Objekttyp: **TableOfContent**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **99/100 (1932)**

Heft 6

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

INHALT: Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion. — Die Grundwasserversorgung Diepoldsau. — Der neue Zentralbahnhof in Mailand. — Diplomarbeiten der Architektur-Abteilung an der E. T. H. — Ein Entscheid des Bundesgerichtes über das Bündner Motorlastwagen-Verbot. — Mitteilungen: Die heutigen Probleme der Hochspannungs-Kraftübertragung. Der Gliederkeilriemen. Bahnumformer für die algerischen Staatsbahnen. Vom Kraftwerk Kembs. Internationale Sprachnormung in der Technik. Der Durchschlag des zweiten Monte Ceneri-Tunnels. Die durchgehende Personenzug-Bremse. Neue schweizerische Flugzeuge. Prof. Dr. phil., Dr. math. h. c., Dr. phil. h. c., Dr. med. h. c., Dr. rer. nat. h. c., Dr. Ing. e. h. David Hilbert. — Nekrologe: W. Reitz. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine.

Band 99 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 6

Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion.

Von Prof. Dr. E. MEISSNER, E. T. H., Zürich.

(Schluss von Seite 44.)

13. Integration der genauen Pendelgleichung.

Bedeutet l die reduzierte Pendellänge, g die Beschleunigung der Schwere, p den Ausschlagswinkel und t die Zeit, so lautet die Gleichung für ebene Pendelschwingungen bekanntlich

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(p)$$

Führt man die neue Veränderliche $u = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t$ ein, so geht $p(t)$ in eine Funktion $p(u)$ über, die der Differentialgleichung

$$p'' = -\sin(p)$$

genügt. Man hat das Linienbild dieser Funktion zu konstruieren. Dabei sollen nicht etwa kleine Pendelausschläge angenommen werden. Vielmehr wollen wir geradezu voraussetzen, dass anfangs das Pendel horizontal stehe und sich dort in der Umkehrlage befinde, sodass es in gestrecktem Winkel hin und herschwingen wird. Man hat dann für $t = 0$, $p = \pi/2$ und $\dot{p} = 0$, bezw. für

$$u = 0 \qquad p(0) = \pi/2 \qquad p'(0) = 0.$$

Der Krümmungsradius $\varrho(u)$ des Linienbildes C wird jetzt

$$\varrho(u) = p - \sin(p).$$

Demgemäss hat man in Abb. 33 zunächst eine unter 45^0 geneigte Linie AB und eine Sinuslinie AC aufgetragen, sodass nun zu jeder Abszisse $p = AD$ in der Strecke EF der Wert von $\varrho = p - \sin(p)$ sofort abgegriffen werden kann. Als Längeneinheit wurde die Strecke 1 dm gewählt. Die Abbildung 34 zeigt die Konstruktion, wobei der Differenzenwinkel $\alpha = 15^0$ gewählt wurde. P_0, der Ausgangspunkt, liegt auf der Axe $u = 0$ im Abstand $\pi/2 = 1{,}570$ von O entfernt. Die Krümmungsradien für die Punkte $P_1\ P_2\ P_3 \ldots$ nehmen schnell ab, sodass das Liniendiagramm C in S eine Spitze aufweist. Die von O an C gehende Tangente kann daher ziemlich genau gezogen werden. Bezeichnet man mit $u^* - \pi/2$ den Winkel, den sie mit der Axe $u = 0$ einschliesst, so ist u^* der Wert, für den $p(u)$ gleich null wird. Demgemäss erreicht das Pendel seine tiefste Lage nach der Zeit

$$t^* = \sqrt{\frac{l}{g}}\,u^*,$$

und t^* ist daher die halbe Ausschlagdauer.

Abb. 34 gibt für u^* den Wert $106{,}6^0 = 1{,}860$ abs. In Abb. 35 ist die Konstruktion wiederholt, wobei der kleinere Differenzenwinkel $\alpha = 7\,^1/_2{}^0$ verwendet wurde. Sie ergab für u^* den Betrag $106{,}7^0$. Endlich wurde noch mit $\alpha = 5^0$ operiert, und $u^* = 107{,}1^0$ erhalten. Anderseits kann man für u^* (in Graden gemessen) leicht die Formel herleiten

$$u^* = \frac{180}{\pi\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{dp}{\sqrt{\cos p}}$$

und entweder mit Reihenentwicklung, oder besser nach der Gauss'schen Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels den Wert des bestimmten elliptischen Integrals rechter Hand ausrechnen. Es ergibt sich der genaue Wert $u^* = 107{,}052^0$, sodass auch im ungünstigsten Fall der Abb. 34 der Fehler in der Ermittlung der Schwingungsdauer kleiner als $^1/_2\,\%$ ausfällt. Es ist hierbei noch zu beachten, dass die Theorie kleiner Schwingungen, auf diesen Fall ausgedehnt, an Stelle von u^* den Wert 90^0 ergeben würde.

Unsere Konstruktion hat aber gegenüber der rechnerischen Bestimmung der Schwingungsdauer den Vorteil, dass sie uns nicht nur einen einzelnen Funktionswert, sondern den ganzen Verlauf der Funktion p gibt. Denn aus dem gezeichneten Linienbild C kann der Ausschlagwinkel p für jedes u und damit für jeden Zeitpunkt entnommen werden. Der Uebersichtlichkeit wegen ist im Koordinatensystem der Abb. 33 nachträglich noch das gewöhnliche Punktdiagramm $p(u)$, wie es sich aus C ergibt, aufgetragen worden. Man erhält die Kurve GH, die einem elliptischen Funktionsgesetz folgt. Zum Vergleich ist die cos-Linie GJ eingetragen, die sich nach der Theorie kleiner Schwingungen ergibt. Man erkennt, dass der Ausschlagwinkel mit wachsender Zeit viel weniger abnimmt, als die Theorie kleiner Schwingungen ergeben würde.

14. Die Bahnkurven des sphärischen Pendels.

Wenn ein gewöhnliches Fadenpendel von der Länge l unter allgemeinen Anfangsbedingungen in Schwingungen versetzt wird, so beschreibt sein Endpunkt m eine Bahnkurve, die auf einer Kugel gelegen ist. Bedeutet δ die vom tiefsten Punkt dieser Kugel aus gemessene Poldistanz, φ die von einem beliebigen Anfangsmeridian aus gemessene Länge, t die Zeit, so liefert für die Bewegung des Pendels der Flächensatz die Gleichung

$$\sin^2(\delta)\,\frac{d\varphi}{dt} = c$$

und der Energiesatz gibt

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \sin^2(\delta)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \lambda\cos\delta = k$$

Hier ist $\lambda = 2g/l$, und die Integrationskonstanten c und k hängen von den Anfangsbedingungen ab.

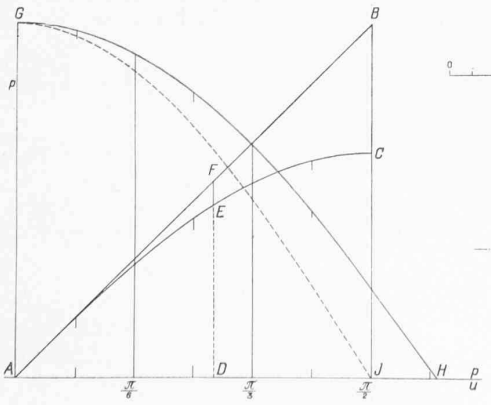

Abb. 33.

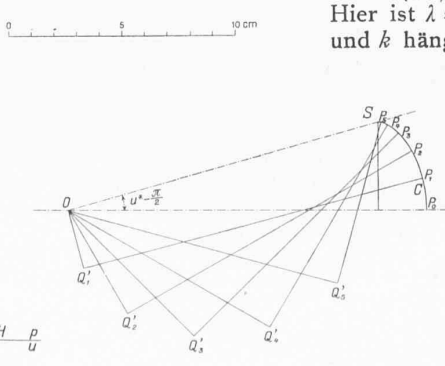

Abb. 34.

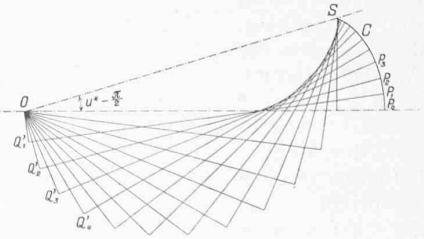

Abb. 35.