Zeitschrift: Die Eisenbahn = Le chemin de fer
Herausgeber: A. Waldner
Band: 12/13 (1880)
Heft: 12

Artikel: Beitrag zu Bogentheorie
Autor: Göbel, J.B.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8610

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Beitrag zur Bogentheorie. Von Dr. J. B. Gœbel, Ingenieur der hessischen Ludwigs-Eisenbahn in Mainz. — Statistik des Betriebsmaterials der schweizerischen Eisenbahnen am 1. Januar 1880. Von Controlingenieur R. Abt in Bern. — Bericht über die Arbeiten an der Gotthardbahn im Juli 1880. — Revue: Nouveau mode de construction des chaudières; Festigkeit des Eisens. — Miscellanea: Arlbergbahn; Waggons mit Reservoirs; künstlicher Marmor; Eisenbahn-Unfall auf der Midland-Eisenbahn in England; Luftheizung für Eisenbahnfahrzeuge; Werdenberger Binnengewässercorrection; Englische Haartreibriemen. (Correspondenz.) — Necrologie. — Vereinsnachrichten: Stellenvermittelung.

Beitrag zur Bogentheorie.

Von Dr. *J. B. Gœbel*, Ingenieur der hessischen Ludwigs-Eisenbahn in Mainz.

In der Theorie des elastischen Bogens ist die Zusammensetzung der unendlich kleinen Drehungen, welche die einzelnen Bogenquerschnitte bei eintretender Biegung erleiden, von besonderer Wichtigkeit.

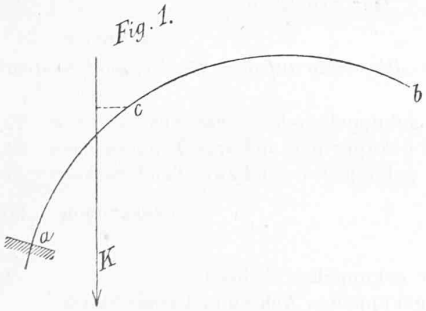
Wirkt in der „Bogenebene" nur ein Kräftepaar auf den betrachteten Querschnitt, so dreht sich derselbe um seine (horizontale) Schwerpunktaxe; wirkt eine Kraft senkrecht zum Querschnitt, so dreht sich derselbe — nach Culmann's Bezeichnungsweise — um die Antipolare des Angriffspunktes der betreffenden Kraft in Bezug auf die Trägheitsellipse des Querschnittes u. s. w. Es sehen nun aber die meisten Schriftsteller von der wirklichen Zusammensetzung dieser unendlich kleinen Rotationen gänzlich ab, und ermitteln die am Bogen vorkommenden Widerlagerreactionen mit Hülfe analytischer Beziehungen.

Im Folgenden soll ein Beispiel der Anwendung der Lehre vom Gleichgewicht der unendlich kleinen Rotationen auf die Statik des elastischen Bogens gegeben werden.

Wir stellen uns zur Aufgabe, für einen symmetrischen Bogen, ohne Gelenk, von sonst beliebiger Form und von „constantem $J \cos \varphi$" ($J =$ Trägheitsmoment, $\varphi =$ Neigungswinkel irgend eines Bogenquerschnittes gegen die Verticale) die Widerlagerreactionen zu bestimmen.

Von den am Bogen vorkommenden Formänderungen sollen hier nur diejenigen berücksichtigt werden, welche von den *Momenten* der äusseren Kräfte herrühren.

1. Es sei (Fig. 1) durch das Curvenstück $a\,c\,b$ die Schwerpunktsaxe irgend eines Bogens gegeben. Wir denken uns, wie bei Ableitung der Gleichungen der Formänderungen gebräuchlich, etwa das linke Bogenende „fest aufsitzend", das andere frei beweglich. Wird nun durch eine beliebige Kraft K, die man sich etwa durch eine starre Linie — mit einem gewissen Punkt c der Bogenaxe fest verbunden denken mag, die Elasticität des Bogenstücks $a\,c$ in Anspruch genommen, so dreht sich, wie erwähnt, jeder Querschnitt — in Folge des ihn betreffenden Momenteneinflusses — um seine horizontale Schwerpunktsaxe. Es handelt sich also um die Zusammensetzung unendlich kleiner Rotationen von parallelen Axen, die in ihrer Aufeinanderfolge einen (zur Bogenebene senkrechten) cylindrischen Flächenstreifen von der Leitlinie $a\,c$ bilden. Die einzelnen Punkte des Bogenstückes $a\,c$ sind demnach als „Momentancentra" für die Bewegung der in der Bogenebene liegenden, mit dem betreffenden Bogenquerschnitt fest verbunden gedachten Punkte aufzufassen.



Bezeichnet $d\,s$ das Bogenelement, J das Trägheitselement, ε den Elasticitätsmodul und P das Moment der Kraft K bezüglich irgend eines Querschnittes, so ergibt sich bekanntlich die Amplitude $d\,\Delta\delta$ der Rotation (d. h. der unendlich kleine Drehungswinkel in Theilen eines Kreisbogens vom Radius Eins gemessen) jenes Querschnittes aus der Formel

$$(1) \qquad d\,\Delta\delta = \frac{P\,d\,s}{\varepsilon\,J} \text{ [1]}$$

Durch Zusammensetzung der sämmtlichen durch Einwirkung der Kraft K auf das Bogenstück $a\,c$ hervorgerufenen Elementarrotationen erhält man nach Axe und Amplitude die resultirende Rotation ϱ, welche für jeden mit dem Querschnitt c fest verbundenen Punkt der Bogenebene, also auch für das bewegliche Bogenende b massgebend ist. Aufgabe der Berechnung ist es nun, eine Kraft, die Widerlagerreaction, zu finden, welche auf den *ganzen* — bei a eingeklemmten — Bogen wirkend, eine der unendlich kleinen Rotation ϱ entgegengesetzt gleiche Rotation hervorruft.

Dass die Theorie der Zusammensetzung der *unendlich kleinen* Rotationen ohne Weiteres auf Rotationen von den Amplituden $d\,\Delta\delta$, sowie $\Delta\delta$ angewendet werden kann, folgt daraus, dass bei Bestimmung der Widerlagerreactionen nur die Verhältnisse der Amplituden zu einander benutzt werden, dass also Amplitudenwerthe von beliebiger Kleinheit gedacht werden können. Im Grenzfall wären die — etwa mit dem Zeitelement $d\,t$ multiplicirt zu denkenden — Amplituden $\Delta\delta$ und $d\,\Delta\delta$ als unendlich kleine Grössen erster resp. zweiter Ordnung aufzufassen.

2. Unendlich kleine Rotationen von den Axen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ und den Amplituden $\Delta\delta_1, \Delta\delta_2 \ldots \Delta\delta_n$ werden bekanntlich zusammengesetzt, als ob es Kräfte wären von den Richtungslinien $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ und den Intensitäten $\Delta\delta_1, \Delta\delta_2 \ldots \Delta\delta_n$ [2]). Es gelten demnach alle Sätze, welche das Gleichgewicht der Kräfte betreffen, auch für das Gleichgewicht der unendlich kleinen Rotationen: es handelt sich bei diesem Dualismus nur um eine Vertauschung von Worten.

So ist z. B. das „Moment" der resultirenden Rotation in Bezug auf eine beliebige Axe des Raumes gleich der Summe der „Momente" der componirenden Rotationen hinsichtlich derselben Axe, wenn unter „Moment" ein ähnliches, statt der Intensität — die Amplitude enthaltendes Product verstanden wird, wie in der Lehre von den Kräften.

So gelten für ein System von Rotationen paralleler Axen dieselben Sätze, welche bei einem System von Parallelkräften auf den Begriff des Mittelpunktes (Schwerpunktes) eines Punktsystems führen u. s. w.

3. Das bei der „Summation der kleinsten Wirkungen" zur Verwendung kommende Gesetz:

Die Resultirende mehrerer Bewegungsursachen bringt die Resultirende derjenigen Bewegungseffecte hervor, welche die einzelnen componirenden Bewegungsursachen je für sich allein zur Folge haben würden —

in Verbindung mit der hypothetischen Annahme, dass die Amplitude der unendlich kleinen Rotation, welche durch Einwirkung einer und derselben Kraft auf ein und dasselbe Bogenstück — vermöge des in Betracht kommenden Endquerschnitts

1) Als positiver Drehungssinn soll stets der Drehungssinn des Uhrzeigers gelten.

2) Eine erschöpfende Darstellung der Zusammensetzung der Rotationen, vom rein geometrischen Standpunkte aus, enthält *Schells* „Theorie der Bewegung und der Kräfte". In sehr allgemeiner Auffassung finden sich auch die erforderlichen Sätze in des Verfassers Schriftchen: „Die wichtigsten Sätze der neueren Statik" (Meyer & Zeller, Zürich). Mit Hülfe der von *Ball* und *Fiedler* gegebenen Theorien und unter Zugrundelegung des für Gleichgewicht überhaupt bestehenden Principes „Summe der mechanischen Arbeiten gleich Null" werden dort gleichzeitig für Kräfte und Bewegungen die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet. Die ebendaselbst aus Rücksichten elementarer Behandlungsweise gewählte Form der gleichförmigen Rotationen (von *festen* Axen), die sich also in jedem Moment zu einer Rotation von sich gleich bleibender Axe und Geschwindigkeit vereinigen, ist im Wesen mit der Grundform der unendlich kleinen Rotation identisch. Vergl. auch den zugehörigen Aufsatz „Ueber einige Eigenschaften des Cylinderroids", Zeitsch. für Math. und Phys. Heft V d. Jahrg.

— erzeugt wird, einfach der Intensität jener Kraft proportional sei, begründet die projectivischen Beziehungen, welche zwischen den geometrischen Elementen stattfinden, durch die in der Bogenebene Impuls und Effect der Lage nach dargestellt werden.

Es wurden diese Beziehungen zuerst von *Culmann* in der Bogentheorie benützt.

Offenbar sind die in Frage kommenden geometrischen Elemente einerseits die Richtungslinien der auf das betrachtete Bogenstück wirkenden äusseren Kräfte, anderseits die Momentancentra, um welche diese Kräfte den Endquerschnitt jenes Bogenstücks drehen[3]). Werden, wie hier, nur die von den Momenten der äusseren Kräfte herrührenden Formänderungen berücksichtigt, so zeigt man leicht, dass jenes Entsprechen von Kräften und Momentancentra — für beliebige Bogenformen — nicht allein ein projectivisches, sondern auch ein involutorisches ist[4]). Die (als äussere Kräfte K betrachteten) Geraden der Bogenebene mit den denselben entsprechenden Punkten (Momentancentra) bilden also, in Bezug auf ein und dasselbe Bogenstück, ein ebenes *Polarsystem*.

Bildet man, hinsichtlich der Richtungslinie der Kraft K — durch Summation der Momente der Elementarrotationen — das Moment der durch die Kraft K hervorgerufenen, resultirenden Rotation, so findet sich, dass dasselbe dem über das betrachtete Bogenstück zu erstreckenden Integral proportional ist.

$$\int \frac{d\,s}{\varepsilon\,J}\,u^2$$

(worin u den Abstand eines beliebigen Bogenpunktes von der Richtungslinie K bedeutet), einem Integral, welches, wie leicht zu ersehen, niemals Null werden kann. Wir folgern hieraus:

Keine Kraft geht durch das ihr entsprechende Momentancentrum, d. h. keine Gerade eines solchen Polarsystems enthält den ihr entsprechenden Punkt. Durch das Polarsystem kann also kein reeller Kegelschnitt dargestellt sein.

Wird das bezüglich des Bogenstücks $a\,c$ (Fig. 1) existirende Polarsystem etwa als „Polarsystem $a\,c$", das Polarsystem hinsichtlich des ganzen Bogens als „Polarsystem $a\,b$" bezeichnet, so lässt sich die geometrische Beziehung, in welcher die Kraft K zu der durch sie (bezüglich des Bogenendes b) erzeugten Widerlagerreaction R steht, folgendermassen ausdrücken:

Der Action K entspricht im Polarsystem $a\,c$ *derselbe Punkt*, welcher der Reaction R im Polarsystem $a\,b$ entspricht.

Wir werden die den einzelnen Actionen K entsprechenden Momentancentra M direct, d. h. nicht mit Hülfe der betreffenden Polarsysteme $a\,c$ bestimmen; die Richtungslinien der Reactionen R sollen jedoch als die jenen Momentancentra M im Polarsystem $a\,b$ entsprechenden Geraden erhalten werden.

(Fortsetzung folgt.)

Statistik des Betriebsmaterials der schweizerischen Eisenbahnen am 1. Januar 1880.

Von Controlingenieur *R. Abt* in Bern.

Das Post- und Eisenbahndepartement hat soeben eine Zusammenstellung des Rollmaterials der schweizerischen Eisenbahnen, vom 1. Januar 1880, veröffentlicht.

Wir bringen im Nachfolgenden einen gedrängten Auszug der wichtigsten Angaben nebst einigen allgemeinen Betrachtungen.

3) Der Nachweis des projectivischen Entsprechens kann geführt werden, indem man von irgend einem „Fundamentaldreiseit" dreier Kräfte und dem zugehörigen „Fundamentaldreieck" dreier Momentancentra ausgeht.

4) Bei Hinzuziehung der durch die Normal- und Transversalkräfte verursachten Formänderungen findet ein involutorisches Entsprechen im Allgemeinen nicht mehr statt.

I. Locomotiven.

Eisenbahnen	Betriebslänge	Anzahl Locom.	Gewicht aller Maschinen: Total im Dienst	Leer	Adhärir. minimum
	km		*t*	*t*	*t*
Normalbahnen.					
Suisse Occidentale	548	96	4718,0	3553,6	2689,9
Simplonbahn	117	9	389,7	294,3	173,0
Nordostbahn	532	140	5920,9	4142,7	3378,4
Effretikon-Hinweil	23	3	75,8	59,1	64,5
Jura-Bern-Luzern	243	48	2352,1	1757,9	1362,7
Bern-Luzern-Bahn	95	11	488,2	373,8	361,9
Bödelibahn	9	3	42,0	30,0	32,1
Centralbahn	333	95	4255,0	3287,0	2585,5
Wohlen-Bremgarten	8	2	62,4	50,0	53,6
Vereinigte Schweizerbahnen	289	56	2357,0	1821,0	1561,1
Toggenburgerbahn	25	3	75,6	63,0	62,4
Nationalbahn	164	18	716,0	544,0	436,0
Gotthardbahn	66	14	670,4	492,2	423,4
Tössthalbahn	40	6	199,0	148,8	164,3
Emmenthalbahn	24	3	70,8	52,2	57,6
Wädensweil-Einsiedeln	17	2	64,0	50,0	54,0
Total	2533	509	22457,8	16722,0	13460,4
Specialbahnen.					
Uetlibergbahn	9	4	100,0	76,0	88,0
Arth-Rigi	11	6	106,8	87,3	230,8*
Rorschach-Heiden	7	3	51,0	40,5	126,0*
Rigibahn	7	10	145,0	115,0	378,0*
Appenzellerbahn	15	4	80,0	63,6	71,6
Lausanne-Echallens	15	4	42,5	32,5	35,7
Rigi-Scheideck	7	3	55,8	41,1	44,1
Total	71	34	581,1	456,0	974,2
Total aller Bahnen	2604	543	23038,9	17178,0	14434,6

* Um eine gleichartige Darstellung zu ermöglichen, wurde das Adhäsionsgewicht der Zahnradlocomotiven gleich dem siebenfachen Zahndrucke gesetzt.

Constructionssysteme.

Normalbahnen.

I. *Locomotiven mit Schlepptender.*

a) Maschinen mit drei gekuppelten Achsen und zweiachsigem Schlepptender	130
b) Maschinen mit zwei gekuppelten Achsen, zwei Laufachsen und dreiachsigem Tender	23
c) Maschinen mit zwei gekuppelten Achsen, einer Laufachse und zweiachsigem Tender	39
d) Maschinen mit zwei gekuppelten Achsen und zweiachsigem Tender	57
zusammen	249

II. *Locomotiven mit Kessellagerung auf dem Tender, nach System Engerth.*

a) Maschinen mit drei gekuppelten- und zwei Tenderachsen	22
b) Maschinen mit zwei gekuppelten- und drei Tenderachsen	51
c) Maschinen mit zwei gekuppelten- und zwei Tenderachsen	17
zusammen	90

III. *Tenderlocomotiven.*

a) Maschinen mit vier gekuppelten Achsen	4
b) Maschinen mit drei gekuppelten Achsen und einer hintern Laufachse	16
c) Maschinen mit drei gekuppelten- und einer vordern Laufachse	26
d) Maschinen mit drei gekuppelten Achsen	40
e) Maschinen mit zwei gekuppelten- und einer hintern und einer vordern Laufachse	2
f) Maschinen mit zwei gekuppelten- und zwei vordern Laufachsen	28
g) Maschinen mit zwei gekuppelten Achsen	54
zusammen	170