Die inneren Kräfte eines belasteten Stabringes

Autor(en): **Ritter, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **17/18 (1891)**

Heft 3

PDF erstellt am: **07.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-86080

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

INHALT: Die inneren Kräfte eines belasteten Stabringes. Von Prof. W. Ritter. — Abänderung des Längenprofils der Seilbahn Territet-Glion. — Das neue eidg. Post- und Telegraphengebäude in St. Gallen (Schluss). — Preisausschreiben. — Miscellanea: Die Abänderungen der Eisenbahnfahrpreise. Die Kosten der Berliner Stadtbahn. Der Rauchverhütungsapparat. — Nekrologie: † Karl Pestalozzi. — Concurrenzen: Marktplatz in Basel. Wirthschaftsgebäude in den neuen Anlagen am Zürichhorn. — Vereinsnachrichten: Erklärung des st. gall. Ingenieur- und Architektenvereins. Stellenvermittelung. — Hiezu eine Lichtdruck-Tafel: Neues eidg. Post- und Telegraphen-Gebäude in St. Gallen. Schalterhalle.

Die inneren Kräfte eines belasteten Stabringes.

Von Prof. *W. Ritter.*

In der Statik der Bauconstructionen stösst man dann und wann auf die Aufgabe, die Spannungen und elastischen Formänderungen zu bestimmen, welche ein geschlossener Ring von Stäben unter dem Einflusse beliebiger äusserer Kräfte erleidet. Abgesehen von den allereinfachsten Fällen lässt sich diese Aufgabe bekanntlich nur dadurch lösen, dass man die elastischen Formänderungen der einzelnen Stäbe berücksichtigt. Nachstehend soll eine allgemeine Lösung der Aufgabe erklärt werden.

Die Gesetze des Gleichgewichts kann man bei einem belasteten Stabringe auf unendlich viele Arten befriedigen. Am übersichtlichsten geschieht dies im Allgemeinen dadurch, dass man die gegebenen Kräfte zu einem geschlossenen Kräftepolygon vereinigt und in das Stabgebilde ein geschlossenes Seilpolygon einzeichnet; dann entspricht jedem durch einen Stab gelegten Querschnitte eine bestimmte Seilpolygonseite, das heisst eine bestimmte Kraft, aus der sich die im Stabinneren herrschenden Zug-, Druck- und Scherspannungen nach bekannten Regeln leicht ermitteln lassen.

Unter den unendlich vielen Seilpolygonen, die sich zeichnen lassen, ist jedoch nur eins das richtige, und um dieses zu finden, müssen die Formänderungen der Stäbe berücksichtigt werden. Zu diesem Zwecke machen wir von den „Elasticitätsellipsen" der Stäbe Gebrauch.

Im ersten Theile meiner „Anwendungen der Graphischen Statik"*) (Nr. 31—34) ist gezeigt worden, dass sich für jeden geradlinigen oder gekrümmten Stab eine Ellipse zeichnen lässt, welche die unter dem Einfluss einer äusseren Kraft eintretende Formänderung auf einfache Weise anzugeben gestattet. Ist der Stab geradlinig, so fällt die grosse Achse dieser Ellipse mit der Stabachse zusammen. Ist ferner der Querschnitt des Stabes constant, so wird die halbe kleine Achse der Ellipse gleich i, gleich dem Trägheitshalbmesser des Querschnittes und die halbe grosse Achse gleich:

$$\sqrt{\tfrac{1}{12}\, s^2 + \frac{k E i^2}{G}},$$

worin s die Stablänge, E und G die Elasticitätscoefficienten für Zug und Schub und k einen von der Querschnittsform abhängigen Coefficienten bedeutet. Meistentheils darf der Einfluss der scherenden Spannungen auf die Formänderungen vernachlässigt, das heisst $G = \infty$ gesetzt werden; dann wird die halbe grosse Achse einfach gleich:

$$\sqrt{\tfrac{1}{12}}\, s = 0{,}289\, s.$$

Bei veränderlichem Querschnitte, sowie bei gekrümmter Stabachse hat man die Elasticitätsellipse ähnlich wie die Centralellipse unregelmässiger Figuren zu ermitteln; doch reichen auch häufig Annäherungswege aus.

Neben der Elasticitätsellipse muss für den Stab noch das sogenannte „elastische Gewicht" bestimmt werden. Es ist bei constantem Stabquerschnitte gleich $\frac{s}{E J}$, bei veränderlichem Querschnitte gleich der Summe der „Gewichte" der einzelnen Stabelemente.

Sind Ellipse und Gewichte bekannt, so gilt der Satz:

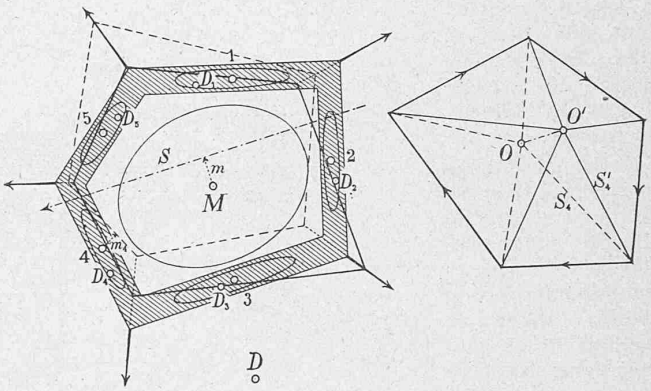
Steht ein Stab unter dem Einflusse einer äusseren Kraft, so dreht sich das eine Stabende gegenüber dem andern um den Antipol der Kraftrichtung bezüglich der Elasticitätsellipse des Stabes, und der Drehungswinkel ist gleich dem elastischen Gewichte des Stabes multiplicirt mit dem statischen Momente der Kraft bezogen auf den Ellipsenmittelpunkt.

*) Verlag von Meyer & Zeller in Zürich, 1888.

Auf Grund dieses Satzes ergibt sich für die gestellte Aufgabe folgende allgemeine Lösung.

Es werde ein aus fünf Stäben zusammengesetztes Polygon von fünf an den Ecken angreifenden, unter sich im Gleichgewicht stehenden Kräften belastet. Diese Kräfte seien mit Hülfe eines Kräftepolygons und eines willkürlich gewählten Poles O zu einem geschlossenen Seilpolygone verbunden worden.

Verschiebt man im Kräftepolygon den Pol O nach O' und zeichnet mit Hülfe von O' ein zweites Seilpolygon, so



haben die beiden Polygone bekanntlich eine gerade Linie als Collineationsachse gemein, das heisst je zwei entsprechende Seilpolygonseiten schneiden sich auf ein und derselben Geraden, und diese Gerade läuft parallel zur Verbindungslinie beider Pole.

Es ist klar, dass das zweite Seilpolygon aus dem ersten auch dadurch hervorgeht, dass man zu jeder der fünf Seilkräfte des ersten Polygons die Kraft $OO' = S$ hinzufügt.

Um nun unter den unendlich vielen möglichen Seilpolygonen das richtige zu finden, zeichnen wir zunächst mit Hülfe des willkürlichen Poles O ein beliebiges (in der Figur gestrichtes) Seilpolygon. Dann denken wir uns das Stabpolygon an einer Ecke, beispielsweise am Zusammenstosspunkte der Stäbe 1 und 5, durchschnitten, halten den Anfangspunkt des ersten Stabes fest und verfolgen die Bewegung, welche der Endpunkt des fünften Stabes unter der Wirkung der fünf Stabkräfte ausführt.

Denkt man sich hierbei zunächst bloss einen einzigen Stab, sagen wir den vierten, elastisch, so erfährt das bewegliche Ende des fünften Stabes eine Drehung um den Antipol D_4 der vierten (gestrichten) Seilpolygonseite hinsichtlich der Ellipse des vierten Stabes, und der Drehungswinkel δ_4 ist gleich $G_4\, S_4\, m_4$, wenn G_4 das elastische Gewicht dieses Stabes bedeutet.

In gleicher Weise bestimmen wir für jeden der andern Stäbe den Drehpunkt und den Drehwinkel und summiren hierauf sämmtliche Einzelbewegungen. Diese Summation gestaltet sich am einfachsten dadurch, dass man jedem der Drehpunkte den Werth des Drehwinkels als Belastung beilegt und den Schwerpunkt dieser belasteten Punkte bestimmt. Bei zahlreichen Punkten wird man sich hiebei am besten zweier Seilpolygone bedienen. Es sei D der gesuchte Schwerpunkt und $\delta = \Sigma_1^5\, (G\, S\, m)$ der gesammte Drehwinkel.

Das richtige Seilpolygon wird nun erhalten, wenn man zu den Stabkräften eine Kraft S hinzufügt, welche so gewählt wird, dass sie die besprochene Bewegung wieder rückgängig macht. Da die Kraft S sämmtliche Stäbe des Polygons beeinflusst, so müssen wir noch durch Vereinigung der fünf Stabellipsen die Elasticitätsellipse des ganzen Polygons zeichnen. Dann liegt die Kraft S in der Antipolaren des

Punktes D hinsichtlich dieser Gesammtellipse und ihre Grösse findet sich aus der Beziehung

$$S.m.\ \Sigma(G) + \Sigma(G\,S\,m) = 0.$$

Um das Vorzeichen der Kraft S und der Producte $G\,S\,m$ zu finden, lässt man die Pfeile der fünf Stabkräfte im Seilpolygon in ein und derselben Richtung laufen, z. B. in der Richtung der Uhrzeiger, und bestimmt hiernach die Vorzeichen der fünf Drehungswinkel. So fallen in unsrer Figur δ_1 und δ_5 positiv, δ_2, δ_3 und δ_4 negativ aus. Im gleichen Sinne sind auch die betreffenden Drehpunkte zu belasten. Schliesslich hat auch die Zusatzkraft S in der Richtung der Uhrzeiger um den Punkt D zu drehen. Der Pol O muss somit dem Pfeil von S entgegengesetzt verschoben werden.

Als Probe kann gelten, dass die Antipole der richtigen Seilpolygonseiten, mit den Werthen $G\,S\,m$ belastet, einander das Gleichgewicht halten müssen. —

Der hiermit beschriebene Weg zur Auffindung der im Innern eines belasteten Stabringes auftretenden Kräfte besitzt allgemeine Gültigkeit. Es können dabei sowol die normalen wie die tangentialen inneren Spannungen berücksichtigt werden. Das erläuterte Verfahren lässt sich ebensowol bei gekrümmten wie bei geradlinigen Stäben, bei solchen mit veränderlichem wie bei solchen mit gleichbleibendem Querschnitte anwenden. Das Verfahren dient also dazu, die inneren Kräfte eines Ringes von beliebiger Form und beliebig veränderlichem Querschnitte zu bestimmen, der von beliebigen äussern Kräften angegriffen wird.

Will man dem Umstande Rechnung tragen, dass die üblichen Formeln zur Berechnung der Spannungen und Formänderungen gerader Stäbe für gekrümmte oder an den Enden schief begrenzte Stäbe nicht genau stimmen, so verschiebe man die Elasticitätsellipse gegen den Mittelpunkt der Krümmung, bezw. gegen den Schnittpunkt der Endflächen um eine Strecke, die gleich ist i^2 getheilt durch die Entfernung vom Krümmungsmittelpunkte.

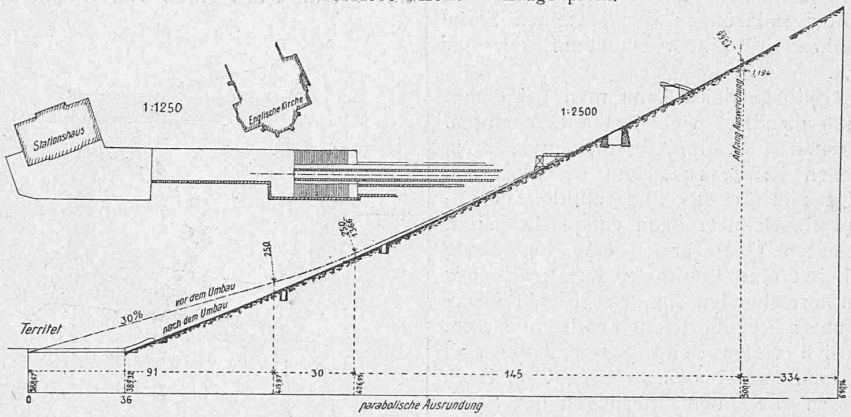
Auch der Umstand, dass die Spannungsverhältnisse eines Stabes sich in Folge seiner Verbiegung etwas ändern, kann durch eine nachträgliche Correctur berücksichtigt werden. In der Praxis darf man indessen diese beiden secundären Umstände meistens vernachlässigen.

Ist das richtige Polygon gefunden, so lassen sich die inneren Spannungen nach den bekannten Formeln für Zug-, Druck- und Biegungsfestigkeit berechnen. Auch die Formänderung, welche der Ring als solcher erfährt, lässt sich ermitteln. Um nämlich die Relativbewegung zweier beliebiger Punkte des Ringes zu finden, hat man nur nöthig, für die dazwischen liegenden Stäbe die richtigen Drehpunkte zu suchen, mit den entsprechenden Winkeln zu belasten und durch zwei Seilpolygone die Gesammtdrehung zu bestimmen.

In der beschriebenen, allgemein gültigen Weise wird man freilich die Aufgabe nicht immer behandeln. Häufig liegen die Verhältnisse so einfach, dass man unter Vernachlässigung einiger weniger wichtiger Umstände Formeln ableiten kann, welche die Stabkräfte rascher zu bestimmen gestatten als der allgemeine Weg. Aber gerade zur Ableitung dieser Formeln mag das allgemeine Verfahren häufig den geeignetsten Ausgangspunkt gewähren. —

Was das Anwendungsgebiet der besprochenen Lösung betrifft, so sei zunächst an eiserne Brücken mit unten liegender Fahrbahn und oberer Querverbindung erinnert, bei denen eine genaue statische Berechnung nur möglich wird, wenn man den Querträger, die Querverbindung und die beiden Pfosten zusammen als einen aus mehreren Stäben zusammengesetzten Rahmen oder Ring betrachtet. Auch das Einzeichnen der Drucklinie in geschlossene, ringförmige Gewölbe ist eine Aufgabe, deren strenge Lösung auf dem oben angegebenen Wege gefunden werden kann. Ferner eignet sich das Verfahren besonders gut zur Ermittelung der Drucklinie in Bogen oder Gewölben aller Art, welche verschieden gerichtete Kräfte zu tragen haben. Die Widerlager werden hierbei durch einen Stab vom Gewichte null ersetzt. Endlich liesse sich das Verfahren zum Ausgangspunkte einer Theorie der Nebenspannungen machen, d. h. derjenigen Spannungen, welche in den Stäben eines Fachwerkes in Folge der starren Knotenpunkte entstehen.

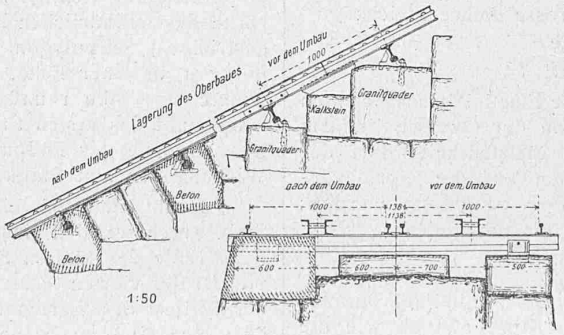
Seilbahn Territet-Glion. — Längenprofil.



Abänderung des Längenprofils der Seilbahn Territet-Glion.

Für die Territet-Glion-Bahn waren ursprünglich zwei Projecte ausgearbeitet worden. Das eine, welches nachher ausgeführt wurde, führt mit dem bekannten starken Gefällsbruch bis zum Stationsgebäude der Jura-Simplon-Bahn, während das andere Project die untere Station um 36 *m* weiter zurück an die Berghalde verlegte, eben um diesen Gefällsbruch umgehen zu können. Nach achtjährigem Betriebe wird nun auf Verlangen des Eisenbahndepartements das Längenprofil ziemlich übereinstimmend mit diesem Project umgebaut. Die Gesammtkosten des Umbaues belaufen sich auf etwa 60000 Franken, worin einige Verbesserungen in der Lagerung des Oberbaues, sowie der Wagen inbegriffen sind. Zu dieser Summe kommt der Verlust, der durch die voraussichtlich etwa fünf Monate (3. November bis Anfang April) andauernde Betriebsunterbrechung überhaupt entsteht. Da diese aber in die todte Saison fällt, kann er höchstens zu 10000 Franken geschätzt werden.

Seilbahn Territet-Glion. — Unterbau.



Der Umbau wurde durch verschiedene Uebelstände veranlasst, die in der Folge mit den gesteigerten Anforderungen an die Sicherheit einer Bahnanlage nicht mehr im Einklang standen. Von diesen ist der wichtigste, dass das Befahren des Gefällsbruches die Zuhülfenahme der lebendigen Kraft des Zuges beanspruchte. Um darin nicht stecken zu bleiben, musste diese Stelle je nach dem Belastungsunterschiede der beiden Wagen mit der gefährlichen Geschwindigkeit von 4—8 *m* in der Secunde befahren werden. Die Bedenklichkeit einer so gesteigerten Fahrgeschwindigkeit hatte sich vor zwei Jahren in deutlicher und beunruhigender