Ueber Kräfte in der Ebene und im Raum

Autor(en): **Kiefer, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **53/54 (1909)**

Heft 12

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-28115

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

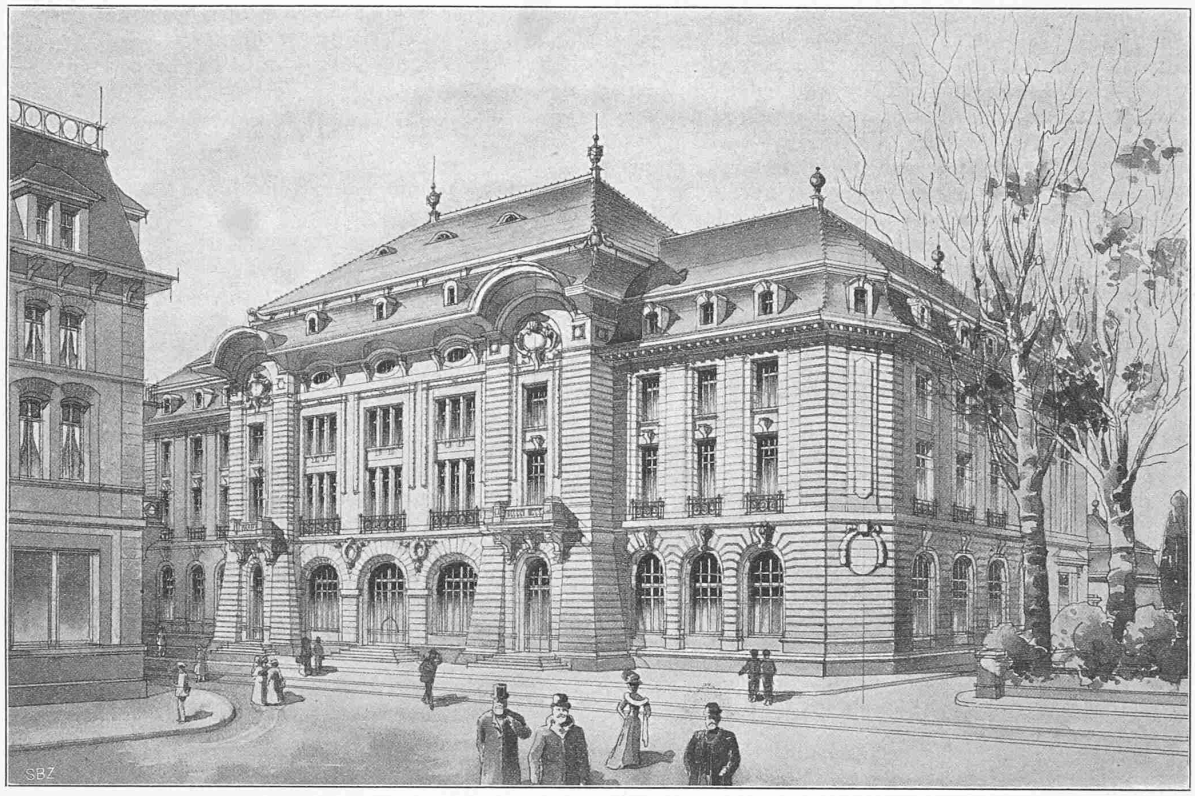
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Wettbewerb für ein neues Post- und Telegraphengebäude in Aarau.

V. Preis «ex aequo». — Motto: «.A.». — Verfasser: *Prince & Béguin*, Architekten in Neuchâtel.



Perspektivische Ansicht vom Bahnhofplatz aus.

Ueber Kräfte in der Ebene und im Raum.

Von *A. Kiefer* in Zürich.

II. (Schluss von Seite 66.)

I.

Es seien P_1, P_2, A (in Abb. 4) drei Punkte, von denen die zwei ersten fest sind, und $AP_1' = \lambda_1 \cdot AP_1$, $AP_2' = \lambda_2 \cdot AP_2$, wo λ_1, λ_2 positive konstante Faktoren bedeuten, seien zwei Kräfte, die von A gegen P_1 beziehungsweise gegen P_2 wirken, so kann man nach dem geometrischen Ort des Punktes A fragen, für den die zwei Kräfte gleich gross sind,

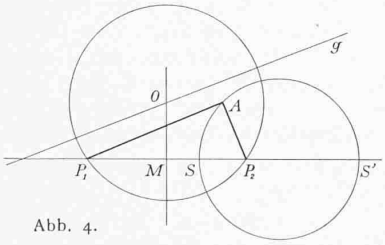


Abb. 4.

$$AP_1' = AP_2', \quad \lambda_1 \cdot AP_1 = \lambda_2 \cdot AP_2, \quad \frac{AP_1}{AP_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Der Ort von A ist der Ort eines Punktes, dessen Abstände von den zwei festen Punkten P_1, P_2 ein konstantes Verhältnis bilden, das ist bekanntlich ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf $P_1 P_2$ liegt und dessen Schnittpunkte S, S' mit $P_1 P_2$ die Strecke $P_1 P_2$ im Verhältnis $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ teilen; diese Schnittpunkte sind die Schwerpunkte der Punkte P_1, P_2, wenn ihnen die Gewichte λ_1, λ_2 mit gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen gegeben werden.

Frägt man nach dem Ort des Punktes A, für den das Verhältnis der zwei Kräfte ein gegebenes ist

$$\frac{AP_1'}{AP_2'} = \frac{\lambda_1 \cdot AP_1}{\lambda_2 \cdot AP_2} = k, \text{ so folgt } \frac{AP_1}{AP_2} = k \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \text{ d. h.}$$

der Ort ist ebenfalls ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf $P_1 P_2$ liegt und dessen Schnittpunkte mit $P_1 P_2$ die Strecke $P_1 P_2$ im Verhältnis $k \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ teilen. Wenn sich k ändert, so bilden alle diese Kreise ein Kreisbüschel zweiter Art mit P_1, P_2 als Grenzpunkten; die Mittelsenkrechte von $P_1 P_2$ ist die Potenzlinie aller dieser Kreise

$$MS \cdot MS' = \overline{MP_1}^2 = \overline{MP_2}^2.$$

Bei der Bewegung von A auf einer Geraden g, ändert sich das Verhältnis k der zwei Kräfte; wenn für eine unendlich kleine Verschiebung von A auf der Geraden das Verhältnis konstant bleibt, so ist für diese Stelle das Verhältnis ein Minimum oder ein Maximum. Die Stellen, für die ein Minimum oder ein Maximum eintritt, sind also die Berührungspunkte der Kreise des Büschels zweiter Art, welche die Gerade berühren. Schneidet man die Mittelsenkrechte von $P_1 P_2$, d. i. die Potenzlinie der Kreise, mit der Geraden und legt um den Schnittpunkt als Mittelpunkt den Kreis durch P_1, P_2, so schneidet er die Gerade in den gesuchten Punkten. Diese Punkte sind immer reell und ihre Lage ist unabhängig von den konstanten Faktoren λ_1, λ_2, aber nicht unabhängig davon ist die Grösse des Minimums oder Maximums; bezeichnet man die Winkel zwischen der Geraden und OP_1 beziehungsweise OP_2 mit φ und ψ, so betragen jene besondern Werte

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{2\, OP_1 \sin \frac{\varphi}{2}}{2\, OP_2 \sin \frac{\psi}{2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda^2} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \text{ und}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{2\, OP_1 \sin \frac{1}{2}(180^0 - \varphi)}{2\, OP_2 \sin \frac{1}{2}(180^0 - \psi)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\psi}{2}}.$$

Dreht man die Gerade um den Punkt O herum, so ändern sich die Punkte auf ihr, für die Minima oder Maxima auftreten und erfüllen den Kreis mit O als Mittelpunkt und mit dem Radius $OP_1 = OP_2$. Man kann die Gerade um einen beliebigen Punkt drehen und findet dann den Ort jener besondern Punkte, indem man durch den Punkt die Durchmesser der Kreise des Büschels mit den Grundpunkten P_1, P_2 zieht; der Ort der Durchmesserendpunkte ist die gesuchte Kurve, eine von λ_1, λ_2 unabhängige, spezielle zirkulare Kurve dritter Ordnuug, für welche die bekannte Küpper'sche Erzeugungsart vorliegt. Wird der Punkt, um

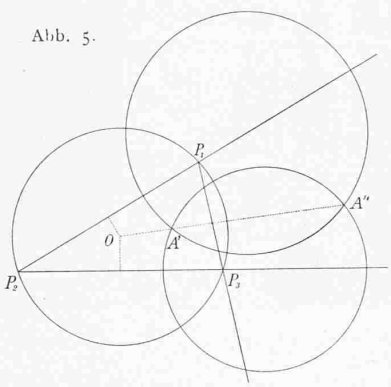
den sich die Gerade dreht, im Unendlichen angenommen, so zerfällt die Kurve dritter Ordnung in die unendlich ferne Gerade und in einen Kegelschnitt.

Man kann den Anfangspunkt A der beiden Kräfte $\lambda_1 \cdot AP_1$ und $\lambda_2 \cdot AP_2$ auch auf einer beliebigen Kurve sich bewegen lassen; dann gibt es auf der Kurve Stellen, wo das Verhältnis der zwei Kräfte ein Minimum oder ein Maximum wird. An diesen Stellen wird die Kurve von Kreisen des Büschels zweiter Art berührt, welches die Punkte P_1, P_2 zu Grenzpunkten hat. Wählt man die Punkte P_1, P_2 als Grundpunkte eines Kreisbüschels erster Art und sucht diejenigen Kreise desselben, welche die Kurve berühren, so sind die Berührungspunkte diejenigen Stellen auf der Kurve, wo der Winkel zwischen den zwei Kräften ein Minimum oder ein Maximum wird; denn eine unendlich kleine Verschiebung von A auf der Kurve an einer solchen Stelle ändert den Winkel nicht. Was die Veränderung der Resultierenden anbetrifft, sei auf den Abschnitt I dieses Artikels verwiesen.

2.

Angenommen, man hätte nach Abb. 5 vier Punkte P_1, P_2, P_3, A, von denen die drei ersten fest sind, und es wirken von A gegen die drei Punkte die bezüglichen Kräfte $AP_1' = \lambda_1 \cdot AP_1$, $AP_2' = \lambda_2 \cdot AP_2$, $AP_3' = \lambda_3 \cdot AP_3$, wo λ_1, λ_2, λ_3 konstante positive Faktoren sind, so kann man nach der Lage des Punktes A fragen, für welche die Kräfte gleich sind, oder allgemeiner, gegebene Verhältnisse bilden

Abb. 5.



$$AP_1' : AP_2' : AP_3' = m : n : p,$$
$$\lambda_1 \cdot AP_1 : \lambda_2 \cdot AP_2 : \lambda_3 \cdot AP_3 = m : n : p.$$

Hieraus folgt

$$AP_1 : AP_2 : AP_3 = \frac{m}{\lambda_1} : \frac{n}{\lambda_2} : \frac{p}{\lambda_3}.$$

Mit Rücksicht auf die Proportion

$$AP_1 : AP_2 = \frac{m}{\lambda_1} : \frac{n}{\lambda_2}$$

muss A auf dem Kreise liegen, der sein Zentrum auf $P_1 P_2$ hat und der die Strecke $P_1 P_2$ in dem Verhältnis $\frac{m}{\lambda_1} : \frac{n}{\lambda_2}$ teilt. Die Proportion

$$AP_2 : AP_3 = \frac{n}{\lambda_2} : \frac{p}{\lambda_3}$$

sagt, dass A auf dem Kreise liege, dessen Zentrum auf $P_2 P_3$ liegt, und der die Strecke $P_2 P_3$ in dem Verhältnis auf der rechten Seite teilt. Diese zwei Kreise schneiden sich in zwei Punkten A', A'', durch die auch der Kreis geht, welcher der dritten Proportion entspricht $AP_3 : AP_1 = \frac{p}{\lambda_3} : \frac{m}{\lambda_1}$; denn diese Proportion folgt aus den beiden andern. Die zwei Schnittpunkte A', A'', die auch imaginär sein können, sind die gesuchten Punkte. Legt man den Umkreis des Dreieckes $P_1 P_2 P_3$, so hat sein Mittelpunkt für jeden der Kreise dieselbe Potenz, $\overline{OP_1}^2 = \overline{OP_2}^2 = \overline{OP_3}^2$. Also geht die Verbindungsgerade der zwei Punkte A', A'' durch den Umkreismittelpunkt O des Dreieckes $P_1 P_2 P_3$ und es muss sein $OA' \cdot OA'' = \overline{OP_1}^2 = \overline{OP_2}^2 = \overline{OP_3}^2$; die Punkte A', A'' sind für den Umkreis konjugierte Pole. Die beiden Punkte A', A'' entsprechen sich vertauschbar; sie fallen zusammen, wenn der eine auf dem Umkreis des Dreieckes $P_1 P_2 P_3$ liegt und es berühren sich dann die drei zugehörigen Kreise. Beschreibt der eine Punkt eine beliebige Kurve, so läuft der andere auf der ihr nach dem Prinzip der reziproken Radien entsprechenden Kurve für den Umkreis des Dreieckes als Grundkreis.

3.

Die gefundenen Ergebnisse lassen sich ohne weiteres auf den Raum ausdehnen. Der geometrische Ort eines Punktes A im Raum, für den die nach den zwei festen Punkten P_1, P_2 wirkenden Kräfte $AP_1' = \lambda_1 \cdot AP_1$, $AP_2' = \lambda_2 \cdot AP_2$ (λ_1, λ_2 konstante positive Faktoren) einander gleich sind, oder ein gegebenes Verhältnis k bilden, ist je eine Kugel, deren Mittelpunkt auf $P_1 P_2$ liegt und welche die Strecke $P_1 P_2$ im Verhältnis $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ beziehungsweise $k \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ trennt. Bewegt sich A auf einer Kurve oder Fläche im Raum, so ändert sich das Verhältnis k der zwei Kräfte, und es wird ein Minimum oder ein Maximum an den Stellen, wo die Kurve oder Fläche von einer Kugel berührt wird, die dem Kugelbüschel mit den Punkten P_1, P_2 als Grenzkugeln angehört. Hat man drei feste Punkte im Raum, P_1, P_2, P_3, so ist der geometrische Ort eines Punktes A für den die gegen P_1, P_2, P_3 wirkenden Kräfte $AP_1' = \lambda_1 \cdot AP_1$, $AP_2' = \lambda_2 \cdot AP_2$, $AP_3' = \lambda_3 \cdot AP_3$ (λ_1, λ_2, λ_3 konstante positive Faktoren), gegebene Verhältnisse bilden

$$AP_1' : AP_2' : AP_3' = m : n : p,$$
$$\lambda_1 \cdot AP_1 : \lambda_2 \cdot AP_2 : \lambda_3 \cdot AP_3 = m : n : p,$$

ein Kreis, dessen Ebene auf der Ebene des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ senkrecht steht und durch den Umkreismittelpunkt des Dreieckes hindurchgeht und wo die Ebene des Dreieckes den Kreis in einem Durchmesser schneidet, dessen Endpunkte für den Umkreis des Dreieckes konjugierte Pole sind. Sind P_1, P_2, P_3, P_4 vier feste Punkte des Raumes, so kann man nach einem Punkte A fragen, für den die vier gegen P_1, P_2, P_3, P_4 wirkenden Kräfte $AP_1' = \lambda_1 \cdot AP_1$, $AP_2' = \lambda_2 \cdot AP_2$, $AP_3' = \lambda_3 \cdot AP_3$, $AP_4' = \lambda_4 \cdot AP_4$ (λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 konstante positive Faktoren), gegebene Verhältnisse bilden

$$AP_1' : AP_2' : AP_3' : AP_4' = m : n : p : q,$$
$$\lambda_1 \cdot AP_1 : \lambda_2 \cdot AP_2 : \lambda_3 \cdot AP_3 : \lambda_4 \cdot AP_4 = m : n : p : q.$$

Die gesuchten Punkte sind die zwei reellen oder imaginären Schnittpunkte A_1, A_2 des vorigen Kreises mit der Kugel, welche der Ort des Punktes A ist, für den $\lambda_3 AP_3 : \lambda_4 AP_4 = p : q$ ist. Durch diese zwei Punkte gehen auch die zwei Kugeln, die den Proportionen

$$\lambda_1 \cdot AP_1 : \lambda_4 \cdot AP_4 = m : q,$$
$$\lambda_2 \cdot AP_2 : \lambda_4 \cdot AP_4 = n : q$$ entsprechen, sodass also durch die zwei Punkte A_1, A_2 die sechs Kugeln gehen, die zu je zweien von den vier Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 gehören und auch die vier Kreise, die zu je drei von den vier Punkten gehören. Das Tetraeder der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 bestimmt eine Umkugel; ihr Mittelpunkt O hat für jede der sechs Kugeln gleiche Potenz und daher geht die Verbindungsgerade der zwei Punkte A_1, A_2 durch den Mittelpunkt jener Umkugel und die Punkte A_1, A_2 sind konjugierte Pole für die Umkugel $OA_1 \cdot OA_2 = \overline{OP_1}^2 = \overline{OP_2}^2 = \overline{OP_3}^2 = \overline{OP_4}^2$.

Die Punkte A_1, A_2 entsprechen sich vertauschbar; fällt der eine auf die Umkugel, so fällt der andere mit ihm zusammen, und die sechs Kugeln und die vier Kreise berühren die Gerade OA_1 in A_1 und die verschiedenen Mittelpunkte liegen in einer Tangentialebene der Umkugel. Läuft der eine Punkt auf einer Kurve oder Fläche, so beschreibt der andere Punkt die nach dem Prinzip der reziproken Radien entsprechende Kurve oder Fläche für die Umkugel als Grundkugel.

4.

Die in den Abschnitten 1, 2, 3 gefundenen Sätze über Kräfte, die von einem Punkte A gegen feste Punkte wirken und den Abständen des Punktes A von den festen Punkten proportional sind, lassen sich erweitern, indem die Kräfte den Quadraten, oder dritten Potenzen, oder allgemein den r-ten Potenzen der Abstände proportional gesetzt werden. Hat man nämlich, um gerade den allgemeinen Fall zu wählen:

$$\frac{\lambda_1 \cdot (AP_1)^r}{\lambda_2 \cdot (AP_2)^r} = k, \qquad 1)$$

oder $$\lambda_1 \cdot (AP_1)^r : \lambda_2 \cdot (AP_2)^r : \lambda_3 \cdot (AP_3)^r = m : n : p, \qquad 2)$$

oder $\lambda_1 \cdot (AP_1)^r : \lambda_2 \cdot (AP_2)^r : \lambda_3 \cdot (AP_3)^r : \lambda_4 \cdot (AP_4)^r =$
$$= m : n : p : q, \qquad 3)$$
wo die Punkte im Raume liegen und die λ positive konstante Faktoren bedeuten, so folgt der Reihe nach

$$\frac{AP_1}{AP_2} = \sqrt[r]{k \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \qquad 4)$$

$$AP_1 : AP_2 : AP_3 = \sqrt[r]{\frac{m}{\lambda_1}} : \sqrt[r]{\frac{n}{\lambda_2}} : \sqrt[r]{\frac{p}{\lambda_3}}, \qquad 5)$$

$$AP_1 : AP_2 : AP_3 : AP_4 = \sqrt[r]{\frac{m}{\lambda_1}} : \sqrt[r]{\frac{n}{\lambda_2}} : \sqrt[r]{\frac{p}{\lambda_3}} : \sqrt[r]{\frac{q}{\lambda_4}}. \qquad 6)$$

Diese Formeln enthalten genau die in Abschnitt 3 ausgesprochenen Sätze, aber jetzt unter der Annahme, dass die Kräfte den r-ten Potenzen der Strecken von dem Punkte A nach den Punkten P proportional seien. Es ist noch zu sagen, dass die Gültigkeit erhalten bleibt für negative und gebrochene Werte von r. Hat man nämlich

$$\frac{\lambda_1 (AP_1)^{-r}}{\lambda_2 (AP_2)^{-r}} = k, \text{ oder}$$

$$\lambda_1 (AP_1)^{-r} : \lambda_2 (AP_2)^{-r} : \lambda_3 (AP_3)^{-r} = m : n : p, \text{ oder}$$

$$\lambda_1 (AP_1)^{-r} : \lambda_2 (AP_2)^{-r} : \lambda_3 (AP_3)^{-r} : \lambda_4 (AP_4)^{-r} = m : n : p : q,$$

so folgt der Reihe nach

$$\frac{AP_1}{AP_2} = \sqrt[r]{1 : k \frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

$$AP_1 : AP_2 : AP_3 = \sqrt[r]{1 : \frac{m}{\lambda_1}} : \sqrt[r]{1 : \frac{n}{\lambda_2}} : \sqrt[r]{1 : \frac{p}{\lambda_3}},$$

$$AP_1 : AP_2 : AP_3 : AP_4 = \sqrt[r]{1 : \frac{m}{\lambda_1}} : \sqrt[r]{1 : \frac{n}{\lambda_2}} : \sqrt[r]{1 : \frac{p}{\lambda_3}} : \sqrt[r]{1 : \frac{q}{\lambda_4}},$$

und entsprechend, wenn man $\frac{s}{t}$ für r setzt.

5.

Im I. Abschnitt dieses Artikels über Kräfte in der Ebene und im Raum (S. 64 dieses Bandes) ist folgender Satz aufgestellt worden: Sind $P_1, P_2, \ldots P_n$ feste Punkte im Raum und wirken von dem Punkte A die Kräfte $\lambda_1 \cdot AP_1, \lambda_2 \cdot AP_2, \ldots \lambda_n \cdot AP_n$ in den Richtungen von A gegen die Punkte oder entgegengesetzt dazu, je nachdem die konstanten Faktoren λ positiv oder negativ sind, so geht die Resultierende dieser Kräfte durch den Schwerpunkt S der Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$, denen die bezüglichen λ mit den zugehörigen Vorzeichen als Gewichte beigelegt sind, und die Grösse der Resultierenden ist gleich der Strecke AS multipliziert mit der algebraischen Summe aller Gewichte. Dieser Satz führt zu vielen speziellen Fällen, wenn man die Faktoren λ als inkonstant und damit die Lage des Schwerpunktes als von der Lage des Punktes A abhängig betrachtet.

Wirken von einem Punkte A im Raume aus beliebig viele Kräfte $AP_1', AP_2', \ldots AP_n'$ und wählt man auf der Wirkungslinie einer jeden, entweder auf der Seite, nach welcher die Kraft gerichtet ist, oder auf der entgegengesetzten Seite von A, einen Punkt $P_1, P_2, \ldots P_n$, so kann man die Kräfte in der Form schreiben

$$\left(\frac{AP_1'}{AP_1}\right) \cdot AP_1, \left(\frac{AP_2'}{AP_2}\right) \cdot AP_2, \ldots \left(\frac{AP_n'}{AP_n}\right) \cdot AP_n;$$

folglich geht die Resultierende dieser Kräfte durch den Schwerpunkt S der Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$, wenn ihnen die bezüglichen Gewichte $\frac{AP_1'}{AP_1}, \frac{AP_2'}{AP_2}, \ldots \frac{AP_n'}{AP_n}$ gegeben werden, und zwar je mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem der Punkt auf der gleichen oder entgegengesetzten Seite, nach der die Kraft wirkt, gewählt ist; die Resultierende ist gleich der Strecke AS, multipliziert mit der algebraischen Summe aller Gewichte. Hält man die Punkte $P_1, P_2 \ldots P_n$ fest, ändert aber die Lage von A, ohne die Grössen der Kräfte zu ändern, so bleibt der Schwerpunkt nicht mehr fest.

Angenommen, man hätte die festen Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$ und es wirken gegen sie von dem Punkte A aus Kräfte von den Grössen $(AP_1)^2, (AP_2)^2, \ldots (AP_n)^2$, so geht die Resultierende durch den Schwerpunkt der Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$, wenn ihnen die Gewichte $AP_1, AP_2, \ldots AP_n$ beigelegt werden. Die Aenderung der Richtung bei einer oder mehreren der Kräfte in die entgegengesetzte bewirkt, dass bei dem betreffenden Punkt das Gewicht mit dem negativen Vorzeichen zu versehen ist, und wenn bei einzelnen Kräften noch Faktoren angebracht werden, so sind sie auch bei den betreffenden Gewichten anzubringen.

Man kann allgemein den Kräften die Grössen geben
$$(AP_1)^r, (AP_2)^r, \ldots (AP_n)^r$$
und hat dann den Punkten $P_1, \ldots P_n$ die Gewichte
$$(AP_1)^{r-1}, (AP_2)^{r-1}, \ldots (AP_n)^{r-1}$$
beizulegen; bei der Aenderung einer Kraftrichtung in die entgegengesetzte oder bei Anbringung von Faktoren gilt das gleiche wie vorhin.

Dem Exponenten r darf übrigens bei jedem Punkt ein anderer Wert gegeben werden, wenn auch das Gewicht in entsprechender Weise gewählt wird. Ferner dürfen dem r auch negative und gebrochene Werte gegeben werden. Die Fälle, wo r negativ ist, können zudem auf die Fälle zurückgeführt werden, wo r positive Werte hat.

In dem speziellen Falle nämlich, wo die Kräfte sind:
$$\frac{1}{AP_1}, \frac{1}{AP_2}, \ldots \frac{1}{AP_n}, \text{ oder}$$
$$\frac{\lambda_1}{AP_1}, \frac{\lambda_2}{AP_2}, \ldots \frac{\lambda_n}{AP_n}, \ (\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n \text{ konstant})$$
kann man um den Punkt A als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius 1 legen und zu den Punkten $P_1, P_2, \ldots P_n$ die konjugierten Pole $P_1', P_2', \ldots P_n'$ in bezug auf die Kugel konstruieren; dann ist
$$AP_1' = \frac{1}{AP_1}, \ AP_2' = \frac{1}{AP_2}, \ldots AP_n' = \frac{1}{AP_n}.$$
Daher geht die Resultierende der Kräfte
$$\frac{1}{AP_1}, \frac{1}{AP_2}, \ldots \frac{1}{AP_n}$$
durch den Schwerpunkt S der Punkte $P_1', P_2', \ldots P_n'$ mit gleichen Gewichten und die Grösse der Resultierenden ist $n \cdot AS$; die Resultierende der Kräfte
$$\frac{\lambda_1}{AP_1}, \frac{\lambda_2}{AP_2}, \ldots \frac{\lambda_n}{AP_n}$$
geht durch den Schwerpunkt der Punkte $P_1', P_2', \ldots P_n'$ mit den bezüglichen Gewichten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ und die Grösse der Resultierenden ist $(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n)\ AS$.

Hat man allgemein die Kräfte
$$\frac{\lambda_1}{(AP_1)^r}, \frac{\lambda_2}{(AP_2)^r}, \ldots \frac{\lambda_n}{(AP_n)^r}$$
und konstruiert man die konjugierten Pole $P_1', P_2', \ldots P_n'$ zu $P_1, P_2, \ldots P_n$ in bezug auf die Einheitskugel um A, so entsteht der frühere Fall, wo die Kräfte gleich $\lambda_1 (AP_1')^r$, $\lambda_2 (AP_2')^r, \ldots \lambda_n (AP_n')^r$ sind. Wenn die Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$ auf einer Kugel liegen, so fallen bekanntlich auch die Punkte $P_1', P_2', \ldots P_n'$ auf eine Kugel und diese letztere fällt dann mit der erstern zusammen, wenn die Tangente von A an die Kugel als Längeneinheit gewählt wird.

Ein Familiengrabdenkmal auf dem Sihlfeld-Friedhof in Zürich.

Entworfen von Architekt *Otto Honegger* in Zürich.

Auf dem Zürcher Zentralfriedhofe ist für die Familie unseres am 20. April 1907 verstorbenen Kollegen Architekt *H. Honegger* nach dem Entwurf und unter Leitung von dessen Sohn, Architekt Otto Honegger, das Grabdenkmal errichtet worden, das wir in der Abbildung auf Seite 156 zur Darstellung bringen. Das Denkmal ist in gelblichem Muschelkalkstein von Euville ausgeführt. Auf der Inschrifttafel im Mittelmotiv steht der Name des Verstorbenen, zu dessen Andenken das Grabdenkmal errichtet wurde; Inschriftentafeln aus gleichem Stein sollen später die Ruhestätten der übrigen Familienangehörigen bezeichnen. Durch Anpflanzung von Taxus sowie von zwei Zypressen je zu