Zeitschrift: Pestalozzi-Kalender
Herausgeber: Pro Juventute
Band: 27 (1934)
Heft: [2]: Schüler

Rubrik: Geometrie

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

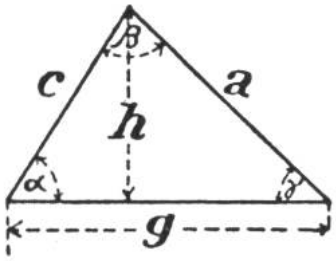
Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Tafel I

Geometrie

Formeln zur Inhaltsberechnung von Flächen u. Körpern

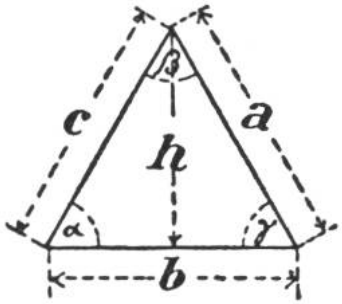


Dreieck:

Grundlinie $= g$, Höhe $= h$, Fläche $= F$,

$F = \frac{g \cdot h}{2}$; $g = \frac{2F}{h}$; $h = \frac{2F}{g}$;

$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma = 180° = 2$ rechte $\sphericalangle$



Gleichseitiges Dreieck:

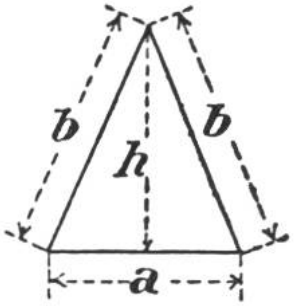
Seiten $= a = b = c$, $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma = 60°$;

$F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 0{,}433\,a^2$; $\sqrt{3} = 1{,}73205$.

genauer $0{,}4330125 \cdot a^2$

$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$;

$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = a \cdot 0{,}866025$.

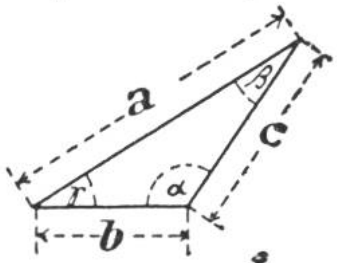


Gleichschenkliges Dreieck:

Grundlinie $= a$, gleiche Seiten $= b$

$F = \frac{a}{4}\sqrt{(2b+a)\cdot(2b-a)} = \frac{a}{2}\sqrt{\left(b+\frac{a}{2}\right)\cdot\left(b-\frac{a}{2}\right)}$

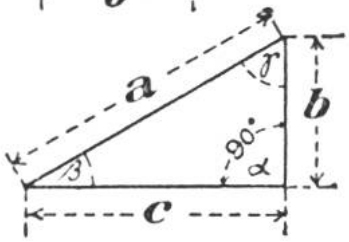
$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, $h = \sqrt{\left(b+\frac{a}{2}\right)\cdot\left(b-\frac{a}{2}\right)}$;



Ungleichseitiges Dreieck:

Seiten a, b und c, $s = \frac{a+b+c}{2}$

$F = \sqrt{s(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$.

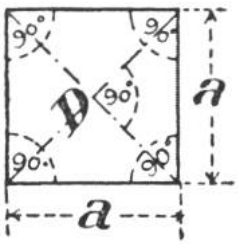


Rechtwinkliges Dreieck: $\sphericalangle a = 90°$;

Hypotenuse $= a$, Katheten $= b, c$,

$F = \frac{b \cdot c}{2}$; $a^2 = b^2 + c^2$; $a = \sqrt{b^2 + c^2}$,

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

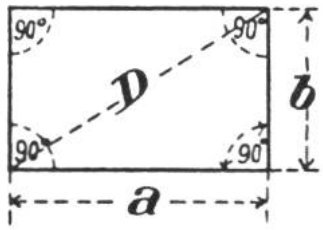


Quadrat: Seite $= a$, Diagonale $= D$,

$F = a \cdot a = a^2$, $a = \sqrt{F}$.

$D = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = a\ 1{,}4142$.

E. Pochon

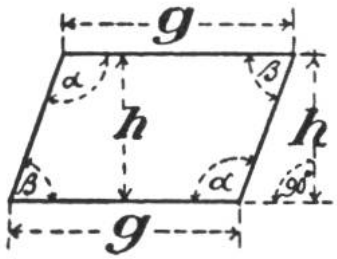


Rechteck:

Seiten a und b, Diagonale $= D$,

$F = a \cdot b$; $a = \frac{F}{b}$; $b = \frac{F}{a}$;

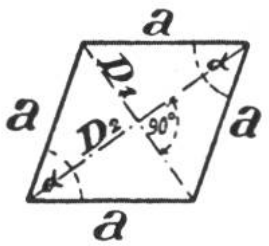
$D = \sqrt{a^2 + b^2}$;



Parallelogramm:

Grundlinie $= g$, Höhe rechtwinklig auf Grundlinie $= h$,

$F = g \cdot h$; $g = \frac{F}{h}$; $h = \frac{F}{g}$.

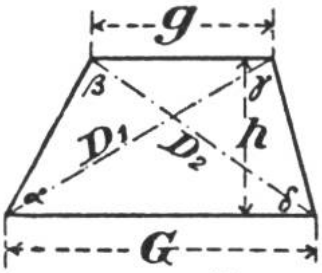


Rhombus:

Gleiche Seiten $= a$, Diagonalen D_1 u. D_2

$F = a^2 \cdot \sin\alpha$; $F = \frac{D_1 \cdot D_2}{2}$;

$D_1 = \frac{2F}{D_2}$; $D_2 = \frac{2F}{D_1}$.

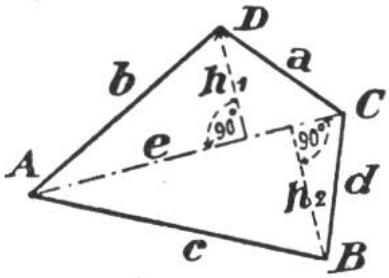


Trapez:

Parallelseiten $= G$ und g, Höhe $= h$,

Diagonalen $= D_1$ und D_2,

$F = \frac{G + g}{2} h$; $\sphericalangle \alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R$;

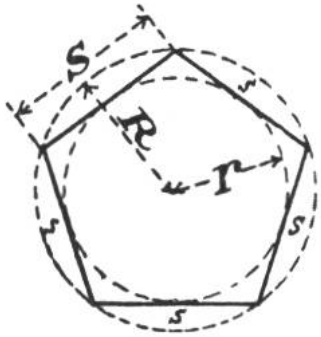


Trapezoid:

Diagonale AC, rechtwinklig darauf die Höhen h_1 und h_2

$F = \frac{AC}{2} \cdot h_1 + h_2$; $= \frac{e}{2} \cdot h_1 + h_2$.

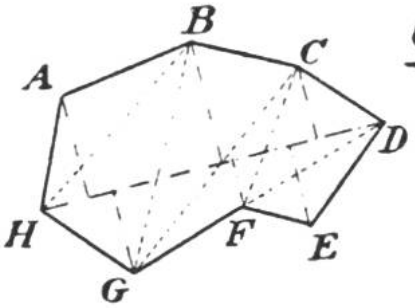
Reguläre Vielecke (Polygone):



Seite $= S$,
Radius des umschriebenen Kreises $= R$
Radius d. eingeschriebenen Kreises $= r$.

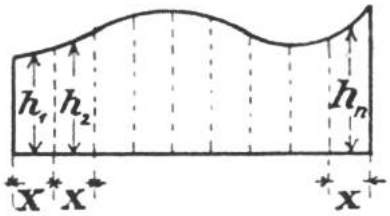
Polygon	R	r	S	F
Dreieck	0.577 S	0.289 S	1.732 R od. 3.463 r	0.433 S^2 od. 1.299 R^2
Quadrat	0.707 S	0.500 S	1.414 R „ 2.000 r	1.000 S^2 „ 2.000 R^2
Fünfeck	0.851 S	0.688 S	1.176 R „ 1.453 r	1.721 S^2 „ 2.378 R^2
Sechseck	1.000 S	0.866 S	1.000 R „ 1.155 r	2.598 S^2 „ 2.598 R^2
Siebeneck	1.152 S	1.038 S	0.868 R „ 0.963 r	3.634 S^2 „ 2.736 R^2
Achteck	1.307 S	1.208 S	0.765 R „ 0.828 r	4.828 S^2 „ 2.828 R^2
Neuneck	1.462 S	1.374 S	0.684 R „ 0.728 r	6.182 S^2 „ 2.892 R^2
Zehneck	1.618 S	1.540 S	0.618 R „ 0.649 r	7.694 S^2 „ 2.939 R^2
Elfeck	1.775 S	1.704 S	0.563 R „ 0.587 r	9.366 S^2 „ 2.973 R^2
Zwölfeck	1.932 S	1.866 S	0.518 R „ 0.536 r	11.196 S^2 „ 3.000 R^2

E. Pochon



Unregelmässige Vielecke od. Flächen:

Die Fläche kann berechnet werden durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittels Diagonalen u. Summierung der ermittelten Dreiecksflächen, oder auch durch Einteilung in Trapeze u. Dreiecke vermittels einer passend gewählten Abszisse und rechtwinklig auf diese errichteten Koordinaten der Eckpunkte, Summierung des ermittelten Jnhalts dieser Trapeze u. Dreiecke.

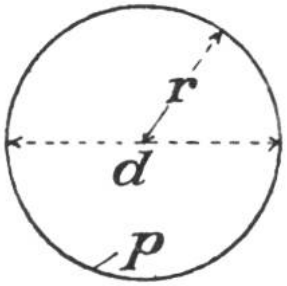


Durch Zerlegung in parallele Streifen von gleicher Breite x und mittl. Höhen $h_1 h_2 \ldots h_n$.

$$F = x.(h_1 + h_2 \ldots + h_n).$$

Kreis:

Durchmesser = d, Radius = r, Umfang = p, Inhalt = F.



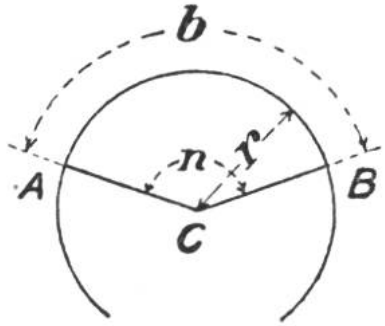
$$p = 2r\pi = d\pi = d.3{,}14159,$$

$$F = r^2\pi = \frac{d^2\pi}{4} = 0{,}785.d^2.$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 0{,}564.\sqrt{F}.$$

$$d = 2.\sqrt{\frac{F}{\pi}} = 1{,}128\sqrt{F}.$$

Kreissektor: (ABCA)



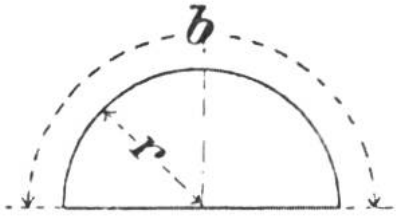
Radius = r, Bogen = b Zentriwinkel = n

$$F = \frac{r^2\pi.n}{360} = \frac{b.r}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{F.360}{\pi.n}} = \frac{b}{\pi}.\frac{180}{n};$$

$$n = \frac{360.F}{r^2\pi} = \frac{b}{r.\pi}.180;$$

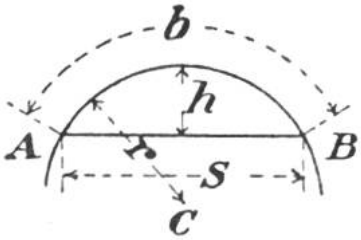
$$b = 2r\pi.\frac{n}{360} = r.\pi.\frac{n}{180};$$



Halbkreis: Bogen = $b = \pi r$; Fläche = $F = \frac{\pi r^2}{2}$.

Viertelkreis: " = $\frac{b}{2} = \frac{\pi r}{2}$; $F = \frac{\pi r^2}{4}$;

Kreisabschnitt:



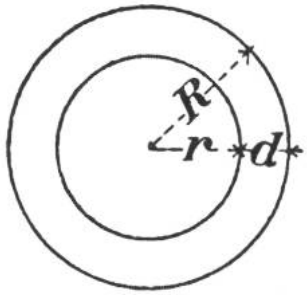
Sehne = s, Höhe = h, $F = \frac{2}{3}s.h$.

genau $F = \frac{r^2\pi.n}{360} - \frac{1}{2}s\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2} = \frac{br - s(r-h)}{2}$.

$s = 2\sqrt{h(2r-h)}$; $r = \frac{s^2}{8h} + \frac{h}{2}$.

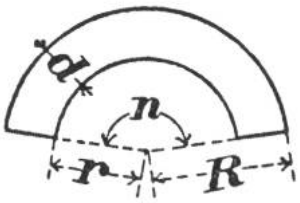
E. Pochon.

Kreisring:

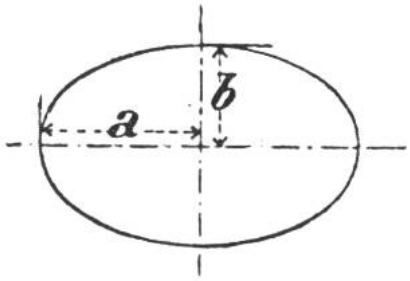


Aeusserer Radius $= R$,
Innerer Radius $= r$,
$F = R^2\pi - r^2\pi = \pi(R+r).(R-r)$.
wenn d = radiale Breite des Kreisrings
so ist $F = \pi.(2r+d).d$;

Kreisringstück (Konzentrisch)

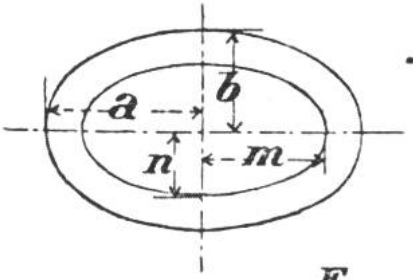


Aeusserer Radius $= R$,
Innerer Radius $= r$,
Zentriwinkel $= n$, radiale Breite $= d$,
$F = (R^2\pi - r^2\pi)\frac{n}{360} = (R^2 - r^2).\frac{\pi n}{360}$;
$= (R+r)d\frac{\pi.n}{360} = (R+r)d.n.0.0087$;



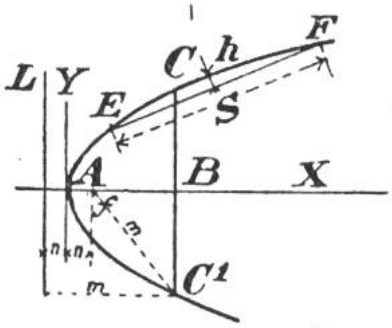
Ellipse:

Halbe grosse Achse $= a$,
Halbe kleine Achse $= b$,
Fläche $F = a.b.\pi$;



Elliptischer Ring:

Halbe Achsen der äussern Ellipse $= a, b$,
Halbe Achsen der innern Ellipse $= m, n$,
Fläche: $F = \pi.(ab - mn)$.

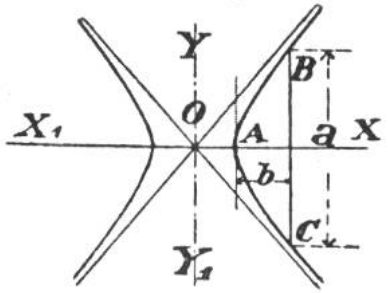


Parabelsegment ECFE:

$F = \frac{2}{3}s.h$; $s = \overline{EF}$;

Parabelfläche CAC¹C:

$F = \frac{2}{3}\overline{CC^1}.\overline{AB}$;

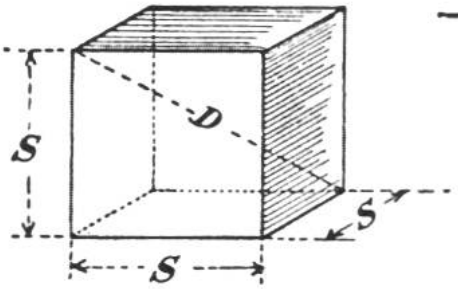


Hyperbelsegment ABCA:

Sehne $= a$; Höhe $= b$,
F (annähernd) $= \frac{3}{5}a.b$;

E. Pochon.

Würfel:



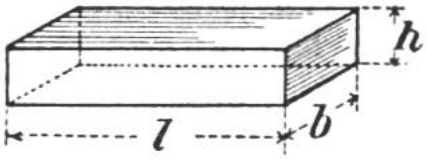
Seite = s, Inhalt = K; Oberfläche = O

$K = s^3$; $O = 6s^2$;

$s = \sqrt[3]{K}$

Diagonale $= D = \sqrt{3s^2} = s\sqrt{3} = s \cdot 1{,}732050$.

Parallelepipedon:

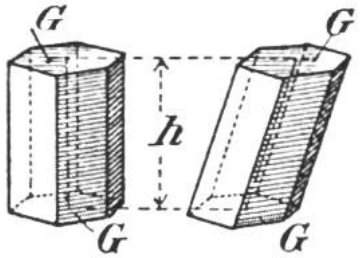


Länge = l, Breite = b, Höhe = h,

Inhalt = $K = l.b.h$.

Oberfläche $= O = 2.(l.b + l.h + b.h)$

Prisma:

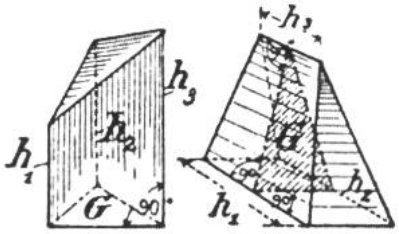


Grundfläche = G, Höhe = h,

Inhalt = $K = G.h$.

Oberfläche O = Umfang der Grundfläche $U \times h + 2G$.

Schiefabgeschnittenes Prisma:



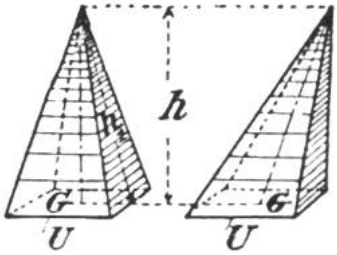
Flächeninhalt des senkrechten Querschnittes = G.

Länge der Kanten = $h_1 h_2 h_3 \ldots\ldots h_n$,

Inhalt $K = G.\dfrac{h_1 + h_2 + h_3 + \ldots\ldots h_n}{n}$.

Bei mehr als 3 Kanten ist das Prisma regelmässig oder hat dasselbe wenigstens Axensymetrie.

Pyramide:



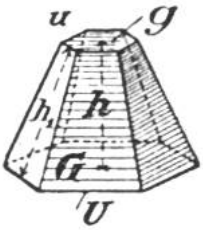
Grundfläche = G, Höhe = h,

$K = \dfrac{G.h}{3}$; $h = \dfrac{3K}{G}$; $G = \dfrac{3K}{h}$;

Mantel M = Umfang der Grundfläche $U \times \dfrac{h_1}{2}$;

Oberfläche $O = M + G$.

Abgestumpfte Pyramide:

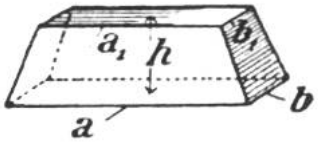


Parallele Endflächen = G, g, ihr Abstand = h,

ihre Umfänge U, u. Mantel $M = \dfrac{U+u}{2}.h_1$,

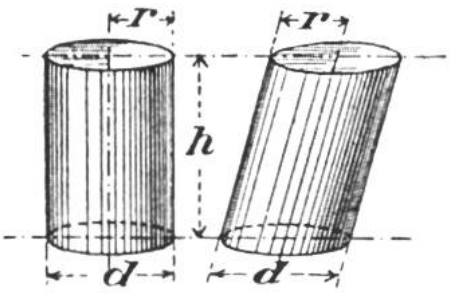
$K = \dfrac{h}{3}(G + g + \sqrt{Gg})$; $O = M + G + g$.

Obelisk, Wall, (regelmässig aufgeschütteter Haufen)



$$K = \frac{1}{6}h\left[(2a + a_1)b + (2a_1 + a)b_1\right].$$

E. Pocher



Cylinder (Walze)

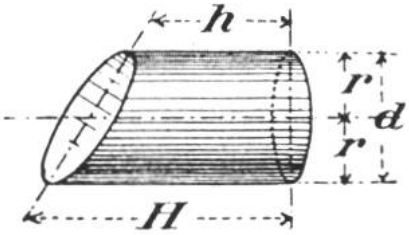
Radius = r, Durchmesser = d, Höhe = h

Inhalt $K = r^2 \pi . h$ oder $\frac{d^2}{4} \pi . h$

$r = \sqrt{\frac{K}{\pi h}}$; $h = \frac{K}{r^2 \pi}$.

Mantel = $2 r \pi . h$ oder $d . \pi h$.

Oberfläche = $2 r \pi . (r + h)$ oder $d \pi . (\frac{d}{2} + h)$

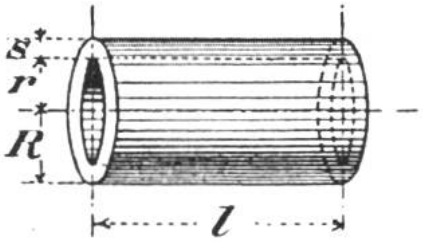


Schiefabgeschnittener Cylinder:

Grösste Höhe = H, kleinste Höhe = h,

Inhalt $K = r^2 \pi . \frac{H + h}{2}$ oder $\frac{d^2}{4} \pi . \frac{H + h}{2}$

Mantel = $r \pi (H + h)$



Hohlcylinder (Rohr):

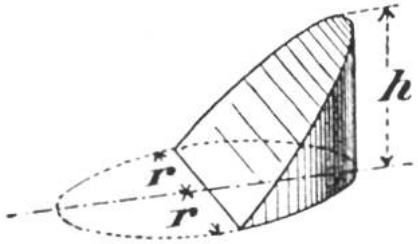
Innerer Radius = r,

Aeusserer Radius = R, Länge = l,

Wandstärke = $s = R - r$,

Inhalt $K = \pi . l . (R^2 - r^2)$, oder

$K = \pi . l . s \, (2R - s)$ oder $\pi . l . s \, (2r + s)$.

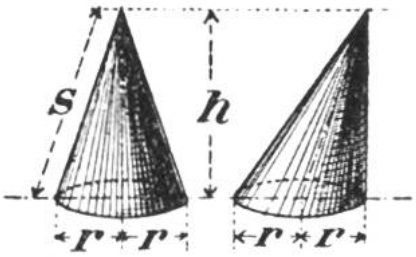


Cylinderhuf:

Radius der Grundfläche = r,

Höhe des Hufes = h, Mantel = $2 r h$.

Inhalt: $K = \frac{2}{3} r^2 h$.



Kegel:

Radius der Grundfläche = r,

Höhe = h, Seite = $s = \sqrt{r^2 + h^2}$,

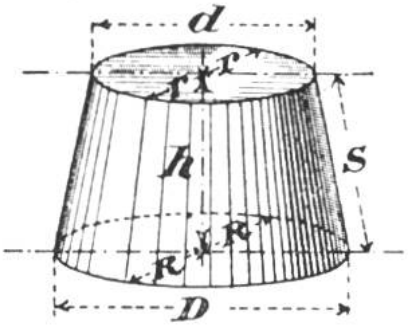
Mantel $M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ oder $\pi . r . s$,

Oberfläche = $\pi . r^2 + r \pi . s$ oder $r \pi (r + s)$

oder = $\pi r . (r + \sqrt{r^2 + h^2})$.

Inhalt $K = \frac{1}{3} r^2 \pi . h$;

$r = \sqrt{\frac{3K}{\pi . h}}$; $h = \frac{3K}{r^2 \pi}$.



Abgestumpfter Kegel:

Radien der parallelen Endflächen = R und r,

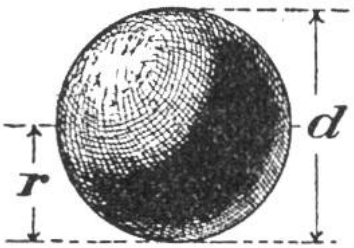
Durchmesser = D und d, Höhe = h, Seite = s,

Inhalt $K = \frac{1}{3} \pi h . (R^2 + Rr + r^2)$

Mantel $M = \pi s . (R + r)$.

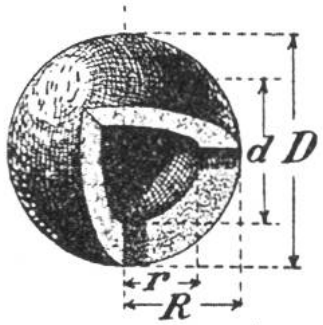
Oberfläche $O = \pi . [R^2 + r^2 + (R + r) s]$.

E. Pochon



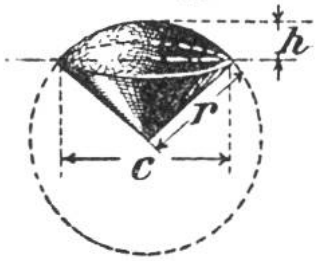
Kugel:

Radius $= r$, Durchmesser $= d$,
Oberfläche $O = 4r^2\pi = 12{,}566\,r^2$, oder $d^2\pi$.
Inhalt $K = \frac{4}{3}r^3\pi = 4{,}189\,r^3$, $K = \frac{O.r}{3}$,
" $K = \frac{d^3\pi}{6} = 0{,}5236.d^3$;
Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$; $r = \sqrt[3]{\frac{3K}{4\pi}}$.



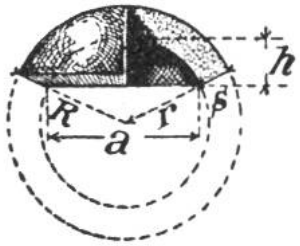
Hohlkugel:

Aeusserer Radius $= R$, innerer $= r$,
Aeusserer Durchmesser $= D$, innerer $= d$,
Inhalt $K = \frac{4\pi}{3}.(R^3 - r^3) = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3)$.



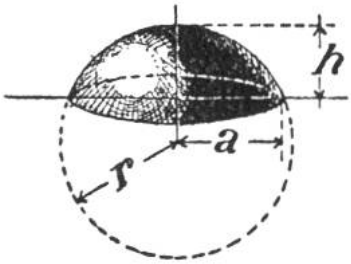
Kugelsektor:

Radius der Kugel $= r$
Begrenzende Kalotte, Höhe $= h$, Durchm. $= c$,
Oberfläche $O = \frac{\pi r}{2}(4h + c)$
Inhalt $K = \frac{2}{3}r^2\pi.h = 2{,}0944\,r^2.h$.



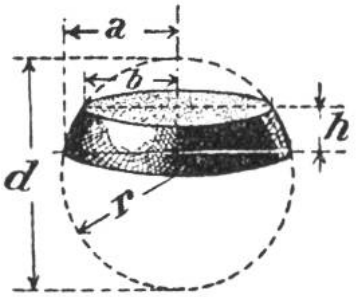
Hohlkugelsektor:

Aeusserer Radius $= R$ innerer $= r$
Wanddicke $= R - r = s$, $r = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$
Inhalt $K = 2{,}094\frac{h}{r}(R^3 - r^3)$.



Kugelsegment (Kugelkalotte):

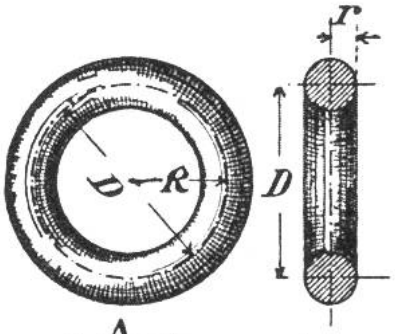
Radius der Kugel $= r$,
Radius der Grundfläche $= a$,
Höhe der Kalotte $= h$,
Oberfläche $= O = 2\pi rh = \pi.(a^2 + h^2)$
Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi.h(3a^2 + h^2)$ oder
$= \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.



Kugelzone:

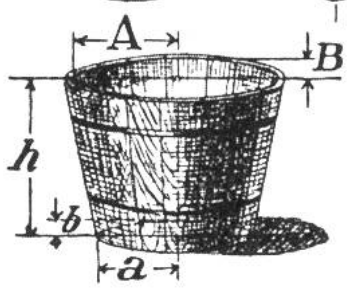
Höhe der Zone $= h$, Radius der Kugel $= r$
Radius der Endflächen $= a$ und b,
Mantel $M = 2r\pi h$, Oberfläche $O = M + a^2\pi + b^2\pi$;
Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$.

E. Pochon



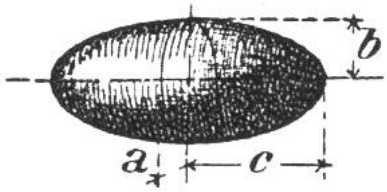
Cylindrischer Ring:

Radius des kreisförmigen Querschnittes = r,
Durchmesser des Ringes = D, Radius = R,
Inhalt $K = 2\pi^2 R r^2 = 2{,}467\, D d^2$.
Oberfläche $O = 4\pi^2 R r = 9{,}87\, D d$.



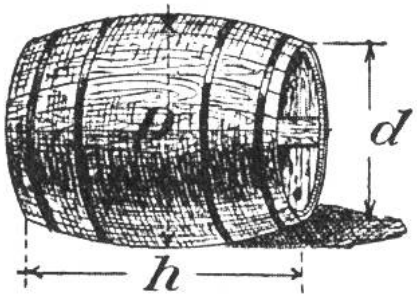
Kübel:

Die unter sich parallelen Endflächen sind Ellipsen mit den Halbachsen A, B und a, b, Höhe zwischen den Endflächen = h.
Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi h\left[2(AB + ab) + Ab + aB\right]$.



Ellipsoid:

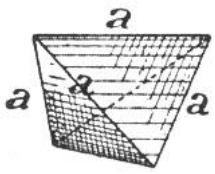
Bezeichnung der 3 Halbachsen = a, b, c,
Inhalt $K = \frac{4}{3}\pi\, a\, b\, c = 4{,}189\, a b c$.



Fass:

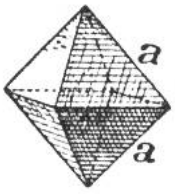
Spunddurchmesser = D, Bodendurchmesser = d,
Höhe (resp. Länge) = h,
Inhalt $K = \frac{1}{12}\pi h.(2D^2 + d^2)$,
$K = \frac{1}{15}\pi h.(2D^2 + Dd + \frac{3}{4}d^2)$,

Reguläre Polyeder:



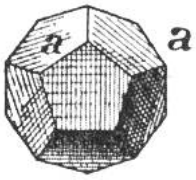
Tetraeder: (4 gleichseitige Dreiecksflächen)

Länge der Kante = a, Oberfl. $O = a^2\sqrt{3} = 1{,}732\, a^2$
Inhalt $K = \frac{1}{12} a^3\sqrt{2} = 0{,}11785\, a^3$.



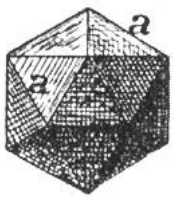
Oktaeder: (8 gleichseitige Dreiecksflächen)

Kante = a, Oberfl. $O = 2a^2\sqrt{3} = 3{,}4641016\, a^2$
Inhalt $K = \frac{a^3}{3}\sqrt{2} = 0{,}4714045\, a^3$.



Dodekaeder: (12 regelmässige Fünfecke)

Kante = a, $O = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 20{,}645779\, a^2$
Inhalt $K = \frac{a^3}{4}.(15 + 7\sqrt{5}) = 7{,}663119\, a^3$.



Ikosaeder: (20 gleichseitige Dreiecksflächen)

Kante = a, $O = 5a^2\sqrt{3} = 8{,}6602545\, a^2$.
Inhalt $K = \frac{5}{12} a^3 (3 + \sqrt{5}) = 2{,}181695\, a^3$.

E. Pochon