Zeitschrift: Die Eisenbahn = Le chemin de fer
Herausgeber: A. Waldner
Band: 16/17 (1882)
Heft: 7

Artikel: Die graphische Lösung einiger höherer algebraischer Gleichungen
Autor: Smreker, Oscar
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10286

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Durchfahrt durch das ganze Gebäude in der Axe des Mitteltraktes des rechten Gebäudeflügels. Eine weitere Durchfahrt liegt in der kleinen Axe des Hauses.

Das durchgehende Hauptgesimse des Gebäudes liegt in einer Höhe von 20 *m*. Die Risalite dagegen sind bis auf 24 *m* erhöht. Die Hauptdecoration der Silhouette ist aber gewonnen durch die colossale halbkugelförmige Kuppel (38 *m*), die sich auf einen verhältnissmässig niedrigen einfachen Tambour (27 *m*) setzt und durch vier weitere kleine Flachkuppeln auf runden Tambours, welche die vier Pavillons bekrönen.

In der Perspective gegen den Königsplatz ist die Wirkung noch erhöht durch ein famos gezeichnetes Reiterstandbild.

Uebrigens ist bei den Pavillons noch zu erwähnen, dass im Grundriss die eine Seite von einer geschlossenen Wand eingenommen wird, dass dagegen in der Ansicht unter beiden Säulen getragenen Giebeln der Seiten Fenster, überdies von zweifelhaften Verhältnissen, eingezeichnet sind. In Natura wäre die Decoration in dieser Weise jedenfalls schwierig. Das Schlimmste ist aber sicher das zweite Obergeschoss, wie es beim ganzen Gebäude in den Mittelflügeln am Aeussern zu Tage tritt. Ueber den kleinen Fenstern des ersten Obergeschosses hängen sie in riesiger Höhe, den Architrav und Fries hässlich durchschneidend, die kleinen Fenster dieser Etage, und erfüllen den Beschauer mit Bedauern, dass an die gerügten Einzelnheiten von dem Verfasser nicht ein seinem eminenten Können entsprechender kritischer Masstab gelegt worden ist.

Es ist schon wiederholt darauf hingewiesen worden, wie misslich es für den Projectanten war, die kurze Axe als Hauptaxe auszubilden und die Haupträume in ihrer wohl naturgemässesten Anordnung zu lassen, d. h. Treppe und Foyer vor den Sitzungssaal zu legen und mit letzterem Lesesäle und Restauration in directe Verbindung zu setzen, wodurch sie an die Sommerstrasse zu liegen kommen.

Die graphische Lösung einiger höherer algebraischer Gleichungen.

Von *Oscar Smreker*, Darmstadt.

Die Umkehrung der Operation des graphischen Potencirens durch wiederholte Construction der mittleren geometrischen Proportionalen führt, wie ich gezeigt habe*), auf Curven, welche allgemein z. B. für die n^{te} Potenz durch die Gleichung:

$$C \equiv y^n + y^{n-2}(x^2 - cx) - ux^{n-1} = 0 \quad . \; . \; . \quad 1$$

dargestellt werden; das Coordinatensystem ist hiebei ein rechtwinkliges und es wird vorausgesetzt, dass der Exponent n eine reelle, positive und ganze Zahl sei.

Die an und für sich sehr einfache Construction der Curven dieser Gattung aus den Elementen c und u bei bekanntem Exponenten n ist in der erwähnten Abhandlung allgemein entwickelt und durch einige specielle Beispiele erläutert worden, so dass hier nicht näher darauf eingetreten werden soll; der Umstand, dass die einzelnen Punkte dieser Curven immer als Schnittpunkte von aufeinander senkrechten Strahlen resultiren, ist einer genauen Construction sehr förderlich.

Wir wollen im Folgenden diese Curven zur graphischen Lösung einiger Gleichungen benützen.

Schneidet man die durch Gleichung 1 dargestellte Curve n^{ten} Grades:

$$C \equiv y^n + y^{n-2}(x^2 - cx) - ux^{n-1} = 0$$

durch eine zur y Achse parallele Gerade, welche sich im Abstande a davon befindet, also durch die Gleichung

$$x = a$$

dargestellt wird, so ergeben sich die Ordinaten der n Schnittpunkte der Geraden mit der Curve als die n Wurzeln der Gleichung:

$$y^n + y^{n-2}(a^2 - ac) - u \,.\, a^{n-1} = 0.$$

Hat man aber umgekehrt die Curve construirt und schneidet dieselbe durch eine Parallele zur y Achse im Abstande

$$x = a$$

von derselben, so würden die Ordinaten der auf diese Weise erhaltenen Schnittpunkte die n Wurzeln der obigen Gleichung darstellen.

Hat man allgemein die Wurzeln der Gleichung:

$$y^n + Ay^{n-2} + B = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2$$

zu construiren, diese Gleichung also graphisch zu lösen, so handelt es sich zunächst darum, aus den Coefficienten der Gleichung A und B die zur Construction unserer Curve nöthigen Elemente c und u und die Grösse a zu bestimmen; da nur zwei Bestimmungsgleichungen, nämlich

$$a^2 - ac = A$$
$$-ua^{n-1} = B$$

aufgestellt werden können, so dürfen wir über eine der Grössen a, c und u beliebig verfügen; am besten wählen wir

$$a = 1$$

und erhalten dann zur Bestimmung der Elemente u und c die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} c &= 1 - A \\ u &= -B \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3$$

welche an Einfachheit Nichts zu wünschen übrig lassen.

Von den Gleichungen, welche mit Hülfe dieser Curven durch die eben entwickelte Methode graphisch gelöst werden können, sollen hier nur die Gleichungen zweiten und dritten Grades behandelt werden.

Setzt man in den Gleichungen 1 und 2 den Exponenten

$$n = 1,$$

so erhält man aus Gleichung 1:

$$y^2 + x^2 - cx - uy = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1a$$

und aus Gleichung 2:

$$y^2 + A + B = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2a$$

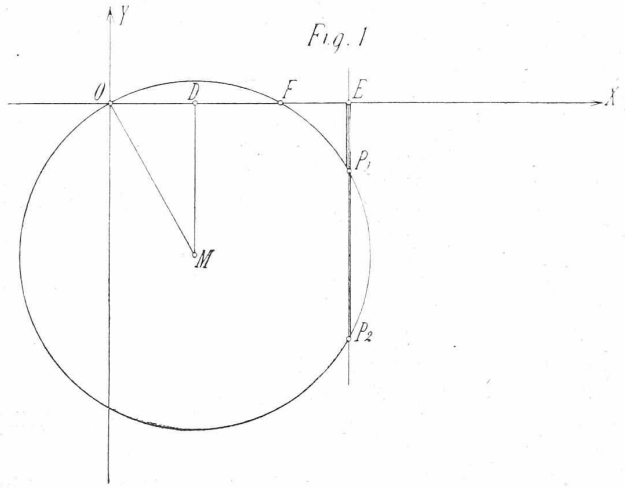
Die Gleichung 1*a* stellt einen Kreis dar, der durch den Coordinatenanfangspunkt geht und dessen Mittelpunkt die Coordinaten

$$x_0 = \frac{c}{2}$$

$$y_0 = \frac{u}{2}$$

besitzt.

Die Elemente u und c bestimmen sich wieder aus den Gleichungen 3 und es sind die Constructionen in der beistehenden Figur (Fig. 1) durchgeführt.



Sei

OX die positive x Achse,
OY „ „ y Achse,

ferner:

$$OE = 1$$

Sind die beiden Coefficienten A und B der graphisch zu lösenden quadratischen Lösung positiv, so trägt man von E aus

$$EF = A$$

auf, halbirt die Strecke OF in D, so dass

$$OD = \frac{OF}{2} = \frac{1-A}{2} = \frac{c}{2}$$

*) Versuch der Umkehrung des graphischen Potencirens. „Eisenbahn" Band XIV, Nr. 4, 5, 6 und 7.

wird, trägt auf der Senkrechten im Punkte D die Länge

$$DM = -\frac{B}{2} = \frac{u}{2}$$

auf, beschreibt aus diesem Punkte M als Mittelpunkt mit dem Radius OM ein Kreis, so wird dieser letztere die im Punkte E errichtete Senkrechte in den beiden Punkten P_1 und P_2 schneiden, deren Ordinaten:

$$y_1 = EP_1$$
$$y_2 = EP_2$$

die Wurzeln der gegebenen quadratischen Gleichung nach Grösse und Vorzeichen sein werden.

Je nach dem wechselnden Zeichen von A oder B wird die Strecke EF von E aus nach rechts, die Strecke DM von D aus nach aufwärts aufgetragen.

Setzt man in Gleichung 2 den Exponenten

$$n = 3$$

so erhält man:

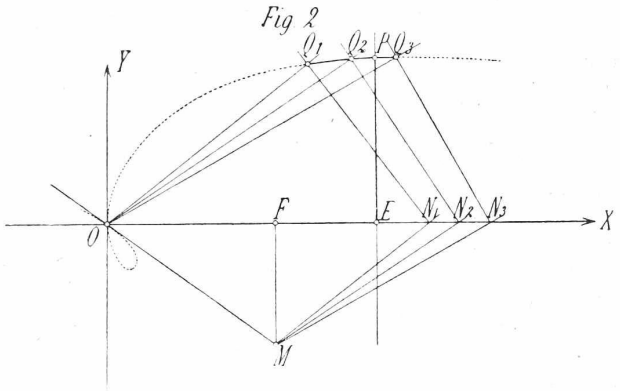
$$y^3 + Ay + B = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2b$$

also eine Gleichung dritten Grades; zu ihrer graphischen Lösung dient die durch die Gleichung:

$$y^3 + y\,(x^2 - cx)\,ux^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1b$$

dargestellte Curve, welche in der oben erwähnten Abhandlung unter Hinweis auf den hier verfolgten Zweck ganz speciell untersucht wurde.

Zur Ermittelung der die Curven bestimmenden Elemente c und u dienen wieder die Gleichungen 3 und es soll die Construction durch beistehende Skizze (Fig. 2) erläutert werden.



Es sei wieder:

O der Coordinatenanfangspunkt,
OX die positive x Achse,
OY „ „ y „ und
$OE = 1$.

Trägt man nun von E aus je nach dem positiven oder negativen Vorzeichen von A die Strecke

$$EF = A$$

nach links oder nach rechts auf, so wird

$$OF = 1 - A = c,$$

errichtet ferner im Punkte F eine Senkrechte und trägt auf derselben unter Berücksichtigung des Vorzeichens von B die Strecke

$$FM = u = -B$$

auf, so sind uns damit die zur Construction der Curve erforderlichen Elemente bestimmt.

Zur Bestimmung der einzelnen Curvenpunkte Q dient das folgende Verfahren: Zieht man in Fig. 2 vom Coordinatenanfangspunkte O aus einen beliebigen Strahl OQ_1, von dem Punkte M aus einen Strahl MN_1 zu dem ersteren parallel, also

$$MN_1 \parallel OQ_1,$$

errichtet in dem Schnittpunkte N_1 des Strahles MN_1 mit der x Achse eine Senkrechte N_1Q_1 auf MN_1, so dass also:

$$N_1Q_1 \perp MN_1$$

ist, so gibt der Schnittpunkt Q_1 der beiden Strahlen OQ_1 und N_1Q_1 einen Punkt unserer Curve. Durch Wiederholung dieser Construction, die wir mittelst unserer zeichnerischen Hülfsmittel sehr einfach und genau durchführen können, kann man beliebig viel-

Punkte der Curve direct bestimmen. Der Coordinatenanfangspunkt O ist Doppelpunkt der Curve; die y Achse ist die eine, die Verbindungslinie des Punktes O mit dem Punkte M die zweite Tangente an die Curve im Punkte O. Die Ordinaten der Schnittpunkte dieser Curve mit der im Punkte E auf die x Achse errichteten Senkrechten geben uns die Wurzeln der Gleichung dritten Grades. Nach den in der Skizze Fig. 2 angenommenen Verhältnissen ist nur einer dieser Schnittpunkte, nämlich der Punkt P, reell, demnach also:

$$y_1 = EP$$

die einzige reelle Wurzel. Selbstredend wird man im Falle der practischen Anwendung nicht die ganze Curve, sondern nur den in der Skizze stark ausgezogenen Theil der Curve in der Nähe des Punktes P construiren.

Man sieht aus der Construction, dass

$$A < 0$$

die erste zu erfüllende Bedingung ist, damit alle drei Wurzeln reell werden können.

Als Specielles wähle ich noch die Gleichung:

$$y^3 - 3y - 1 = 0$$

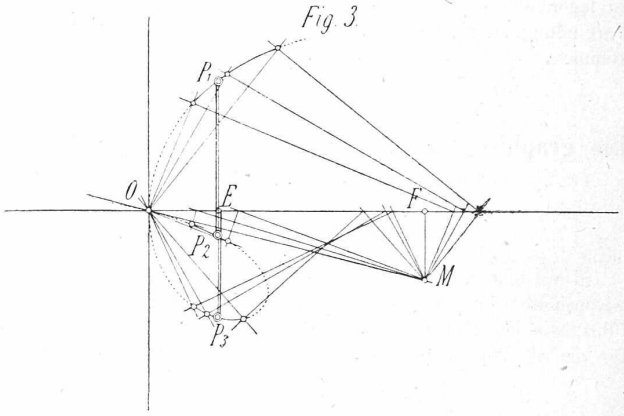
deren Wurzeln graphisch construirt werden sollen.

Es ist unter Beibehaltung der im Vorstehenden gebrauchten Bezeichnungen:

$$A = -3$$
$$B = -1$$

Daraus ergeben sich sofort:

$$u = +1$$
$$c = +4$$



Trägt man demnach in beistehender Fig. 3

$$OF = c = 4$$
$$FM = u = +1$$
$$OE = 1$$

auf und schneidet die durch diese Elemente bestimmte Curve durch die Senkrechte EP im Abstande 1 von der y Achse, so erhält man die drei Wurzeln, die in diesem Falle alle reell sind:

$$y_1 = EP_1 = +1{,}88$$
$$y_2 = EP_2 = -0{,}35$$
$$y_3 = EP_3 = -1{,}53$$

Wie wir bis jetzt unsere Curven durch Gerade schneiden liessen, welche parallel zur y Achse waren, so wollen wir nun die Resultate des Schnittes unserer Curven mit einer zur x Achse Parallelen untersuchen.

Setzt man in der Gleichung 1:

$$C = y^n + y^{n-2}(x^2 - cx) - ux^{n-1} = 0$$
$$y = a,$$

sucht also die Abscissen der Schnittpunkte dieser Curve mit einer Parallelen zur x Achse im Abstande a von derselben, so erhält man diese gesuchten Abscissen als Wurzeln der Gleichung:

$$a^n + a^{n-2}(x^2 - cx) - ux^{n-1} = 0$$

oder umgeformt:

$$x^{n-1} - \frac{a^{n-2}}{u}\,x^2 + c\,\frac{a^{n-1}}{u}\,x - \frac{a^n}{u} = 0.$$

Geht man von der Curve n^{ten} Grades zu jener vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade über, so schreibt sich diese vorstehende Gleichung wie folgt:

$$x^n - \frac{a^{n-1}}{u} x^2 + c \frac{a^n}{u} x - \frac{a^{n+1}}{u} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4$$

Mittelst der Curve $(n+1)^{ten}$ Grades können also Gleichungen von der allgemeinen Form:

$$x^n + Ax^2 + Bx + C = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5$$

graphisch gelöst werden.

Durch Gleichsetzen der Coefficienten der gleich hohen Potenzen in den Gleichungen 4 und 5 erhält man zur Bestimmung der Curvenelemente u und c und des Abstands a drei Bestimmungsgleichungen, ans denen sich schliesslich die folgenden Werthe ergeben:

$$\left.\begin{aligned} a &= \pm \sqrt{\frac{C}{A}} \\ c &= -\frac{B}{A} \\ u &= \pm \sqrt{\frac{C^{n-1}}{A^{n+1}}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6$$

Man sieht daraus, dass die Grössen a und u nur dann reelle Werthe erhalten können, wenn die beiden Coefficienten A und C dasselbe Vorzeichen haben; ist dieses nicht der Fall, so verlieren die Grössen a und u ihren reellen Werth, diese Methode wird dann zur graphischen Lösung unbrauchbar. Erfüllen aber die Coefficienten A und C die Bedingung des gleichen Vorzeichens, so ist die Gleichung durch die obige Methode graphisch zu lösen und es macht die Ermittelung der Elemente u und c, sowie des Abstandes a nach den Gleichungen 6 keinerlei Schwierigkeiten.

Noch soll hier einer andern graphischen Lösung der Gleichung vierten Grades erwähnt werden, welche immer anwendbar ist, sobald das constante Glied der Gleichung positiv ist.

Es ist:

$$x^2 + y^2 - 2\,cx - 2\,ry + c^2 = 0$$

die Gleichung eines Kreises, der die x Achse berührt; M sei der Mittelpunkt, r der Radius dieses Kreises.

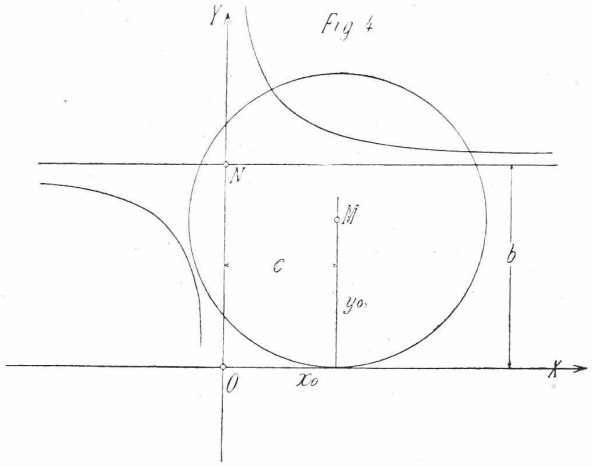
Die Coordinaten x_o, y_o des Kreismittelpunktes sind:

$$x_o = c,$$
$$y_o = r.$$

Hiebei ist, wie aus beistehender Fig. 4 folgt:

O als der Coordinatenanfangspunkt,
OX als die positive x Achse,
OY „ „ „ y Achse

angenommen.



Schneidet man diesen Kreis durch eine gleichseitige Hyperbel, deren Parameter a ist und deren Mittelpunkt N (siehe Fig. 4) auf der y Achse im Abstande b von der x Achse sich befindet, deren Gleichung also:

$$xy - bx = a$$

sein wird, so bestimmen sich die Abscissen der Schnittpunkte von Kreis und Hyperbel als Wurzeln der Gleichung:

$$x^4 - 2\,cx^3 + (c^2 + b^2 - 2\,br)\,x^2 + (2\,ab - 2\,ar)\,x + a^2 = 0 \quad . \quad 7$$

Diese Gleichung stellt eine Gleichung vierten Grades in der allgemeinen Form:

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8$$

dar, deren constantes Glied

$$D = a^2$$

jedoch positiv sein muss.

Ist nun umgekehrt eine Gleichung vierten Grades mit positivem constantem Gliede von der allgemeinen Form 8 gegeben, so können die Wurzeln derselben als Abscissen der Schnittpunkte eines Kreises mit einer gleichseitigen Hyperbel, deren Construction bei gegebenem Parameter a sehr einfach ist, graphisch dargestellt werden.

Die Bestimmungselemente c und r für den Kreis und a und b für die gleichseitige Hyperbel erhält man aus den folgenden, durch Gleichsetzen entsprechender Coefficienten in den Gleichungen 7 und 8, gewonnenen Relationen:

$$\left.\begin{aligned} c &= -\frac{A}{2} \\ r &= \pm \sqrt{\frac{C^2 + A^2 D - 4\,BD}{4\,D}} \\ a &= \pm \sqrt{D} \\ b &= \frac{C \pm \sqrt{C^2 + A^2 D - 4\,BD}}{2\,D} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9$$

Für den Fall, dass in Gleichung 8 der Coefficient A der dritten Potenz der Unbekannten gleich Null wird, vereinfachen sich diese Gleichungen 9, die übrigens auch so ohne Schwierigkeiten zu construiren sind, ganz bedeutend.

Concurrenzen.

Concurrenz für Entwürfe einer Kirche in Meran (Südtyrol). — Bei der in unserer Nr. 6 Band XVI vom 11. Februar d. J. mitgetheilten Concurrenz haben den ersten Preis erhalten die HH. Architecten Wilhelm *Klingenberg* und Albert *Paar* in Wien und den zweiten Preis Herr Architect Johann *Vollmer* in Berlin; ehrenvoll erwähnt wurden die Entwürfe der Architecten Victor *Luntz* und Ferd. *Wendeler* in Wien.

Concurrenz zur Erlangung von Entwürfen für zwei eiserne Brücken über die Donau bei Bahnhof Czernawoda und über die Borcea bei Fetesti. — Das Programm dieser in Nummer 4 und 5 d. B. erwähnten Concurrenz liegt endlich vor. Laut demselben handelt es sich weniger um ein Preisausschreiben im academischen Sinne, sondern es ist mehr darauf abgesehen, geeignete Unternehmer für die Ausführung der bezüglichen Brücken zu finden. Die Aufforderung bezieht sich auf den Entwurf und Bau einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke von 800 *m* Länge zwischen den Uferpfeilern über den Hauptarm der Donau beim Bahnhof Czernawoda und einer solchen von etwa 260 *m* Länge bei Fetesti über einen Nebenarm der Donau, die Borcea. Die Construction, ob Bogen- oder Balkenformen zu wählen seien, steht frei; ausgeschlossen sind Hängebrücken. Ebenso ist die Wahl zwischen Stahl und Eisen freigestellt. Gusseisen darf nur zu untergeordneten Constructionen verwendet werden. Die Donaubrücke soll Segelschiffen bis zu einer Höhe von 30 *m* freie Passage gewähren, während die Borceabrücke nur eine Höhe von 10,5 *m* über dem äussersten Hochwasserstand erhalten soll. Um die Bewerber für ihre Auslagen schadlos zu halten, sind für die drei besten Entwürfe Preise von 40 000, 30 000 und 20 000 Fr. ausgesetzt. Sollte einer von den preisgekrönten Entwürfen zur Ausführung gelangen, so erhält der Verfasser, welchem der Bau übertragen wird, diese Entschädigung jedoch nicht. Von dem in der früheren Mittheilung erwähnten Tunnelproject ist in dem Programm nichts gesagt. Die Entwürfe mit Erläuterungsbericht, statistischer Berechnung und Kostenüberschlag sind in französischer Sprache innert acht Monaten nach erfolgter Zusendung des Programmes einzureichen. Dieselben werden einer technischen Prüfungscommission unterbreitet, welche binnen 30 Tagen nach Eingang ihre Entscheidung fällt, worauf das Ministerium seine endgültige Entscheiinnerhalb weiterer 20 Tage mitzutheilen hat. Das ausführliche Programm, welchem zwei Situationspläne beigegeben sind, kann bei der königlich rumänischen Gesandtschaft, Bellevuestrasse 7 in Berlin, bezogen werden.

Concurrenz für Entwürfe zur Anlage eines Friedhofs in Düsseldorf. — Das Programm verlangt für das etwa 16 *ha* grosse Terrain den Ent-