Objekttyp: **TableOfContent**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **97/98 (1931)**

Heft 26

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

INHALT: Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion. — Zu den Zeichnungen von Kantonsbaumeister Herm. Fietz †. — Elektrisch geschweisster Blechträger. — Neuartige Fundation beim Bau der Brücke über den Kleinen Belt. — Vom gegenwärtigen Stand der Arbeitsphysiologie. — Mitteilungen: Dampfturbinen von 75 000 PS 3000 Uml/min für Paris. Automobile für die Durchquerung der Wüste Sahara. Der Flugverkehr der italienischen Linien. Schweizer. Bundesrat. Schweizer. Bundesbahnen. Kraftwerk Wäggital. Eidgen. Kunstkommission. Stadtpräsident von Lausanne. — Wettbewerbe: Krematorium beim Friedhof Nordheim in Zürich. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Dieser Nummer ist das Inhalt-Verzeichnis des mit heute schliessenden Bandes 98 beigelegt.

Band 98 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 26

Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion.[1])

Von Prof. Dr. E. MEISSNER, E. T. H., Zürich.

(Fortsetzung von Seite 290.)

5. Integration der totalen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung.

Die meisten Probleme der Mechanik und Physik mit einem Freiheitsgrad und einer unabhängigen Veränderlichen führen auf totale Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die daher im Mittelpunkte des Interesses stehen. Solche Gleichungen geben eine Beziehung zwischen der gesuchten Funktion, ihren ersten Ableitungen und dem Argument, sind also von der Form

$$R(u, p, p', p'') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wenn eine Gleichung nur von der ersten Ordnung vorliegt, oder, wie es gerade in der Mechanik oft vorkommt, wenn sich ein Integral dieser Gleichung angeben lässt (Energie-Integral), so hat man es zu tun mit einer Relation von der Form

$$R_1(u, p, p') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wenn man diese Relation nach u differentiiert, so geht sie in eine solche von der Form (4) über, sodass wir uns auf diese letzte beschränken können. Man löse sie nach p'' auf:

$$p'' = f(u, p, p').$$

Es ist dann auch

$$\varrho = p + p'' = F(u, p, p') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

ein bekannter Ausdruck in den Grössen u, p und p'. In gewissen einfachen Fällen werden auf der rechten Seite nicht alle drei Argumente auftreten; wenn z. B. ein Integral (5) bekannt ist, kann immer eine der drei Grössen eliminiert werden. Dann vereinfacht sich die Lösung.

Statt die Funktion p(u) zu finden, die der Gleichung (4) bezw. (6) genügt, stellen wir uns jetzt die gleichwertige Aufgabe, *ihr Linienbild C zu konstruieren.* Dabei hat man sich für die Lösung bestimmte Anfangsbedingungen vorgeschrieben zu denken, etwa

$$p(0) = p_0 \qquad p'(0) = p_0' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Die Differentialgleichung (6) gibt nun für jede Stelle P_u des Linienbildes C den zugehörigen Krümmungsradius ϱ_u. In infinitesimaler Nähe von P_u kann C ersetzt werden durch den dreipunktig berührenden Krümmungskreis vom Zentrum P_u' und dem Halbmesser $P_uP_u' = p_u$ (Abb. 5 auf Seite 289). Mit Annäherung kann dieser Ersatz auch auf ein endliches Bogenstück ausgedehnt werden, und zwar umso genauer, je kleiner der dazu gehörige Zentriwinkel α ist. Unsere Annäherungsmethode besteht darin, die Kurve C durch solche kleine oskulierende Kreisbogenstücke zu ersetzen.

Man beginnt die Konstruktion bei dem durch (7) gegebenen Punkte P_0, indem man die Punkte Q_0, P_0, Q_0' aufträgt, sodass $OQ_0 = p_0$, $Q_0P_0 = p_0' = OQ_0'$ wird (Abb. 8). Die Differentialgleichung (6) gibt jetzt den Krümmungsradius $\varrho_0 = P_0P_0' = F(0, p_0, p_0')$, welche Strecke von P_0 aus auf der Normalen g_0' bis P_0' abgetragen wird. Wenn ϱ_0 positiv ist, geht das Auftragen von P_0 aus in positivem Sinn, dem Pfeilsinn von g_0', im entgegengesetzten Sinn aber, wenn ϱ_0 negativ ist. Es ist jetzt P_0' der Krümmungsmittelpunkt von C in P_0. Man wählt nun, je nach der verlangten Genauigkeit, einen kleinen Winkel α_1 und schlägt um P_0' den Kreisbogen P_0P_1 mit diesem Zentriwinkel und dem Halbmesser ϱ_0. Dieser in P_0 oskulierende Bogen wird näherungsweise als das erste Stück des Linienbildes C betrachtet. Es können jetzt für P_1 die entsprechenden Punkte Q_1, Q_1' gezeichnet und damit die Werte $p_1 = p(\alpha_1) = OQ_1 = P_1Q_1'$ und $p_1' = p'(\alpha_1) = OQ_1'$ aus der Zeichnung entnommen werden. Sie sind natürlich nur angenähert richtig, werden aber bei kleinem α_1 genügend genau, insbesondere wenn der Krümmungsradius im Intervall 0 bis α_1 nicht stark schwankt. Mit diesen Werten berechnet man jetzt den Krümmungsradius ϱ_1 in P_1, der durch den Wert

$$\varrho_1 = F(\alpha_1, p_1, p_1')$$

gegeben ist, und wiederholt nun die für P_0 beschriebene Konstruktion an P_1, indem man $P_1P_2' = \varrho_1$ macht und um P_1' durch P_1 wieder einen kleinen Kreisbogen P_1P_2 von beliebigem aber kleinem Zentriwinkel α_2 schlägt, der ein weiteres Bogenstück von C approximiert. Wenn nicht wegen starker Schwankung der Krümmung ein kleinerer Wert als α_1 angemessen ist, wird man zweckmässig $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$ setzen, also mit gleichen Intervallen arbeiten. So fährt man weiter und erhält für C die Folge von Kreisbogenstücken $P_0\,P_1\,P_2\,P_3\,\ldots$

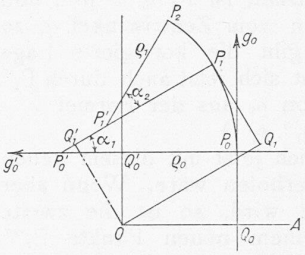

Abb. 8

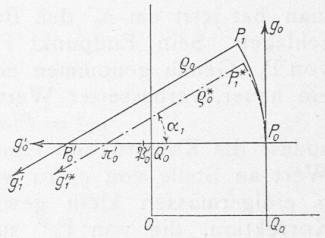

Abb. 9

Es ist klar, dass dieser Konstruktion ein Nachteil anhaftet, der aber in der Natur der Sache liegt. Jeder Punkt P_i wird aus dem vorhergehenden P_{i-1} konstruiert und in der Lage von P_{i-1} enthaltene Ungenauigkeit überträgt sich daher auf P_i. Im ungünstigsten Fall hat man daher eine Häufung der Fehler mit wachsender Zahl von Kreisbogenintervallen zu erwarten. Diese Häufung macht sich praktisch ganz besonders für die p' Werte bemerkbar.

Die Interpolation.

Man kann das besprochene Verfahren wesentlich verbessern, indem man eine einfache Interpolation hinzufügt. Da der Krümmungsradius ϱ sich mit u im allgemeinen ändert, hat der ersetzende Kreisbogen P_0P_1 nur im Anfangspunkt P_0 den durch die Differentialgleichung vorgeschriebenen richtigen Radius; für den Radius im Endpunkte P_1 würde die Differentialgleichung einen andern Wert, nämlich

$$\varrho_1 = F(\alpha_1, p_1, p_1') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ergeben. Man wird im allgemeinen eine bessere Annäherung an den wahren Mittelwert erzielen, wenn dem Kreisbogen nachträglich statt mit ϱ_0 mit dem arithmetischen Mittel $\varrho^* = (\varrho_0 + \varrho_1)/2$ geschlagen wird. Dieser neue Bogen $P_0P_1^*$ hat als Endpunkt einen Punkt P_1^*, der etwas verschieden von P_1 sein wird. Demgemäss ergeben sich an Stelle von p_1 und p_1' neue, korrigierte Werte p_1^* und $p_1'^*$, wobei sich zeigt, dass die Korrektur in p' viel beträchtlicher ist, als in p.

Praktisch ist die neue Konstruktion folgendermassen auszuführen (Abb. 9):

Nachdem P_1 wie früher konstruiert und ϱ_1 aus Formel (8) gefunden worden ist, trage man von P_0 aus auf der Normalen P_0Q_0' bis nach $\mathfrak{P}_0'$ die Länge ϱ_1 ab, und

[1]) Diese Artikelfolge wird als Sonderdruck erscheinen. Red.