**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
**Band:** 79/80 (1922)
**Heft:** 11

## Inhaltsverzeichnis

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 11.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

INHALT: Trägheits- und Eigenschwingungszahlen von Maschinenwellen. — Diplom-Arbeiten an der Architektenschule der E. T. H. — Ueber den Individualismus in der Architektur. — † Robert Winkler. — Miscellanea: Die 48. Generalversammlung des S. I. A. in Solothurn. XII. internationaler Schiffahrts-Kongress. IV. Internationaler Strassenkongress. — Konkurrenzen: Typen landwirtschaftlicher Bauten. V. Wettbewerb der Geiser-Stiftung des S. I. A. Kornhausbrücke über die Limmat. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Bernischer Ingenieur- und Architekten-Verein. Zürcher Ingenieur- und Architekten-Verein. Stellenvermittlung. — Tafel X: † Robert Winkler.

**Band 80.** Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 11.**

# Trägheitskräfte und Eigenschwingungszahlen von Maschinenwellen.

Elementar dargestellt von Prof. Dr. *W. Kummer*, Ingenieur, Zürich.

Die Eigenschwingungszahlen von Maschinenwellen, die von der Wellenverbiegung oder von der Wellenverdrehung, oder von beiden Beanspruchungen kombiniert hervorgerufen werden, sind nach der einschlägigen Literatur in der Regel aus den Differentialgleichungen der klassischen Dynamik hergeleitet. Indessen ist es für das grundlegende Schema der schwingenden Einzelmasse sowohl im Falle der Wellenverbiegung, als auch im Falle der Wellenverdrehung möglich, die Formel für die Eigenschwingungszahl auf elementarem Wege, gleichsam auf statischer Grundlage, rechnerisch zu ermitteln, wozu in beiden Fällen die Zentrifugalkraft der rotierenden Masse ganz oder zum Teil die Gegenkraft der in Betracht fallenden elastischen Kraft bildet. Für die Biegungserscheinung ist diese Berechnungsmethode allgemein bekannt und in die Handbücher des Ingenieurs[1]) übergegangen; für die Verdrehungserscheinung finden wir einen bezüglichen, hier näher zu erörternden Ansatz in dem kürzlich erschienenen Werke von Dr. Ing. *Hans Wydler*[2]). Mit Rücksicht auf die analogen Erörterungen zur Herleitung der jeweiligen Beziehungen, sollen beide Fälle im Folgenden zur Darstellung kommen. Als weitere, dritte Gattung von Eigenschwingungszahlen an Maschinenwellen kann man noch die aus der Längenänderung (Dehnung) von Kurbelstangen hervorgehende betrachten, wobei jedoch die bewegten Massen nicht nur Eigenschwingungen, sondern zugleich meistens auch erzwungene Schwingungen unmittelbar bewirken, die harmonischen Drehmomenten von Trägheitskräften entsprechen; statt einer Einzelwelle ist nun allerdings ein eigentliches „Getriebe", nämlich entweder das Gleitkurbelgetriebe (Schubkurbelgetriebe) oder das Parallelkurbelgetriebe, zu betrachten. Auch für diese Schwingungen die wir als „Dehnungsschwingungen" bezeichnen wollen, lassen sich die Eigenschwingungszahlen auf elementarem Wege, also ohne Zuhülfenahme von Differentialgleichungen, ermitteln, wie im Folgenden gezeigt wird.

1. *Biegungsschwingungen.* Auf die masselose Welle sei die scheibenförmige Masse $m$ mit der sehr kleinen Exzentrizität $e$ aufgebaut. Bei der Rotation erfährt die, gemäss der Durchbiegung $f$ aus der Geraden verformte Welle eine als „zusätzliche" Kraft auftretende Zentrifugalkraft $Z$ vom Betrage:

$$Z = m\,(f + e).\ \omega^2$$

die nach Massgabe der Biegungskonstanten $c_b$ mit der zu $f$ proportionalen Kraft $B$ der federnden Biegung vom Betrag

$$B = c_b f$$

im Gleichgewichte stehen muss, derart dass

$$m\,(f + e)\,\omega^2 = c_b f.$$

Die hieraus bestimmte Durchbiegung:

$$f = \frac{m\,e\,\omega^2}{c_b - m\,\omega^2}$$

wird ein Maximum, wenn der Nenner verschwindet, was für die kritische Winkelgeschwindigkeit $\omega_b$, bezw. für die kritische Drehzahl $\nu_b$ der Eigenschwingung der Wellenverbiegung:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{c_b}{m}}, \qquad \nu_b = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c_b}{m}}$$

der Fall ist. Bekanntlich vermeidet man für numerische Rechnungen die Bestimmung der als Kraft pro Längeneinheit anzugebenden Grösse $c_b$ und schreibt:

$$\frac{c_b}{m} = \frac{c_b f}{m f} = \frac{g}{f}$$

weil die Kraft $c_b f$ dividiert durch $m$ der Beschleunigung $g$ der Erdschwere gleichzustellen ist. Man erhält dann:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{g}{f}}, \qquad \nu_b = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{f}}$$

Man kann auch anstelle von $c_b$ die ihr reziproke Grösse $\gamma_b$ einführen, die, ebenso wie $c_b$, den Elastizitätsmodul $E$ und das Flächenträgheitsmoment des Wellenquerschnitts enthalten muss, und kann schreiben:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{1}{\gamma_b\, m}}, \qquad \nu_b = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{\gamma_b\, m}},$$

welche Darstellungsform wir in einer frühern Veröffentlichung[1]) benutzten.

2. *Drehschwingungen.* Unsere zylindrisch angenommene Welle, deren Zylinder-Erzeugende $A\,B = l$ links in Abbildung 1 dem Beschauer zunächst liegt, sei am End-

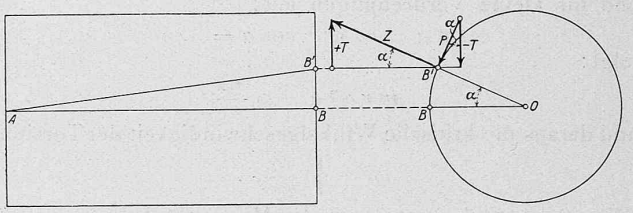


Abbildung 1.

querschnitt bei $A$ mit einer als unendlich gross anzunehmenden Masse versehen, während der Endquerschnitt bei $B$ die endliche Masse $m$ aufweisen soll. Der Verdrehung entspricht der Schiebungsbogen:

$$f = B\,B'$$

für den die Festigkeitslehre die Beziehung:

$$f = M_t \frac{r}{c_t}$$

liefert, in der mit $M_t$ das tordierende Moment, mit $r\,(= OB$ in Abbildung 1) der Wellenradius und mit $c_t$ die Torsionskonstante bezeichnet sind. In $c_t$ sind das polare Trägheitsmoment $J_p$, der Schubelastizitätsmodul $G$ und die Länge $l$ gemäss:

$$c_t = \frac{G\,J_p}{l}$$

enthalten, derart, dass $c_t$ als Moment pro Bogeneinheit Deformation gemessen ist. Wir nennen die deformierende Schubkraft $P$ und schreiben:

$$P = \frac{M_t}{r} = c_t \frac{f}{r^2}$$

Nach *H. Wydler*[2]) entspricht dem Schiebungsbogen $f$ eine Trägheitskraft $T$, die als Komponente der Zentrifugalkraft in der Anfangsrichtung von $f$ den Wert:

$$T = m\,a\,\omega^2$$

hat, wobei für die Bewegungsumkehr:

$$a = f$$

und

$$c_t \frac{f}{r^2} = m\,f\,\omega^2$$

gesetzt wird, und wobei die Auflösung nach $\omega$ den Ausdruck der kritischen Winkelgeschwindigkeit der Torsion ergibt:

$$\omega_t = \sqrt{\frac{c_t}{m\,r^2}} = \sqrt{\left(\frac{G\,J_p}{r^2}\right)\frac{1}{m\,l}}$$

[1]) Vergl. Band II der «*Hütte*», sowie Band I des Taschenbuches für den Maschinenbau von *H. Dubbel*.

[2]) Vergl. unter «Literatur» auf Seite 128 dieser Nummer.

[1]) Auf Seite 147 von Band LXXII (am 12. Oktober 1918).

[2]) Seite 8 seines oben erwähnten Werkes.