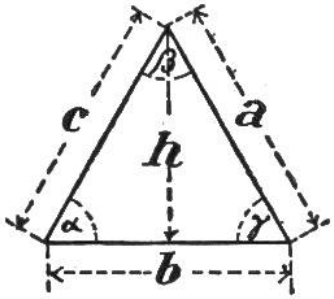


Dreieck:

Grundlinie $= g$, Höhe $= h$, Fläche $= F$,

$F = \frac{g \cdot h}{2}$; $g = \frac{2F}{h}$; $h = \frac{2F}{g}$;

$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma = 180° = 2$ rechte $\sphericalangle$



Gleichseitiges Dreieck:

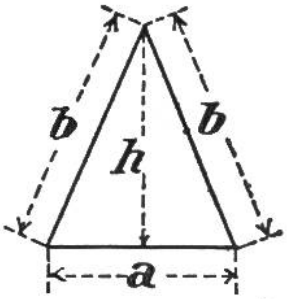
Seiten $= a = b = c$, $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma = 60°$;

$F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 0{,}433\,a^2$; $\sqrt{3} = 1{,}73205$.

genauer $0{,}4330125 \cdot a^2$

$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$;

$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = a \cdot 0{,}866025$.

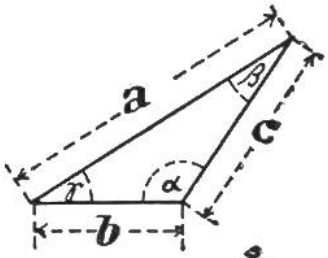


Gleichschenkliges Dreieck:

Grundlinie $= a$, gleiche Seiten $= b$

$F = \frac{a}{4}\sqrt{(2b+a)\cdot(2b-a)} = \frac{a}{2}\sqrt{\left(b+\frac{a}{2}\right)\cdot\left(b-\frac{a}{2}\right)}$

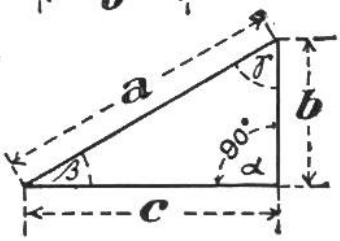
$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, $h = \sqrt{\left(b+\frac{a}{2}\right)\cdot\left(b-\frac{a}{2}\right)}$;



Ungleichseitiges Dreieck:

Seiten a, b und c, $s = \frac{a+b+c}{2}$

$F = \sqrt{s(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$.

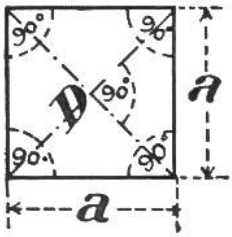


Rechtwinkliges Dreieck: $\sphericalangle \alpha = 90°$;

Hypotenuse $= a$, Katheten $= b, c$,

$F = \frac{b \cdot c}{2}$; $a^2 = b^2 + c^2$; $a = \sqrt{b^2 + c^2}$;

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

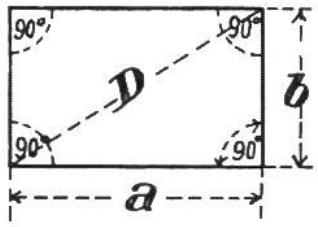


Quadrat: Seite $= a$, Diagonale $= D$,

$F = a \cdot a = a^2$, $a = \sqrt{F}$.

$D = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = a\ 1{,}4142$.

E. Pschon

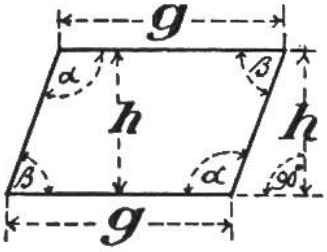


Rechteck:

Seiten a und b, Diagonale $= D$,

$F = a.b$; $a = \frac{F}{b}$; $b = \frac{F}{a}$;

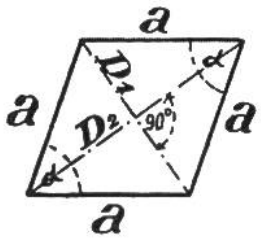
$D = \sqrt{a^2 + b^2}$;



Parallelogramm:

Grundlinie $= g$, Höhe rechtwinklig auf Grundlinie $= h$,

$F = g.h$; $g = \frac{F}{h}$; $h = \frac{F}{g}$.

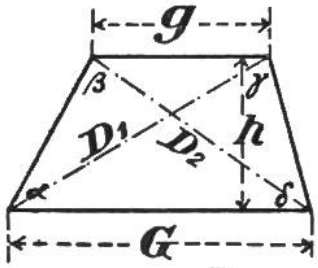


Rhombus:

Gleiche Seiten $= a$, Diagonalen D_1 u. D_2

$F = a^2 . \sin\alpha$; $F = \frac{D_1 . D_2}{2}$;

$D_1 = \frac{2F}{D_2}$; $D_2 = \frac{2F}{D_1}$.

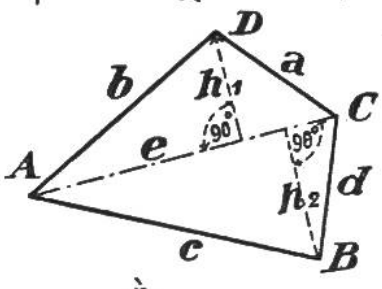


Trapez:

Parallelseiten $= G$ und g, Höhe $= h$,

Diagonalen $= D_1$ und D_2,

$F = \frac{G + g}{2} h$; $\measuredangle \alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R$;

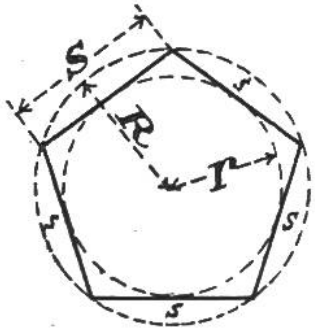


Trapezoid:

Diagonale AC, rechtwinklig darauf die Höhen h_1 und h_2

$F = \frac{AC}{2} . h_1 + h_2$; $= \frac{e}{2} . h_1 + h_2$.

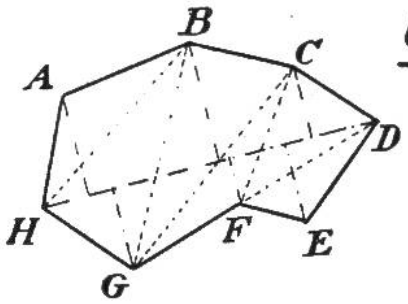
Reguläre Vielecke (Polygone):



Seite $= S$,
Radius des umschriebenen Kreises $= R$
Radius d. eingeschriebenen Kreises $= r$.

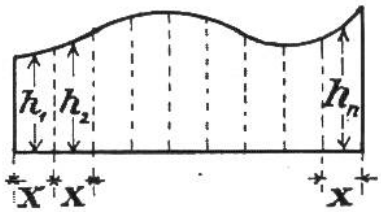
Polygon	R	r	S	F
Dreieck	0.577 S	0.289 S	1.732 R od. 3.463 r	0.433 S² od. 1.299 R²
Quadrat	0.707 S	0.500 S	1.414 R „ 2.000 r	1.000 S² „ 2.000 R²
Fünfeck	0.851 S	0.688 S	1.176 R „ 1.453 r	1.721 S² „ 2.378 R²
Sechseck	1.000 S	0.866 S	1.000 R „ 1.155 r	2.598 S² „ 2.598 R²
Siebeneck	1.152 S	1.038 S	0.868 R „ 0.963 r	3.634 S² „ 2.736 R²
Achteck	1.307 S	1.208 S	0.765 R „ 0.828 r	4.828 S² „ 2.828 R²
Neuneck	1.462 S	1.374 S	0.684 R „ 0.728 r	6.182 S² „ 2.892 R²
Zehneck	1.618 S	1.540 S	0.618 R „ 0.649 r	7.694 S² „ 2.939 R²
Elfeck	1.775 S	1.704 S	0.563 R „ 0.587 r	9.366 S² „ 2.973 R²
Zwölfeck	1.932 S	1.866 S	0.518 R „ 0.536 r	11.196 S² „ 3.000 R²

E. Pochon



Unregelmässige Vielecke od. Flächen:

Die Fläche kann berechnet werden durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittels Diagonalen u. Summierung der ermittelten Dreiecksflächen, oder auch durch Einteilung in Trapeze u. Dreiecke vermittels einer passend gewählten Abszisse und rechtwinklig auf diese errichteten Koordinaten der Eckpunkte, Summierung des ermittelten Jnhalts dieser Trapeze u. Dreiecke.

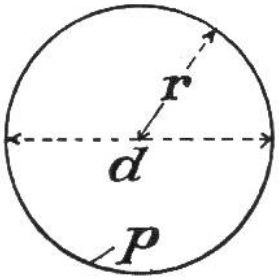


Durch Zerlegung in parallele Streifen von gleicher Breite x und mittl. Höhen $h_1 h_2 \ldots h_n$.

$$F = x.(h_1 + h_2 \ldots + h_n).$$

Kreis:

Durchmesser = d, Radius = r, Umfang = p, Inhalt = F.



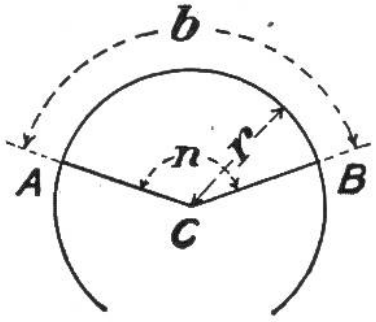
$$p = 2r\pi = d\pi = d.3{,}14159,$$

$$F = r^2\pi = \frac{d^2\pi}{4} = 0{,}785.d^2.$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 0{,}564.\sqrt{F}.$$

$$d = 2.\sqrt{\frac{F}{\pi}} = 1{,}128\sqrt{F}.$$

Kreissektor: (ABCA)



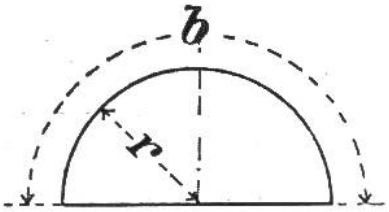
Radius = r, Bogen = b Zentriwinkel = n

$$F = \frac{r^2\pi.n}{360} = \frac{b.r}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{F.360}{\pi.n}} = \frac{b}{\pi}.\frac{180}{n};$$

$$n = \frac{360.F}{r^2\pi} = \frac{b}{r.\pi}.180;$$

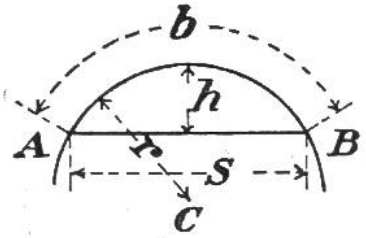
$$b = 2r\pi.\frac{n}{360} = r\pi.\frac{n}{180};$$



Halbkreis: Bogen = $b = \pi r$; Fläche = $F = \frac{\pi r^2}{2}$.

Viertelkreis: „ = $\frac{b}{2} = \frac{\pi r}{2}$; $F = \frac{\pi r^2}{4}$;

Kreisabschnitt:



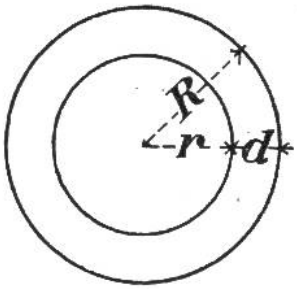
Sehne = s, Höhe = h, $F = \frac{2}{3}s.h$.

genau $F = \frac{r^2\pi.n}{360} - \frac{1}{2}s\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2} = \frac{br - s(r-h)}{2}$.

$s = 2\sqrt{h(2r-h)}$; $r = \frac{s^2}{8h} + \frac{h}{2}$.

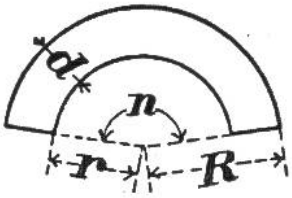
E. Pochon.

Kreisring:

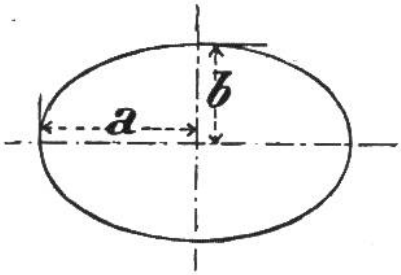


Aeusserer Radius $= R$,
Innerer Radius $= r$,
$F = R^2\pi - r^2\pi = \pi(R+r).(R-r)$.
wenn d = radiale Breite des Kreisrings
so ist $F = \pi.(2r+d).d$;

Kreisringstück (Konzentrisch)

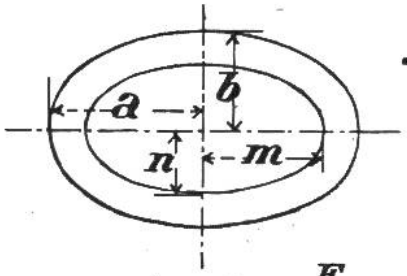


Aeusserer Radius $= R$,
Innerer Radius $= r$,
Zentriwinkel $= n$, radiale Breite $= d$,
$F = (R^2\pi - r^2\pi)\frac{n}{360} = (R^2 - r^2).\frac{\pi n}{360}$;
$= (R+r)d\frac{\pi n}{360} = (R+r)d.n.0.0087$;



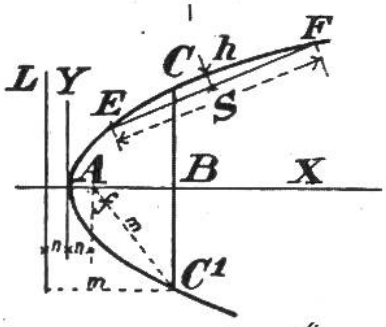
Ellipse:

Halbe grosse Achse $= a$,
Halbe kleine Achse $= b$,
Fläche $F = a.b.\pi$;



Elliptischer Ring:

Halbe Achsen der äussern Ellipse $= a, b$,
Halbe Achsen der innern Ellipse $= m, n$,
Fläche: $F = \pi.(ab - mn)$.

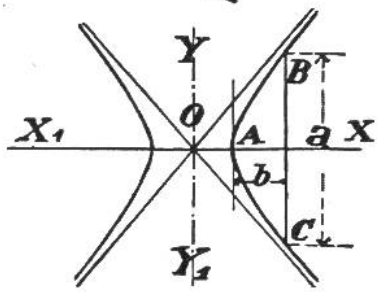


Parabelsegment ECFE:

$F = \frac{2}{3} s.h$, $s = \overline{EF}$;

Parabelfläche CAC^1C:

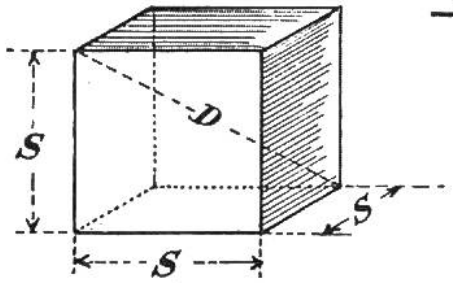
$F = \frac{2}{3}\ \overline{CC^1}.\overline{AB}$;



Hyperbelsegment ABCA:

Sehne $= a$; Höhe $= b$,
F (annähernd) $= \frac{3}{5} a.b$;

E. Pochon.



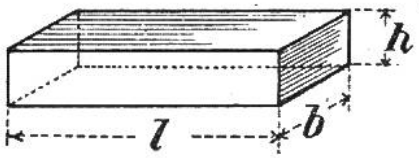
Würfel:

Seite = S, Inhalt = K; Oberfläche = O

$K = S^3$; $O = 6S^2$;

$S = \sqrt[3]{K}$

Diagonale $= D = \sqrt{3S^2} = S\sqrt{3} = S \cdot 1{,}732050$.

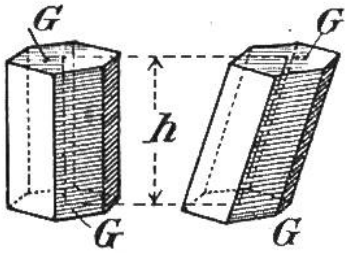


Parallelepipedon:

Länge = l, Breite = b; Höhe = h;

Inhalt = $K = l.b.h$.

Oberfläche $= O = 2.(l.b + l.h + b.h)$

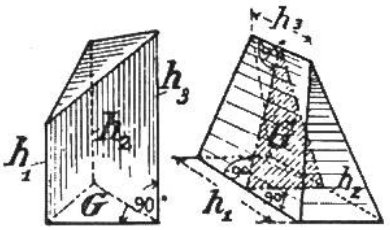


Prisma:

Grundfläche = G; Höhe = h;

Inhalt = $K = G.h$.

Oberfläche O = Umfang der Grundfläche $U \times h + 2G$.



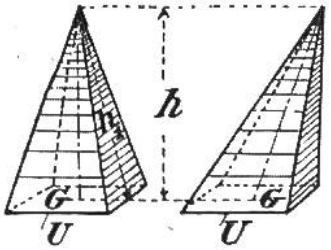
Schiefabgeschnittenes Prisma:

Flächeninhalt des senkrechten Querschnittes = G,

Länge der Kanten = $h_1 h_2 h_3 \ldots\ldots h_n$,

Inhalt $K = G.\frac{h_1 + h_2 + h_3 + \ldots\ldots h_n}{n}$.

Bei mehr als 3 Kanten ist das Prisma regelmässig oder hat dasselbe wenigstens Axensymetrie.



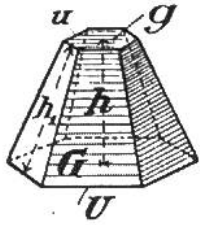
Pyramide:

Grundfläche = G, Höhe = h,

$K = \frac{G.h}{3}$; $h = \frac{3K}{G}$; $G = \frac{3K}{h}$;

Mantel M = Umfang der Grundfläche $U \times \frac{h_1}{2}$;

Oberfläche $O = M + G$.

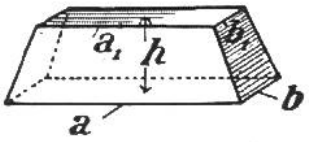


Abgestumpfte Pyramide:

Parallele Endflächen = G, g, ihr Abstand = h,

ihre Umfänge U, u, Mantel $M = \frac{U+u}{2}.h_1$,

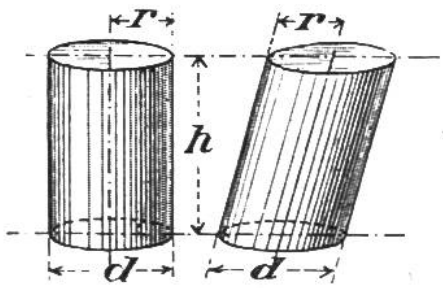
$K = \frac{h}{3}(G + g + \sqrt{Gg})$; $O = M + G + g$.



Obelisk, Wall, (regelmässig aufgeschütteter Haufen)

$K = \frac{1}{6}h\left[(2a + a_1)b + (2a_1 + a)b_1\right]$.

E. Pochon



Cylinder (Walze)

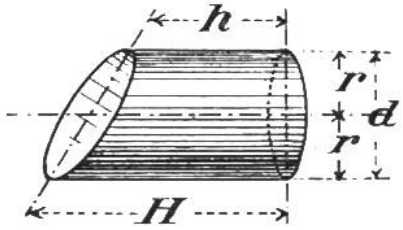
Radius = r, Durchmesser = d, Höhe = h

Inhalt $K = r^2\pi . h$ oder $\frac{d^2}{4}\pi . h$

$r = \sqrt{\frac{K}{\pi h}}$; $h = \frac{K}{r^2\pi}$.

Mantel = $2r\pi . h$ oder $d\pi h$.

Oberfläche = $2r\pi.(r+h)$ oder $d\pi.(\frac{d}{2}+h)$

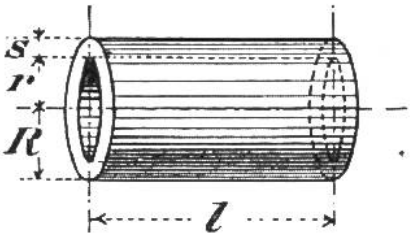


Schiefabgeschnittener Cylinder:

Grösste Höhe = H, kleinste Höhe = h,

Inhalt $K = r^2\pi . \frac{H+h}{2}$ oder $\frac{d^2}{4}\pi . \frac{H+h}{2}$

Mantel = $r\pi(H+h)$



Hohlcylinder (Rohr):

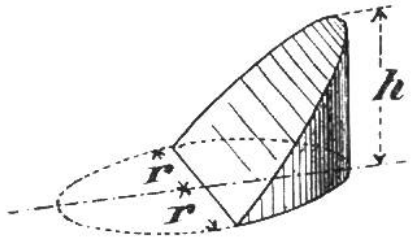
Innerer Radius = r,

Aeusserer Radius = R, Länge = l,

Wandstärke = $s = R - r$,

Inhalt $K = \pi . l . (R^2 - r^2)$, oder

$K = \pi . l . s\,(2R - s)$ oder $\pi . l . s\,(2r + s)$.

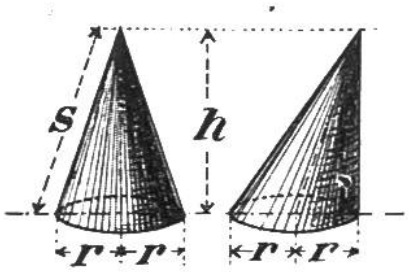


Cylinderhuf:

Radius der Grundfläche = r,

Höhe des Hufes = h, Mantel = $2rh$.

Inhalt: $K = \frac{2}{3} r^2 h$.



Kegel:

Radius der Grundfläche = r.

Höhe = h, Seite = $s = \sqrt{r^2 + h^2}$,

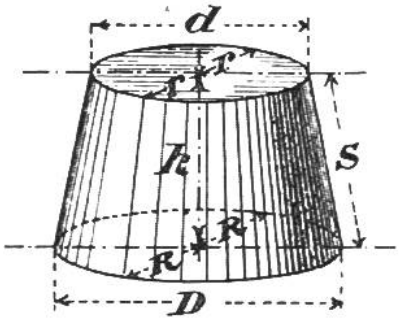
Mantel $M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ oder $\pi . r . s$,

Oberfläche = $\pi . r^2 + r\pi . s$ oder $r\pi(r+s)$

oder = $\pi r . (r + \sqrt{r^2 + h^2})$.

Inhalt $K = \frac{1}{3} r^2 \pi . h$;

$r = \sqrt{\frac{3K}{\pi . h}}$; $h = \frac{3K}{r^2\pi}$.



Abgestumpfter Kegel:

Radien der parallelen Endflächen = R und r,

Durchmesser = D und d, Höhe = h, Seite = s,

Inhalt $K = \frac{1}{3}\pi h . (R^2 + Rr + r^2)$

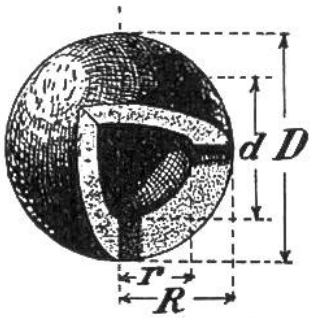
Mantel $M = \pi s . (R + r)$.

Oberfläche $O = \pi . [R^2 + r^2 + (R+r) s]$.

E. Pochon

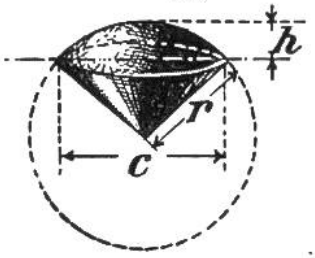
Kugel:

Radius $= r$, Durchmesser $= d$,
Oberfläche $O = 4r^2\pi = 12{,}566\,r^2$, oder $d^2\pi$.
Inhalt $K = \frac{4}{3}r^3\pi = 4{,}189\,r^3$, $K = \frac{O.r}{3}$,
» $K = \frac{d^3\pi}{6} = 0{,}5236.d^3$;
Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$; $r = \sqrt[3]{\frac{3K}{4\pi}}$.



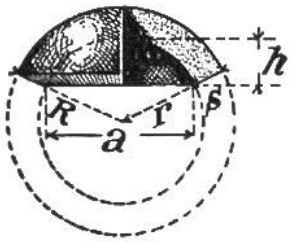
Hohlkugel:

Aeusserer Radius $= R$, innerer $= r$,
Aeusserer Durchmesser $= D$, innerer $= d$,
Inhalt $K = \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3) = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3)$.



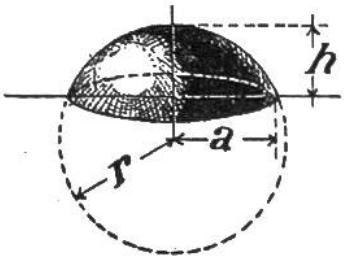
Kugelsektor:

Radius der Kugel $= r$
Begrenzende Kalotte, Höhe $= h$, Durchm. $= c$,
Oberfläche $O = \frac{\pi r}{2}(4h + c)$
Inhalt $K = \frac{2}{3}r^2\pi.h = 2{,}0944\,r^2.h$.



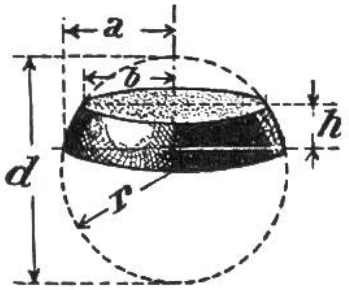
Hohlkugelsektor:

Aeusserer Radius $= R$ innerer $= r$
Wanddicke $= R - r = s$, $r = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$
Inhalt $K = 2{,}094\frac{h}{r}(R^3 - r^3)$.



Kugelsegment (Kugelkalotte):

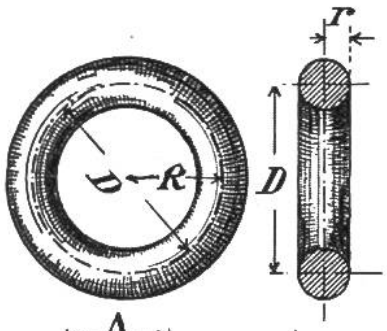
Radius der Kugel $= r$,
Radius der Grundfläche $= a$,
Höhe der Kalotte $= h$,
Oberfläche $= O = 2\pi.rh = \pi.(a^2 + h^2)$
Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi.h(3a^2 + h^2)$ oder
$= \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.



Kugelzone:

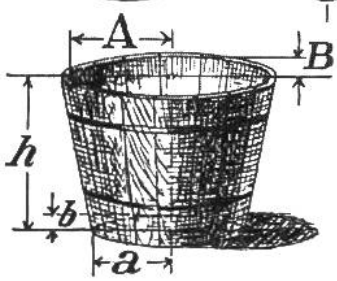
Höhe der Zone $= h$, Radius der Kugel $= r$
Radius der Endflächen $= a$ und b,
Mantel $M = 2r\pi h$, Oberfläche $O = M + a^2\pi + b^2\pi$;
Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$.

E. Fochon



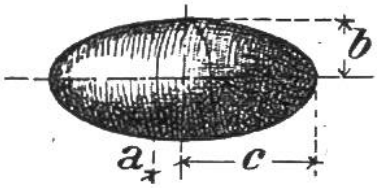
Cylindrischer Ring:

Radius des kreisförmigen Querschnittes = r,
Durchmesser des Ringes = D, Radius = R,
Inhalt $K = 2\pi^2 R r^2 = 2{,}467\, D d^2$.
Oberfläche $O = 4\pi^2 R r = 9{,}87\, D d$.



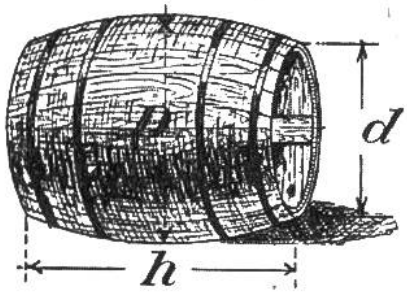
Kübel:

Die unter sich parallelen Endflächen sind Ellipsen mit den Halbachsen A, B und a, b, Höhe zwischen den Endflächen = h.
Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi h[2(AB + ab) + Ab + aB]$.



Ellipsoid:

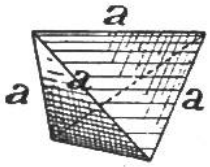
Bezeichnung der 3 Halbachsen = a, b, c,
Inhalt $K = \frac{4}{3}\pi . a . b . c = 4{,}189\, abc$.



Fass:

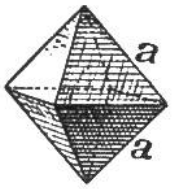
Spunddurchmesser = D, Bodendurchmesser = d,
Höhe (resp. Länge) = h,
Inhalt $K = \frac{1}{12}\pi h.(2D^2 + d^2)$,
$K = \frac{1}{15}\pi h.(2D^2 + Dd + \frac{3}{4}d^2)$,

Reguläre Polyeder:



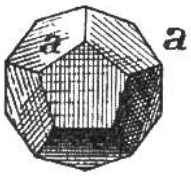
Tetraeder: (4 gleichseitige Dreiecksflächen)

Länge der Kante = a, Oberfl. $O = a^2\sqrt{3} = 1{,}732\, a^2$
Inhalt $K = \frac{1}{12} a^3\sqrt{2} = 0{,}11785\, a^3$.



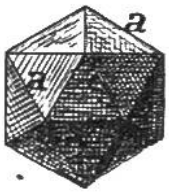
Oktaeder: (8 gleichseitige Dreiecksflächen)

Kante = a, Oberfl. $O = 2a^2\sqrt{3} = 3{,}4641016\, a^2$
Inhalt $K = \frac{a^3}{3}\sqrt{2} = 0{,}4714045\, a^3$.



Dodekaeder: (12 regelmässige Fünfecke)

Kante = a, $O = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 20{,}645779\, a^2$
Inhalt $K = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}) = 7{,}663119\, a^3$.



Ikosaeder: (20 gleichseitige Dreiecksflächen)

Kante = a, $O = 5a^2\sqrt{3} = 8{,}6602545\, a^2$.
Inhalt $K = \frac{5}{12} a^3(3 + \sqrt{5}) = 2{,}181695\, a^3$.

E. Pochon