Beitrag zur Bogentheorie

Autor(en): **Goebel, J.B.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Die Eisenbahn = Le chemin de fer**

Band (Jahr): **12/13 (1880)**

Heft 21

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-8639

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

INHALT: Beitrag zur Bogentheorie. Von Dr. J. B. Goebel, Ing. der Süddeutschen Brückenbau-Actiengesellschaft. — Appareil dragueur centrifuge de Ball. Par M. Max Lyon, Ingénieur à Paris. (Avec 5 dessins.) — Ueber die Vergebung der Locomotiven für die Gotthardbahn. — Revue: Eisenbahnunglück bei Courl; Ueber die Eisenbahnen in ihrem Verhältniss zur Staatswissenschaft; Le chemin de fer souterrain de New-York. — Literatur: Handbuch des gesammten Strassenbaues in Städten, von Richard Krüger; Die electrischen Telegraphen, das Telephon und Mikrophon von Dr. F. Binder; Grundrissvorbilder von Gebäuden aller Art von Ludwig Klasen. — Necrologie: † Ludwig Scheu. — Vereinsnachrichten: Schweizerischer Ingenieur- und Architectenverein, Delegirten-Versammlung in Bern den 14. November.

Beitrag zur Bogentheorie.[1]

Von Dr. *J. B. Goebel*, Ing. der Süddeutschen Brückenbau-Actiengesellschaft.

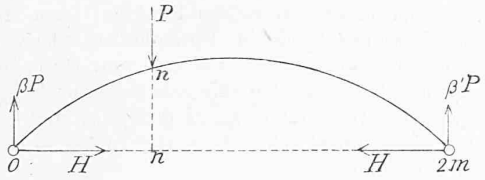
13. Im Anschluss an die *allgemein* gültigen Entwickelungen des vorigen Aufsatzes soll hier zunächst gezeigt werden, wie auch bei Bogen mit Auflagergelenken — unter den früheren Voraussetzungen — die Widerlagerreactionen in sehr einfacher Weise bestimmt werden können.

Die Richtungslinien der letzteren müssen in diesem Falle durch die Auflagerpunkte gehen.

Bei *Vertical*actionen kann man sich die Widerlagerreactionen immer zusammengesetzt denken aus verticalen Componenten, welche die nämlichen sind, wie die Auflagerreactionen eines einfachen geraden Balkens von derselben Spannweite und Belastung und aus Componenten (von entgegengesetzten Intensitäten), deren gemeinsame Richtungslinie die Auflagersehne ist.

In unserem Falle — und überhaupt bei *gleicher Höhe* der Auflagerpunkte — sind also die letzteren Componenten die *Horizontal*componenten der Widerlagerreactionen.

Fig. 6



Wirkt (Fig. 6) auf den Bogen im Theilpunkt n eine Verticalkraft P, so entstehen für die beiden Endpunkte 0 und $2m$ Widerlagerreactionen, deren Verticalcomponenten beziehlich gleich $\beta' P$ und βP sind, wenn, wie üblich, die Verhältnisse $\frac{n}{2m}$ und $\frac{2m-n}{2m}$ gleich β und β' resp. gesetzt werden. Die noch unbekannten Horizontalcomponenten sollen mit H bezeichnet werden.

Wir bestimmen nun die Lagenänderung der beiden Bogenenden gegen einander, welche unter dem *alleinigen* Einflusse des Systems der Verticalkräfte erfolgen würde. Beziehen wir die Bewegungen der Endquerschnitte etwa auf den (unbeweglich gedachten) Querschnitt n, so kommen offenbar als Rotationen, welche die Endquerschnitte 0 und $2m$ in die neuen Lagen überzuführen haben, die Rotationen $\beta' P(0,n)\,0$ und $\beta P(n,2m)\,2m$ resp. in Betracht. Die erste der beiden Rotationen ist von positiver, die zweite ist von negativer Amplitude. Soll, wie früher, die Bewegung des Endquerschnitts $2m$ auf den Endquerschnitt 0 bezogen werden, so ist die Rotation $\beta P(n,2m)\,2m$ des Endquerschnitts $2m$ mit einer Rotation zusammenzusetzen, welche der (dem Endquerschnitt 0 eigenthümlichen) Rotation $\beta' P(0,n)\,0$ *entgegengesetzt* ist: Die letztere soll mit $-\beta' P(0,n)\,0$ bezeichnet werden. Es ergibt sich also die Rotation, welche nunmehr die relative Lagenänderung repräsentirt, als Resultirende zweier Drehungen von negativen Amplituden.

Ein analoges Raisonnement gilt hinsichtlich der Horizontalkräfte H. Auch diese bedingen für sich *allein* eine Rotation ϱ des Endquerschnitts $2m$ — bezüglich des unbeweglich gedachten Endquerschnitts 0 —, deren Momentancentrum, auch ohne dass die Intensität der Horizontalkräfte H bekannt ist, als gegeben angesehen werden darf (Gleich. 14).

Schliesslich kommt noch jene Lagenänderung des Endquerschnitts $2m$ — dem Endquerschnitt 0 gegenüber — in Betracht, welche als Folge der um die beiden Gelenkpunkte möglichen Drehungen der Bogenenden erscheint. Das Momentancentrum der Rotation ϱ', welche diese Lagenänderung darstellt, liegt natürlich auf der Auflagersehne.

Die vier Elementarrotationen $-\beta' P(0,n)\,0$, $\beta P(n,2m)\,2m$ ϱ und ϱ' müssen sich offenbar neutralisiren. Daraus folgt z. B., dass die Summe der Momente der drei ersteren bezüglich der Auflagersehne gleich Null sein muss. Diese Bedingung liefert eine Gleichung zur Bestimmung des Horizontalschubs H.

Mittelst der Gleichungen (5) und (6a) leitet man leicht ab, dass die Abscisse (§ 4) des Momentancentrums $(n-1,n)\,0$ aus der Formel erhalten werden kann

$$x_{(n-1,n)\,0} = \lambda\left[2n-1+\frac{1}{6(2n-1)}\right]. \tag{24}$$

Die Ordinate desselben Momentancentrums berechnet sich hiernach als

$$y_{(n-1,n)\,0} = \frac{1}{2}(y_n+y_{n-1}) + \frac{y_n-y_{n-1}}{6(2n-1)}. \tag{25}$$

Bei negativ drehender Verticalkraft P haben wir nach Gleichung (5) die Amplitude

$$\Delta\delta_{P(n-1,n)\,0} = -\frac{\mu\lambda^2 P}{2}(2n-1). \tag{26}$$

Das Moment der Rotation $P(n-1,n)\,0$ bezüglich der x-Axe ist also

$$\mathfrak{M}_{P(n-1,n)\,0} = -\frac{\mu\lambda^2 P}{12}\left[3(2n-1)(y_n+y_{n-1})+y_n-y_{n-1}\right]. \tag{27}$$

Hieraus ergibt sich das Moment der Rotation $P(0,n)\,0$ — bezüglich der x-Axe —

$$\mathfrak{M}_{P(0,n)\,0} = \sum_{i=1}^{i=n}\mathfrak{M}_{P(i-1,i)\,0} = -\frac{\mu\lambda^2 P}{12}\left[y_n+3\sum_{i=1}^{i=n}(2i-1)(y_{i-1}+y_i)\right]. \tag{28}$$

Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir das Moment der Rotation $-\beta' P(0,n)\,0$, mit $\mathfrak{M}'$ das Moment der Rotation $\beta P(n,2m)\,2m$ — hinsichtlich der x-Axe. Gleichung (28) liefert ohne Weiteres

$$\mathfrak{M} = -\frac{\mu\beta'\lambda^2 P}{12}\left[y_n+3\sum_{i=1}^{i=n}(2i-1)(y_{i-1}+y_i)\right].$$

und analog, mit Hinsicht auf die Symmetrie des Bogens, ergibt sich

$$\mathfrak{M}' = -\frac{\mu\beta\lambda^2 P}{12}\left[y_n+3\sum_{i=1}^{i=2m-n}(2i-1)(y_{i-1}+y_i)\right].$$

Wir setzen

$$\sum_{i=1}^{i=n}(2i-1)(y_{i-1}+y_i) = b_n \quad \text{und} \tag{29}$$

$$\sum_{i=1}^{i=2m-n}(2i-1)(y_{i-1}+y_i) = b_{2m-n}.$$

Dann wird, da $\beta+\beta'=1$,

$$\mathfrak{M}+\mathfrak{M}' = -\frac{\mu\lambda^2 P}{12}\left[y_n+3(\beta' b_n+\beta b_{2m-n})\right].$$

In Folge der Symmetrie des Bogens existiren zwischen den Zahlen b_n und b_{2m-n} mehrfache Beziehungen. Denken wir b_n als die kleinere der beiden Zahlen — n also kleiner als m — und wird z. B. die Summe

$$(y_n+y_{n+1})+(y_{n+1}+y_{n+2})+\cdots(y_{m-1}+y_m) = z_n \tag{30}$$

gesetzt (n kann höchstens gleich $m-1$ sein), so findet sich

$$b_{2m-n} = b_n + 4mz_n$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung, sowie der Relation $n = 2\beta m$ ergibt sich demnach mit Bezug auf eine Belastung P im Punkte n der linken Bogenhälfte

$$\mathfrak{M}+\mathfrak{M}' = -\frac{\mu\lambda^2 P}{12}\left[y_n+3(b_n+2nz_n)\right].$$

Das Moment $\mathfrak{M}''$ der Rotation ϱ bezüglich der x-Axe erhält man (§ 8) aus der Gleichung

$$\mathfrak{M}'' = \frac{\mu\lambda H a}{2}, \text{ wenn hierin}$$

$$a = \sum_{i=1}^{i=m}\left[(y_{i-1}+y_i)^2+\frac{1}{3}(y_{i-1}-y_i)^2\right]. \tag{31}$$

Die Bedingung $\mathfrak{M}+\mathfrak{M}'+\mathfrak{M}''=0$ liefert nunmehr die Relation

$$H = \frac{\lambda P}{6a}\left[y_n+3(b_n+2nz_n)\right]. \tag{32}$$

[1]) Als Fortsetzung des in den Nrn. 12—15 erschienenen Aufsatzes.

Wegen der Symmetrie der Lastpunkte brauchen selbstredend die Intensitäten H nur für Belastungen der einen (linken) Bogenhälfte gerechnet zu werden.

Die totalen Widerlagerreactionen ergeben sich z. B. hinsichtlich des Bogenendpunktes $2m$ durch Zusammensetzung der einzelnen Horizontalkräfte H mit den zugehörigen Verticalcomponenten βP.

Wir wollen die practische Verwendung der Formel (32) an einem Beispiel darlegen. Absichtlich wählen wir als Trägeraxe ein einem *Parabelbogen* von der Spannweite $l = 10$ und dem Pfeil $f = 1$ eingeschriebenes, zehnseitiges Polygon. Die Ordinaten y_n der Polygon-Eckpunkte ergeben sich demnach aus der Gleichung

$$y_n = \frac{1}{25}(10 - n)\,n,$$

wenn hierin $n = 1$ bis 5 gesetzt wird.

Mittelst Gleichung (31) bestimmt man, wie bereits früher besprochen, den constanten Factor a. Es wird in unserm Falle $a = 10{,}49$.

Der Gang der Rechnung zur Ermittelung der Horizontalcomponenten H wird aus der folgenden Tabelle ersichtlich sein.

n	y_n	$y_{n-1}+y_n$	$(2n-1)(y_{n-1}+y_n)$	b_n	z_n [2]	$2nz_n$	$y_n+3(b_n+2nz_n)$	H	H'
1	0,36	0,36	0,36	0,36	6,24	12,48	38,88	0,618	0,613
2	0,64	1,00	3,00	3,36	5,24	20,96	73,60	1,170	1,160
3	0,84	1,48	7,40	10,76	3,76	22,56	100,80	1,603	1,588
4	0,96	1,80	12,60	23,36	1,96	15,68	118,08	1,877	1,860
5	1,00	1,96	17,64	41,00	0,00	0,00	124,00	1,972	1,953

Es erweist sich hiernach Gleichung (32) für die Zahlen-Durchrechnung sehr geeignet. Bis zu den Zahlen

$$y_n + 3\,(b_n + 2\,n\,z_n),$$

welche schon Proportionalzahlen der gesuchten Intensitäten H darstellen, kann die Tabelle sozusagen gerade hingeschrieben werden.

Diese Verhältnisszahlen sind, wenn etwa $P = 1$ angenommen wird (da $\lambda = 1$), noch mit $\frac{1}{6\,a} = 0{,}0159$ zu multipliciren. Die resultirenden Intensitäten sind in der Tabelle mit H bezeichnet.

Die Annahme, dass unsere Polygonaxe mit einiger Annäherung auch als Parabelbogen betrachtet werden kann, gestattet uns, die Werthe von H, welche sich ergeben, wenn eine Polygon- beziehungsweise eine Curven-Schwerpunktsaxe den Rechnungen zu Grunde gelegt wird, zu vergleichen.

Man findet den Horizontalschub H' für einen symmetrischen Parabelbogen mit zwei Gelenken aus der Formel

$$H' = \frac{5\,P}{8\,l^3}\,x\,(l - x)\,(l^2 + l\,x - x^2), \qquad ^{2)}$$

wenn hierin x den Abstand der Belastung P von einem der Gelenkpunkte bedeutet. Durch Einsetzen der bezüglichen Werthe erhält man die Zahlen H' der obigen Tabelle.

Die Differenzen zwischen den Zahlen H und H' sind so gering (ca. 1 %), dass für practische Rechnungen die Werthe H statt der Werthe H' schon recht wohl zulässig wären. Bedenkt man aber, dass, wenn es sich bei einer Berechnung wirklich darum handeln sollte, an Stelle irgend eines Curvenzuges ein Polygon zu setzen, man nicht, wie es hier der Einfachheit halber geschehen, gerade das *eingeschriebene* Vieleck, sondern ein Polygon wählen wird, bei welchem für jede der einzelnen Seiten die mittlere Abweichung von dem entsprechenden Curvenstück ungefähr die kleinste wird, so erkennt man, dass z. B. in unserm Falle — ohne dass die Zahl der Polygonseiten erhöht zu werden brauchte — die Werthe H mit den Werthen H' fast zu vollkommener Uebereinstimmung gebracht werden könnten.

14. Bei einer unendlich kleinen Temperaturänderung $d\tau$ würden, wenn keine Kräfte entgegenwirkten, unendlich kleine horizontale Translationen der beiden Bogenenden stattfinden. Die horizontale Verschiebung $d\,l$ des einen Bogenendes dem andern gegenüber ist

$$d\,l = \alpha\,l\,d\,\tau,$$

wenn hierin α den Ausdehnungscoefficienten, l die Spannweite des Bogens bedeutet und $d\tau$ in Graden ausgedrückt wird.

a) *Bogen mit festen Auflagern.* Wir schreiben, wie bei den früheren Entwickelungen, die Translation $d\,l$ dem (beweglichen) Ende $2\,m$ zu. Die Richtungslinie der Widerlagerreaction, welche einer Horizontaltranslation entspricht, ist von vorneherein bekannt: dem unendlich fernen Punkt der Verticalen (als Momentancentrum) entspricht im Polarsystem $(0, 2m)$ die horizontale Polaraxe (§ 7). Es bleibt also nur noch die Intensität der betreffenden Widerlagerreaction zu bestimmen.

Denken wir z. B. eine positive, d. h. eine durch *Ausdehnung* des Bogens verursachte Translation $d\,l$ des Bogenendes $2\,m$, so hätte jene Widerlagerreaction die Translation $-\,d\,l$ desselben Bogenendes zu bewirken. Wir zerlegen die Translation $-\,d\,l$ nach zwei Rotationen, deren eine den Mittelpunkt S und deren andere einen der beiden zu S auf der verticalen Polaraxe im Abstande $\varkappa_v$ symmetrisch gelegenen Punkte U (§ 11) zum Momentancentrum hat. Für solche zwei Rotationen müssen bzw. die Amplituden $\mp\frac{d\,l}{\varkappa_v}$ oder $\pm\frac{d\,l}{\varkappa_v}$ gedacht werden (§ 8), je nachdem der Punkt S und der obere oder der Punkt S und der untere der beiden Punkte U gewählt werden. Eine Rotation vom Momentancentrum S kann nur durch ein Kräftepaar, eine Rotation, welche einen der beiden Punkte U zum Momentancentrum hat, kann nur durch eine Horizontalkraft hervorgebracht werden, welche durch den andern Punkt U geht. Diese Horizontalkraft hat, wie man leicht erkennt, in jedem Falle mit der gesuchten, durch S gehenden Horizontalkraft H gleiche (durch den Sinn „von rechts nach links" characterisirte) Intensität. Nach § 8 besteht die Gleichung

$$2\,\mu\,\lambda\,m\,H\,\varkappa_v = \frac{d\,l}{\varkappa_v}$$

oder, wenn hierin $2\,\lambda\,m = l$, $d\,l = \alpha\,l\,d\,\tau$ gesetzt wird,

$$H = \frac{\alpha\,d\,\tau}{\mu\,\varkappa_v^2}.$$

Endliche Temperaturdifferenzen haben auch endliche Hebungen oder Senkungen eines auf den Widerlagern fest aufsitzenden Bogens zur Folge. Der Werth $\varkappa_v^2$ wird variiren. Immerhin ist dies nur in so geringem Maasse der Fall, dass auch für eine endliche Temperaturänderung von τ Graden gesetzt werden kann

$$H = \frac{\alpha\,\tau}{\mu\,\varkappa_v^2}, \tag{33}$$

wenn hierin etwa der für die Aufstellungstemperatur sich ergebende mittlere Werth von $\varkappa_v^2$ eingeführt wird.

Für einen Parabelbogen vom Pfeil f ist $\varkappa_v^2 = \frac{4}{45}f^2$ und es geht Gleichung (33) in die bekannte Formel über

$$H = \frac{45\,\alpha\,\tau}{4\,\mu\,f^2}.$$

b) *Bogen mit Gelenkauflagern.* Die Horizontaltranslation $-\,d\,l$ kann hier *nur* zerlegt werden nach der Rotation ϱ, welche der in der Auflagersehne wirkenden Horizontalkraft entspricht und nach den beiden Rotationen, welche die Auflager-Gelenkpunkte als Momentancentra haben. Sofort erkennt man, dass der erstgenannten Rotationscomponente die Amplitude $\frac{d\,l}{y_\varrho}$ zugeschrieben werden muss.

Der durch eine Temperaturänderung $d\,\tau$ hervorgerufene Horizontalschub wird demnach (§ 8)

---

[2]) Zur Bestimmung der Zahlen z_n geht man in der Columne $y_{n-1}+y_n$ zweckmässig *von unten nach oben* vor.

[3]) Vrgl. z. B. Weyrauch „Theorie der elastischen Bogenträger" S. 59.

$$H = \frac{d\,l}{\mu\, l\, y_\sigma y_\varrho} = \frac{\alpha\, d\, \tau}{\mu\, y_\sigma y_\varrho}.$$

Auch hier kann für eine endliche Temperaturänderung von τ Graden gesetzt werden

(34) $$H = \frac{\alpha\, \tau}{\mu\, y_\sigma\, y_\varrho}$$

oder auch, da $\left[\text{Gleich. (14) und (31)}\right]\; y_\sigma y_\varrho = \frac{a}{4m}$,

(34a) $$H = \frac{4\, m\, \alpha\, \tau}{\mu\, a}.$$

Für einen Parabelbogen vom Pfeil f ist $y_\sigma = \frac{2}{3} f$, $y_\varrho = \frac{4}{5} f$, daher nach Gleich. (34)

$$H = \frac{15\, \alpha\, \tau}{8\, \mu\, f^2}.$$

Appareil dragueur centrifuge de Ball.

Par M. *Max Lyon*, Ingénieur à Paris.

(Avec 5 dessins.)

Cet appareil a figuré à l'Exposition de 1878, et est appelé à rendre de grands services pour les excavations en sables et cailloux de faibles dimensions. Il a été employé avec succès au draguage des sables et galets des ports de Lowestoft et de Poole (Angleterre), au canal d'eau de mer des salins de la Méditerranée à Fos, à l'enlèvement des sables du port de Smyrne et enfin à l'amélioration du chenal navigable de la Loire. Son usage est encore peu connu. Il peut servir soit comme pompe drague, soit comme auxiliaire des dragues ordinaires.

Depuis un certain nombre d'années, de nombreux essais de draguages au moyen de pompes centrifuges ont été tentés avec plus ou moins de succès. Dans la plupart des cas, ce système a dû être écarté, soit à cause de l'usure rapide des pompes, soit à cause d'engorgements presque instantanés dans les tuyaux apportant de nombreux et importants arrêts dans la marche du travail. Mr. Ball a fait disparaître l'inconvénient de l'usure des pompes; il a rendu presque impossible les chances d'engorgements dans les conduites et a trouvé le moyen d'amorcer facilement les pompes dragues sans les avoir placées en contrebas du niveau de l'eau.

Fig. 1

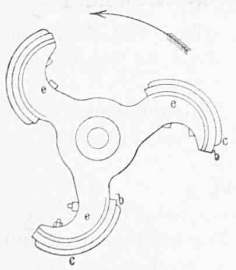
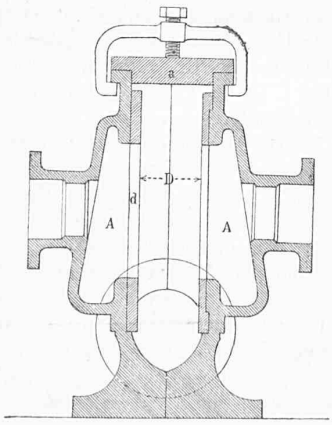
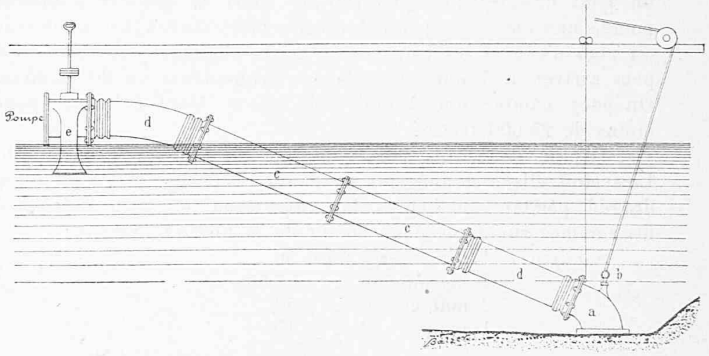


Fig. 2



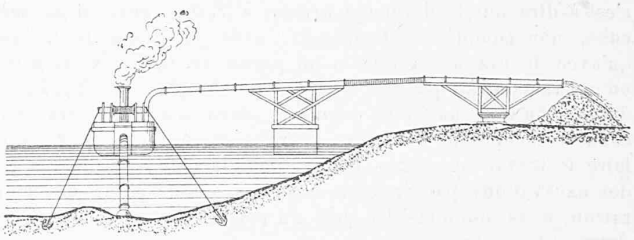
Les figures 1 et 2 donnent le corps de la pompe formée de deux coquilles AA; le regard a sert à la visite de la pompe et à l'accès du rouet propulseur. Chaque coquille ou demi corps est munie d'un disque annulaire d, en acier appliqué par serrage à chaud sans boulons. Le rouet propulseur est formé d'un moyen sur lequel sont fixées les ailettes e. Sur chacune de ces ailettes se trouvent des plaques de caoutchouc b dont la largeur excède environ d'un centimètre l'écartement D des disques en acier, qui forment par conséquent avec les ailettes un joint efficace qui empêche l'interposition des sables et des graviers entre les parties frottantes des surfaces mobiles et des surfaces fixes. Les plaques en caoutchouc b, auxquelles on pourrait aussi substituer plus économiquement de simples bandes, sont maintenues par des contreplaques métalliques c à angles arrondis, fixées par des boulons dont les têtes sont noyées et dont les écrous sont goupillés.

Fig. 3



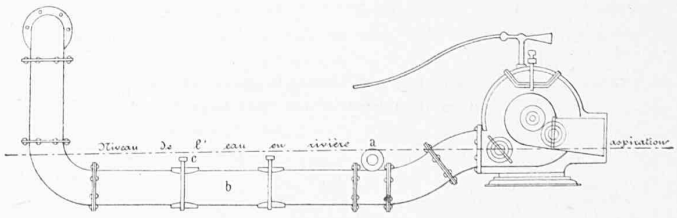
Le tuyau d'aspiration (fig. 3) est terminé par une crépine dont la forme et la section varient suivant la nature spéciale des déblais à extraire. La règle fixée sur la crépine doit indiquer constamment au dragueur à quelle profondeur il travaille; les tuyaux c sont en fonte et leur nombre est variable; les tuyaux de raccordement d sont en caoutchouc. La soupape régulatrice c (fig. 3), placée près de la pompe, a pour but l'admettre dans la conduite de l'aspiration la quantité d'eau nécessaire pour prévenir les engorgements. Pour empêcher la pompe de se désamorcer pendant un temps d'arrêt, on infléchit du côté

Fig. 4



du refoulement (fig. 4) le tuyau par deux coudes de manière à passer au dessous du niveau de l'eau; enfin le robinet a doit amener de l'eau si la pompe se trouve désamorcée et si l'amorçage par l'éjecteur est devenue nécessaire. Les regards c, et divers manomètres et indicateurs du vide complètent l'appareil principal.

Fig. 5



La figure 5 montre une des multiples installations qu'on peut faire pour transporter directement les déblais à terre. Il suffit d'amener l'extrémité de la conduite de refoulement là où le dépôt doit s'effectuer en soutenant le tuyau au moyen d'un ou de plusieurs flotteurs, ou bien en employant des poutres armées comme aux anciennes dragues du canal de Suez. On